ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

ҚАЗАҚ МЕМЛЕКЕТТІК ҚЫЗДАР ПЕДАГОГИКАЛЫҚ УНИВЕРСИТЕТІ

Б.Ж. Сағындықов

МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІ

Оқу құралы

Алматы, 2014
«Қыздар университеті» баспасы

УДК 517(075.8)
ББК 22.161 я73
С 14

Баспаға Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университетінің Редакциялық-баспа кеңесі ұсынған

Пікір жазғандар:
М. Дауылбаев − физика-математика ғылым. докт., профессор
Қ. Шакенов − физика-математика ғылым. докт., профессор
А.Ө. Дәулетқұлова − педагогика ғылым. кандидаты

Сағындықов Б.Ж.
С14 Математикалық физика теңдеулері: *оқу құралы*/ Б.Ж.Сағындықов – Алматы: «Қыздар университеті» баспасы, 2014. – 252 б.

ISBN 978 – 601 – 228 – 138 – 5

Ұсынылып отырған оқу құралы университеттің математика, физика және информатика мамандықтарында оқитын студенттерге арналған.

Оқу құралы автордың Қазақ мемлекеттік қыздар педагогикалық университетінде аталған пән бойынша өткізілген дәрістері мен практикалық сабақтарының негізінде мемлекеттік стандартқа (ҚР МЖМБС 3.08.331-2006, MFT 2210) сай құрылды.

УДК 517 (075.8)
ББК 22.161 я73

ISBN 978 – 601 – 228 – 138 – 5

КІРІСПЕ

Бүгінгі таңда жоғары білім беру саласында кредиттік технология стандарттарына сай студенттің өзіндік жұмыстарына көп уақыт бөлінген. Бірақ бұл үдеріс осыған сәйкес білім беру мен оны қабылдау үшін оқу-әдістемелік құралдарымен қамтылмаған, әсіресе арнайы курстарға арналған қазақ тіліндегі техникалық, математикалық басылымдар жоқтың қасы. Солардың қатарына «Математикалық физика теңдеулері» пәніне арналған оқу құралы да жатады. Математикалық физика теңдеулерінің төңірегінде қарастырылатын сұрақтар мен мәселелер өте көп. Олар әртүрлі физикалық құбылыстардың математикалық модельдерін және оларды өрнектейтін теңдеулерін зерттеуге тығыз байланысты.

Оқу құралының мазмұны және материалды таңдау кредиттік жүйе бойынша Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі қабылдаған MFT 2210 стандартына сәйкес келеді. Педагогикалық университетте бакалавр бағдарламасы бойынша мұндай оқу құралын жазуда төмендегі мақсаттар көзделді:

1. «Математикалық физика теңдеулері» курсында негізгі математикалық модельдер туралы толық көлемде ақпарат беру;
2. Материалдарды студенттерге түсінікті математика және физика тілінде жеткізу;
3. Студенттерді қолданбалы есептерді шығаруда математикалық аппаратты тиімді пайдалануға үйрету.

Оқу құралы екі бөлімнен, ал бірінші бөлім төрт тараудан тұрады. Негізгі желісі 1, 4, 6, 8 – тарауларда қарастырылады, ал қалған төртеуі соларды түсінуге көмекші тараулар болып саналады.

1- тарау. Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар
2- тарау. Қисық сызықты координаталар және векторлық анализ
3- тарау. Функционалдық анализ элементтері
4- тарау. Гиперболалық типтес теңдеулер
5- тарау. Математикалық физиканың арнайы теңдеулері
6- тарау. Параболалық типтес теңдеулер
7- тарау. Фурье қатары. Фурье интегралы. Фурье түрлендіруі
8- тарау. Эллипстік типтес теңдеулер

Кредиттік жүйе оқытушының да білімін үнемі жетілдіруді қажет етеді. Әсіресе қазақ тілінде арнайы оқулықтардың жоқтығы оқытушының жұмысын қиындатады. Бұл оқу құралы осындай олқылықтың орнын толтыруды көздейді. Қажетті мәліметтердің барлығы дерлік оқу құралының соңында келтірілген әдебиеттерден алынды. Бұл жерде автордың еңбегі, егер осылай айтуға болатын болса, бар мәліметтерді сұрыптау және оқушыға түсінікті тілде жеткізу.

Оқу құралында кездесетін кемшіліктер мен қателіктерді көрсеткен оқырмандардың ескертулерін автор зор ықыласпен қабылдайды.

E – mail: bimurat55@ gmail.com

1-ТАРАУ. МАТЕМАТИКАЛЫҚ ФИЗИКА ТЕҢДЕУЛЕРІНІҢ НЕГІЗГІ ЕСЕПТЕРІНІҢ ҚОЙЫЛЫМЫ

Бұл тарау дербес туындылы теңдеулердің жалпы мәселелеріне арналған. Математикалық физиканың негізгі теңдеулері келтірілген. Екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің классификациясы қарастырылған. Гиперболалық, параболалық және эллипстік типтегі теңдеулердің әрқайсысын канондық түрге келтіру процедурасы жете жүргізілген. Тұрақты коэффициентті теңдеулерді әрі қарай ықшамдау жобасы баяндалған.

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер. Негізгі ұғымдар

n өлшемді R^n Евклид кеңістігінде $x=(x_1, x_2, ..., x_n)$, $n \geq 2$ нүктелерінің жиынынан тұратын G облысы берілген деп санайық. Онда осы облыста анықталған n тәуелсіз айнымалыға қатысты k-дербес туындылы дифференциалдық теңдеуін келесі түрде жазуға болады.

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n, u(x), \frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}, ... \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} ... \partial x_n^{k_n}}, ...\right) = 0, \tag{1.1}$$

мұнда $k_1 + k_2 + ... + k_n = k$, $u = u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ - белгісіз ізделінетін функция, $F(\cdot)$ - өзінің аргументтері бойынша берілген функция. G облысы (1.1) теңдеуінің берілу облысы деп аталады. Алда дербес туындылардың қысқаша белгілеулерін пайдаланайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x_1} = u_{x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2} = u_{x_2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} = u_{x_1 x_1}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = u_{x_2 x_2}, ...$$

Мысалдар:

1) $x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + x_3 u_{x_3} = 0$ бірінші ретті теңдеу;
2) $u_{x_1 x_1} + u_{x_2 x_2} + ... + u_{x_n x_n} + x_1 u_{x_1} + x_2 u_{x_2} + ... + x_n u_{x_n} + \cos u = 0$ екінші ретті теңдеу;
3) $u_{x_1 x_2 x_3} + u_{x_1 x_2} + u_{x_1 x_3} + u_{x_2 x_3} = \sin(x_1 x_2)$ үшінші ретті теңдеу, $u = u(x_1, x_2, x_3)$.

Сонымен құрамында ең болмағанда бір k-ретті дербес туындысы бар және бұдан басқа жоғары ретті туындысы болмайтын теңдеуді k-ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп атайық (қысқаша д.т.диф.т.).

$x_1, x_2, ..., x_n$ тәуелсіз айнымалылары бойынша (1.1) теңдеуінің G берілу облысында үзіліссіз анықталған $u(x) = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы өзінің үзіліссіз дербес туындыларымен бірге осы теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын болса, онда оны ***классикалық*** немесе ***жай*** шешім деп атайық.

Егер R^n кеңістігінің өлшемі $n = 2$ тең болса, онда алда $x_1 = x, x_2 = y$ деп қабылдаймыз. Егер $n = 3$ болса, онда $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ деп ұйғарамыз.

Егер (1.1) теңдеу ізделініп отырған функция мен оның туындысына қатысты сызықтық болса, онда ол дербес туындылы сызықтық теңдеу деп аталады.

Егер (1.1) теңдеу ізделініп отырған функцияның барлық жоғары ретті туындыларына қатысты сызықты болса, онда ол дербес туындылы сызықтық дерлік (квазилинейное) теңдеу деп аталады. Мысалы, $\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}=0$ теңдеуі 3 - ретті сызықтық дерлік теңдеу болады. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a(x,y)u=0$ теңдеуі дербес туындылы сызықтық дифференциалдық теңдеу. $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^3+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^3+a(x,y)u=0$ теңдеуі сызықтық емес дербес туындылы дифференциалдық теңдеу деп аталады. 1 - ретті сызықтық теңдеуді келесі түрде жазуға болады.

$$b_1(x)\frac{\partial u}{\partial x_1}+b_2(x)\frac{\partial u}{\partial x_2}+...+b_n(x)\frac{\partial u}{\partial x_n}+c(x)u=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u\equiv f(x),$$

мұнда $b_1,b_2,...,b_n,c$, f функциялары $x_1,x_2,...,x_n$ айнымалылары бойынша G облысында берілген функциялар. Сонда $b_1,b_2,...,b_n,c$ функциялары теңдеудің коэффициенттері, ал $f(x)$ оң жағы немесе бос мүшесі деп аталады.

2 - ретті сызықтық д.т.диф.т. төменгі түрде жазайық.

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial y_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u=f(x), \qquad (1.2)$$

мұнда $a_{ij}(x),b_i(x),c(x)$ функциялары теңдеудің коэффициенттері деп аталатын G облысында берілген функциялар. Ал *f(x)* - (1.2) теңдеуінің G облысында берілген оң жағы немесе бос мүшесі.

Егер д.т.диф.т. бос мүшесі $f(x)\equiv 0$ болса, онда теңдеу біртекті теңдеу деп аталады. Ал керісінше $f(x)\neq 0$ тең болмаса, онда д.т.диф.т. біртекті емес деп аталады.

(1.2) - д.т.диф.т-ң. сол жағын $L(u)$ арқылы белгілейік. Сонда ол келесі түрде жазылады

$$L(u)=Lu=f(x),$$

мұнда

$$Lu\equiv\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}+c(x)u \qquad (1.3)$$

2-ретті дифференциалдық оператор. Егер (1.3) операторында барлық $a_{ij}(x)=0, i,j=\overline{1,n}$, болып, бірақ $b_i(x)$ ішінде ең болмағанда біреуі нөлден өзгеше болса, онда (1.3) қатынасы 1-ретті сызықтық дифференциалдық операторға айналады. 1-ші және 2-ретті сызықтық дифференциалдық операторлар келесі қасиеттерге ие:

1. $L(c \cdot u) = c \cdot Lu, c = const$.
2. $L(u_1 + u_2) = Lu_1 + Lu_2$.

Бұл қасиеттерден біртекті дифференциалдық теңдеулер үшін маңызды тұжырымдар шығады.

Тұжырым. Егер $u(x)$ функциясы G облысында $Lu = 0$ сызықтық біртекті диф.т. шешімі болса, онда $c \cdot u(x), c = const$ көбейтіндісі де, сол облыста сол теңдеудің шешімі болады.

Тұжырым. Егер $u_1(x)$ және $u_2(x)$ функциялары G облысында сызықтық біртекті диф.т. шешімдері болса, онда олардың $u_1(x) + u_2(x)$ қосындылары да сол облыста $Lu = 0$ теңдеуінің шешімі болады.

Салдар. Егер G облысында $u_1(x), u_2(x), ..., u_m(x)$ функциялары $Lu = 0$ теңдеуін қанағаттандыратын болса, онда олардың $c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + ... + c_mu_m(x)$ сызықтық комбинациясы $Lu = 0$ теңдеуінің шешімі болады, мұнда $c_i, i = \overline{1, m}$ - кез келген тұрақтылар.

Мысал. Егер $f\left(y/x\right)$ - кез келген дифференциалданатын функция болса, онда $u(x, y) = xy + xf\left(\frac{y}{x}\right)$ функциясы $x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xy + u$ теңдеуінің шешімі екенін дәлелде.

Шешуі. $u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ және $u_y = \frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларын табайық:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y + f\left(\frac{y}{x}\right) + xf' \cdot \frac{-y}{x^2} = y + f - \frac{y}{x}f',$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = x + xf'\left(\frac{y}{x}\right)\frac{1}{x} = x + f'.$$

Берілген теңдеуге табылған дербес туындыларды қойсақ,

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = xy + xf - yf' + xy + yf' =$$

$$= 2xy + xf = xy + xf + xy = xy + u$$

Ескерту: мұндағы "штрих" f функциясынан $\frac{y}{x}$ аргументі бойынша алынған аралық туындысын көрсетеді.

Мысал. $u(x, y) = \ln\frac{1}{r}, r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

функциясы $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$ Лаплас теңдеуінің шешімі болатынын тексер, мұнда (x_0, y_0)–жазықтықта бекітілген нүкте.

Шешуі. Берілген функцияның дербес туындыларын табу үшін өзімізге ыңғайлы түрде жазып алайық:

$$u = \ln\frac{1}{r} = -\frac{1}{2}\ln r^2 .$$

Бұдан

$$u_x = -\frac{1}{2}\frac{1}{r^2}\left(r^2\right)'_x = -\frac{x - x_0}{r},$$

$$u_{xx} = \left(u_x\right)_x = -\left[\left(x - x_0\right)\cdot\left(r^2\right)^{-1}\right]'_x = -\frac{1}{r^2} + \frac{x - x_0}{r^4}\left(r^2\right)'_x =$$

$$= -\frac{1}{r^2} + \frac{2\left(x - x_0\right)^2}{r^4}.$$

Осыған ұқсас $\quad u_{yy} = -\frac{1}{r^2} + \frac{2\left(y - y_0\right)^2}{r^4}.$

Табылған u_{xx} және u_{yy} туындыларының мәндерін Лаплас теңдеуіне қойсақ, онда жазықтықтың тек бір $\left(x_0, y_0\right)$ нүктесінен басқа нүктелерде

$$u_{xx} + u_{yy} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2\left(x - x_0\right)^2 + 2\left(y - y_0\right)^2}{r^4} = -\frac{2}{r^2} + \frac{2}{r^2} \equiv 0 .$$

Сонымен $u = \ln\frac{1}{r^2}$ функциясы R^2 жазықтығында $\left(x_0, y_0\right)$ нүктесінен басқа нүктелерде Лаплас теңдеуінің шешімі болады, ал $\left(x_0, y_0\right)$ нүктесінде шексіздікке ұмтылады. Яғни, $\quad \lim\limits_{r\to 0}\ln\frac{1}{r} = +\infty .$

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер де жай (қарапайым) дифференциалдық теңдеулер сияқты шексіз дербес шешімдер жиынына ие, яғни берілген теңдеуді қанағаттандыратын қандай да бір функциялар үйірін анықтайды. Қарапайым дифференциалдық теңдеулер мен дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімдерінің арасында маңызды айырмашылық бар.

$$y'' = f\left(x, y, y'\right) \tag{1.4}$$

жай дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі кез келген екі тұрақтыға байланысты функциялардың үйірінен тұратыны белгілі:

$$y = \varphi\left(x, C_1, C_2\right). \tag{1.5}$$

(1.4) диффенциалдық теңдеуінің кез келген дербес шешімін (1.5) - нен C_1 және C_2 - ге белгілі мәндер бере отырып алуға болады. Мысалы, екінші ретті сызықтық жай дифференциалдық теңдеу берілсін делік: $y'' + 9y = 0$. Бұл теңдеудің жалпы шешімі $y(x) = C_1\cos 3x + C_2\sin 3x$ түрінде жазылады. Егер алғашқы шарттар берілсе, $y(0) = 0, y'(0) = 1$, онда алғашқы шарттардың көмегімен C_1 және C_2 тұрақтыларын табамыз.

$$\begin{cases} y(0) = C_1\cdot 1 + C_2\cdot 0 = 0 \\ y'(0) = -3C_1\cdot 0 + 3C_2\cdot 1 = 1 \end{cases}$$

Бұдан $C_1 = 0, C_2 = 1/3$. Демек бұларға сәйкес дербес шешім $y(x) = \frac{1}{3}\sin 3x$ түрінде табылады.

Енді келесі түрдегі екі тәуелсіз айнымалыға қатысты бірінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеу қарастырайық.

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \tag{1.6}$$

мұнда $u = u(x, y)$. (1.6) теңдеуінің құрамына тек $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындысы кірген. Бұл туындыны табарда айнымалы x бекітілген (тұрақты) деп саналады. Сонда (1.6) теңдеуін тәуелсіз айнымалы y пен ізделініп отырған u функциясының қарапайым теңдеуі ретінде қарастыруға болады. Бұл қарапайым дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$u = \varphi(x, y, C) \tag{1.7}$$

формуласы арқылы анықталсын делік. Яғни, C - ның тұрақты шамасында (1.7) шешімінің құрамына x шамасы параметр түрінде кіреді.

Сонымен (1.6) теңдеуінің ең жалпы шешімін табарда тұрақтыны алмастырамыз, мысалы $C = \psi(x)$ функциясымен алмастырамыз. Мысал ретінде бірінші ретті д.т.диф.т. қарастырайық.

$$u - x\frac{\partial u}{\partial x} - x^2 y^2 = 0 \tag{1.8}$$

және оның жалпы шешімін табайық. Бұл теңдеудегі y шамасын параметр ретінде қабылдап, теңдеуді келесі түрде жазайық $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{x}u = -xy^2$. Соңғы сызықтық қарапайым дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі $u = Cx - x^2 y^2$. Сонда осы шешімге сәйкес келетін (1.8) д.т.диф.т. жалпы шешімі $u(x, y) = x\psi(y) - x^2 y^2, \psi(y) \in C(R)$ түрінде анықталады.

Физикалық механикада табиғат құбылыстарын зерттеу көбіне екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді шешуге және талдауға тіреледі.

Математикалық физикада жиі кездесетін теңдеулерді атап өтейік: кеңістіктегі дыбысты, электромагниттік толқындарды және басқа да тербеліс құбылыстарын зерттеу толқындық теңдеуге алып келеді

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x, y, z), \tag{1.9}$$

мұнда $u = u(x, y, z, t)$, ал a – берілген ортадағы толқынның таралу жылдамдығы. (1.9) - теңдеу үш өлшемді толқындық теңдеу. $u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, t)$ теңдеуі екі өлшемді толқындық теңдеу. Бір өлшемді жағдайда, яғни біртекті ішек (струна) тербелісінің теңдеуі $u_{tt} = a^2 u_{xx} + f(x, t)$ түрінде беріледі.

Біртекті изотропты денеде жылудың таралуы, диффузия құбылысы жылу өткізгіштік теңдеуімен өрнектеледі.

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}\right) + f(x, y, z, t). \tag{1.10}$$

(1.10) теңдеуі үш өлшемді жылу өткізгіштік теңдеуі деп аталады.

$$u_t = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f\left(x, y, t\right), u = u\left(x, y, t\right)$$

екі өлшемді жылу өткізгіштік теңдеуі. Бір өлшемді жылу өткізгіштік теңдеуі

$$u_t = a^2 u_{xx} + f\left(x, y\right), u = u\left(x, t\right)$$

түрінде беріледі.

Біртекті изотропты денеде қалыптасқан жылу күйін қарастырғанда (1.10) теңдеуінен Пуассон теңдеуіне көшеміз.

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = -\frac{1}{a^2} f\left(x, y, z\right) = g\left(x, y, z\right). \qquad (1.11)$$

Егер $g\left(x, y, z\right) = 0$ болса, яғни сыртқы жылу көзінің әсері болмаса, онда (1.11) теңдеуінен Лаплас теңдеуіне көшеміз.

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0. \qquad (1.12)$$

Тартылыс өрісінің потенциалы және стационарлы электр өрісі Лаплас теңдеулерін қанағаттандырады.

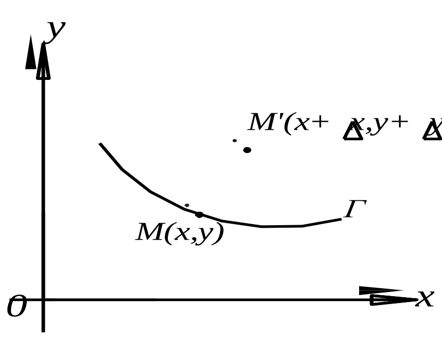
(1.9) - (1.12) теңдеулері математикалық физиканың негізгі теңдеулері деп аталады. Бұл теңдеулер түпкілікті зерттеулердің көмегімен кең мағынада физика мен техниканың дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер түрінде құрылған басқа да есептерін шығаруға жол ашады.

Екінші ретті сызықтық дерлік теңдеулердің классификациясы және сипаттамалары

Оң жағы $f = f\left(x, y, u\right)$ аргументтерінің өзгеру облысында үзіліссіз диффенциалданатын, ал коэффициенттері $a = a\left(x, y, u\right)$, $b = b\left(x, y, u\right)$ болып келетін бірінші ретті сызықтық дерлік теңдеудің сипаттамаларын енгізейік:

$$a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y} = f. \qquad (1.13)$$

XOY жазықтығының *G* облысында (1.13) теңдеуінің шешімі болатын үзіліссіз дифференциалданатын $u\left(x, y\right)$ шешімі анықталсын делік. Бұл шешімнің *G* облысында орналасқан және $y = y\left(x\right)$ теңдеуімен анықталған *Г* тегіс қисығының (гладкая кривая) бойындағы мәндері белгілі деп санайық, (1- сур.қара).



1-сурет. y=y(x) функциясының графигі

Яғни $$u\big|_{y=y(x)} = u(x, y(x)) = \alpha(x). \qquad (1.14)$$

Г қисығының бойындағы кез келген нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларының мәндерін табу туралы есеп қоялық.

Егер осы қойылымдағы берілген есептің шешімі табылатын болса, онда *Г* - ның төңірегіндегі нүктелерде $u_{M'}$ мәнін мейлінше аз бірінші ретке дейінгі дәлдікпен жуықтап табуға болады. Өйткені бір-біріне өте жақын $M(x, y) \in Г$ және $M'(x+\Delta x, y+\Delta y)$ нүктелеріндегі шешімдер $u_{M'} \approx u_M + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_M \Delta x + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_M \Delta y$ қатынасымен байланысты.

$\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларын табу үшін (1.14) теңдігін x бойынша дифференциалдайық

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \alpha'(x).$$

Соңғы теңдеу бастапқы (1.13) теңдеуімен бірге ізделініп отырған $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ дербес туындыларын табу үшін сызықтық алгебралық жүйе құрайды. Бұл жүйенің анықтауышы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ 1 & \frac{dy}{dx} \end{vmatrix} = a\frac{dy}{dx} - b.$$

Екі жағдай қарастырайық:

1) *Г* қисығының бойындағы барлық нүктелерде $\Delta \neq 0$;
2) *Г* қисығының бойындағы барлық нүктелерде $\Delta = 0$.

Бірінші жағдайда жүйенің жалғыз шешімі және қисықтың бойындағы әрбір нүктеде $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$ туындыларының тек бір мәні табылады. Екінші жағдайда жүйе үйлесімді, өйткені G облысында (1.13) теңдеуінің шешімі бар деп ұйғарғанбыз. Олай болса $rang\begin{bmatrix} a & b & f \\ 1 & \frac{dy}{dx} & \alpha'(x) \end{bmatrix} = rang\begin{bmatrix} a & b \\ 1 & \frac{dy}{dx} \end{bmatrix}$. Яғни кеңейтілген матрицаның рангісі $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ белгісіздерінің коэффициенттерінен құрылған ерекше матрицаның рангісіне тең. Сондықтан *Г* – ның әрбір нүктесінде

$$\Delta = \Delta_1 = \Delta_2 = 0,$$

мұнда Δ_1, Δ_2 - Δ бас анықтауышының бірінші, екінші бағандарын бос мүшелермен алмастырғанда шығатын анықтауыштар, яғни жүйенің шексіз көп шешімдер жиыны бар. Сонымен екінші жағдайда $\frac{\partial u}{\partial x}$ және $\frac{\partial u}{\partial y}$ туындылары *Г* қисығының бойындағы әрбір нүктеде $u(x,y)$ шешімінің мәндері бойынша бірмәнді анықталмайды. Бұл жағдайда *Г* қисығын (1.13) теңдеуінің характеристикасы (сипаттамасы), ал $a\frac{dy}{dx}-b=0$ теңдеуін оның характеристикалық (сипаттаушы) теңдеуі деп атайды.

Нақты табылған $u(x,y)$ шешіміндегі $\lambda=\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a}$ қатынасы *G* облысында характеристикалық деп аталатын бағыттардың өрісін анықтайды.

Сонда

$$\frac{dy}{dx}=\frac{b}{a} \qquad (1.15)$$

дифференциалдық теңдеуінің жалпы шешімі бір параметрлі характеристикалардың үйірін анықтайды.

Ескерту: егер (1.13) теңдеуі сызықтық теңдеу болса (коэффициенттері шешімге байланыссыз), онда оның характеристикаларын алдын-ала шешімін анықтамай-ақ табуға болады. Ал (1.13) теңдеуі сызықтық дерлік (квазилинейное) теңдеу болса, онда оның характеристикалары шешімге тәуелді, яғни тек шешімі табылған жағдайда ғана оны анықтауға болады.

(1.13) теңдеуінің шешіміне тиісті характеристикасы болсын делік. Онда бұл характеристиканың бойындағы әрбір нүктеде $\Delta=\Delta_1=\Delta_2=0$ арақатынастары орынды. Бірақ бұлардың бәрі бірдей тәуелсіз емес. Расында, алдымен $\Delta=0, \Delta_1=0$ деп санасақ, онда бұл анықтауыштардың бағандарының өзара пропорционалдықтарынан Δ_2 анықтауышының нөлге теңдігі шығады. Сондықтан $\Delta=0$ характеристикалық теңдеуімен қатар $\Delta_1=0$ қатынасын қарастырайық. Δ_1 анықтауышын аша отырып, $\Delta_1=\begin{vmatrix} f & b \\ \frac{du}{dx} & \frac{dy}{dx}\end{vmatrix}=f\frac{dy}{dx}-b\frac{du}{dx}=0$ теңдігін аламыз және (1.15) теңдігін ескере отырып,

$$\frac{du}{dx}=\frac{f}{a} \qquad (1.16)$$

дифференциалдық қатынасын аламыз. Сонымен, характеристикада $u(x,y)$ шешімі (1.16) жай дифференциалдық теңдеуін қанағаттандырады.

Қорытынды: жалпы интегралы табылатын сызықтық дерлік теңдеулер санаулы. Барлық теңдеулерді шешетін ортақ математикалық аппарат жоқ. Қарастырылып отырған тақырыптағы тәсілді дифференциалдық теңдеулердің ретін төмендететін тәсіл ретінде қабылдаймыз. Атап айтқанда, алдымен (1.13) теңдеуінің шешімі бар деп ұйғарып, характеристикаларын таптық. Содан кейін осы характеристикаларда ізделініп отырған шешім жай дифференциалдық теңдеулерді қанағаттандыратынын көрсеттік. Ал есеп шығарғанда кері жүреміз.

Дербес жағдайда (1.13) теңдеуі біртекті болса, яғни $f = 0$ болса, онда характеристикада $\dfrac{du}{dx} = 0$ немесе $u = C$ және әртүрлі характеристикада тұрақты C – ның шамасы да әртүрлі болады.

Характеристиканың бойындағы әрбір нүктеде $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ және $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ туындылары бірмәнді анықталмағандықтан сол нүктелерде характеристикаға жанама емес бағытта алынған $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ туындысы да бірмәнді анықталмайды, өйткені

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}} = \left(\vec{l}\,^\circ, grad u\right) = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\alpha ,$$

мұнда $\vec{l}\,^\circ = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$.

Бұдан шешім үзіліссіз болғанымен, $\vec{l}$ бағыты бойынша алынған $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{l}}$ туындысы характеристика арқылы өткенде үзілісті болуы мүмкін. Сонымен ***босаң әлсіз үзілісті шешімдер қисықтары*** (линии слабых разрывов решений) характеристиканы береді. Кейбір сызықтық дерлік теңдеулердің шешімдерінің ішінде сондай қисық табылуы мүмкін екенін және берілген бағыт бойынша сол қисық арқылы өткенде шешімнің немесе оның кіші туындыларының үзілісті болатынын ескерте кетейік. Мұндай шешімге тиісті қисықтарды ***күшті үзілісті қисықтар*** (линии сильных разрывов) немесе ***соққы толқындары*** (ударные волны) деп атайды.

Қорытынды: жоғарыдағы ұғымдардан кейін екінші ретті сызықтық дерлік теңдеудің характеристикаларын енгізейік. Алдымен $u(x, y)$ функциясына қатысты келесі теңдеуді қарастырайық.

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} = f , \qquad (1.17)$$

мұнда

$$a_{ij} = a_{ij}\left(x, y, u, u_x, u_y\right) \text{ және } f = f\left(x, y, u, u_x, u_y\right); i, j = 1,2 .$$

XOY жазықтығының қандайда бір *G* облысында екі рет үзіліссіз дифференциалданатын $u(x, y)$ функциясы (1.17) теңдеуінің шешімі болсын. Сонымен қатар *G* облысында $y = y(x)$ теңдеуімен анықталған және әрбір нүктесінде вертикаль жанамасы болмайтын Γ тегіс қисығы берілсін делік.

Γ қисығында (1.17) теңдеуінің шешімі және оның бірінші ретті туындыларының мәндері белгілі деп санайық.

$$u\big|_{\Gamma} = \alpha(x), \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{\Gamma} = \beta(x), \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{\Gamma} = \gamma(x). \qquad (1.18)$$

Төмендегі түрдегі есептің қойылымын қарастырайық: Γ қисығының бойындағы кез келген $M(x, y) \in \Gamma$ нүктесіндегі теңдеудің $u(x, y)$ шешімінің екінші ретті дербес туындыларының мәндерін тап:

$$u_{xx}\big|_M, u_{xy}\big|_M, u_{yy}\big|_M .$$

Егер бұл мәндер табылатын болса, онда Γ қисығының төңірегінде жатқан нүктелерде берілген теңдеудің шешімінің мәндерін табуға болады. Өйткені бұл жағдайда өзара жақын орналасқан $M(x,y)\in\Gamma$ және M' нүктелері үшін келесі қатынас орынды:

$$u_{M'}=u_M+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M\Delta x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M\Delta y+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_M\Delta x^2+$$
$$+2\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right|_M\Delta x\Delta y+\left.\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right|_M\Delta y^2$$

Бұл қатынас (1.17) теңдеуінің шешімінің M' нүктесіндегі мәнін екінші ретті деңгейге дейінгі дәлдікпен жуықтап табуға болатынын көрсетеді.

Сонымен екінші ретті туындылардың мәндері (1.17) теңдеуімен және $du_x=u_{xx}dx+u_{xy}dy,\quad du_y=u_{yx}dx+u_{yy}dy$ дифференциалдық арақатынастарымен байланысты. Γ қисығында du_x және du_y мәндері (1.18) шарттары бойынша белгілі: $du_x\big|_\Gamma=\beta'(x)dx, du_y\big|_\Gamma=\gamma'(x)dx$.

Демек u_{xx},u_{xy},u_{yy} дербес туындыларының Γ қисығындағы мәндерін табу үшін үш сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}=f, \\ dxu_{xx}+dyu_{xy}=du_x, \\ dxu_{xy}+dyu_{yy}=du_y. \end{cases} \qquad (1.19)$$

Бұл жүйенің анықтауышы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & 2a_{12} & a_{22} \\ dx & dy & 0 \\ 0 & dx & dy \end{vmatrix}=a_{11}dy^2-2a_{12}dxdy+a_{22}dx^2.$$

Шеткі екі жағдайын қарастырайық:

1) Γ қисығының бойындағы барлық нүктелерде $\Delta\neq 0$;
2) Γ қисығының бойындағы барлық нүктелерде $\Delta=0$.

Бірінші жағдайда екінші ретті u_{xx},u_{xy},u_{yy} туындылары бірмәнді анықталады, өйткені Γ қисығының бойындағы әрбір нүктеде $\Delta\neq 0$. Яғни (1.19) жүйесінің тек бір ғана шешімі болады.

Екінші жағдайда (1.17) теңдеуінің қандайда бір G облысында шешімі табылады деп ұйғарылғандықтан (1.19) - жүйе үйлесімді, демек Γ қисығының бойындағы әрбір нүктеде Δ бас анықтауышымен қатар қосалқы Δ_1, Δ_2, Δ_3 анықтауыштары да нөлге тең.

Яғни

$$\Delta=\Delta_1=\Delta_2=\Delta_3=0. \qquad (1.20)$$

Бірақ бұл жағдайда жүйенің шексіз көп шешімдер жиыны бар. Сонымен екінші жағдайда екінші ретті u_{xx},u_{xy},u_{yy} дербес туындылар Γ қисығының әрбір нүктесінде анықталған шешімнің және оның сол

нүктелердегі бірінші ретті дербес туындыларының мәндері арқылы бір мәнді анықталмайды.
Мұндай Γ қисығы (1.17) теңдеуінің шешіміне тиісті характеристикасы, ал

$$\Delta \equiv a_{11}dy^2 - 2a_{12}dydx + a_{22}dx^2 = 0 \qquad (1.21)$$

теңдеуі характеристикалық теңдеу деп аталады. (1.21) теңдеуін $\dfrac{dy}{dx} = \lambda$ қатысты шешейік:

$$\lambda_{1/2}\left(x, y, u, u_x, u_y\right) = \frac{a_{12} \pm \sqrt{a_{12}^2 - a_{11}a_{22}}}{a_{11}}.$$

G облысында (1.17) теңдеуінің нақтылы шешімі белгілі деп санайық, онда сол облыста u_x, u_y туындылары да табылады. Сонда характеристикалық теңдеудің λ_1, λ_2 түбірлері аргументтері тек *x* пен *y* - ке байланысты $f_1(x, y)$ және $f_2(x, y)$ функциялары болады.

Егер *G* облысының қандайда бір $M(x_0, y_0)$ нүктесінде дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ болса, онда сол нүктеде (1.17) теңдеуі гиперболалық типке; ал $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$ болса, онда сол нүктеде (1.17) теңдеуі параболалық типке; ал $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ болса, онда сол нүктеде (1.17) теңдеуі эллипстік типке жатады.

Егер *XOY* жазықтығының қандайда бір ішкі облысының әрбір нүктесінде (1.17) теңдеуі гиперболалық (параболалық, эллипстік) типке жатса, онда (1.17) - теңдеу сол облыста гиперболалық (параболалық, эллипстік) теңдеу деп аталады.

(1.20) - теңдікке қайта оралайық. Жоғарыда айтылғандай бұлардың ішінде тек екеуі ғана тәуелсіз, мысалы $\Delta = 0, \Delta_1 = 0$. Біріншісі $\Delta = 0$ характеристикалық теңдеу. Екіншісі $\Delta_1 = 0$ характеристикада орындалатын дифференциалдық арақатынасты көрсетеді. $\Delta_1 = 0$ анықтауышын ашсақ,

$$\begin{vmatrix} f & 2a_{12} & a_{22} \\ du_x & dy & 0 \\ du_y & dx & dy \end{vmatrix} = fdy^2 + a_{22}dxdu_x - a_{22}dydu_y - 2a_{12}dydu_x = 0$$

теңдігін аламыз.

Кеңістікте берілген қандайда бір беттің бойындағы барлық нүктелерде екінші ретті (1.17) д.т.диф. теңдеуінің шешімінің екінші ретті туындылары үзілісті, ал бұл шешімнің өзі және оның бірінші ретті туындылары үзіліссіз болса, онда ол бетті шешімге тиісті характеристикасы деп атайды (геометриялық мағынасы). Басқаша айтқанда ***әлсіз бос шешімнің геометриялық беті*** – характеристика.

Мысал қарастырайық. Қалыптасқан жазық газ ағыны теңдеуінің типін анықта.

$$\left(a^2 - u_x^2\right)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + \left(a^2 - u_y^2\right)u_{yy} = 0,$$

мұнда $u(x,y)$ функциясы жылдамдықтар потенциалы, $\vec{V} = gradu = \{u_x, u_y\}$, ал a – сол ортадағы дыбыс жылдамдығы. Теңдеудің дискриминантын құрайық.

$$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = (u_x u_y)^2 - (a^2 - u_x^2)(a^2 - u_y^2) =$$
$$= a^2(u_x^2 + u_y^2 - a^2) = a^2\left(\left|\vec{V}\right|^2 - a^2\right)$$

Бұдан газ динамикасының теңдеуі дыбыс жылдамдығына дейінгі облыста ($\left|\vec{V}\right| < a$) эллипстік типке, дыбыстан асқан жылдамдықтағы облыста ($\left|\vec{V}\right| > a$) гиперболалық типке, ал осы облыстарды бөлу бетінде параболалық типке жататыны шығады.

Екі тәуелсіз айнымалыға қатысты екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді канондық түрге келтіру

$G \subset R^2$ облысында жоғарғы туындыларына қатысты екінші ретті сызықтық д.т.диф.т. қарастырайық:

$$a_{11}(x,y)u_{xx} + 2a_{12}(x,y)u_{xy} + a_{22}(x,y)u_{yy} + g(x,y,u,u_x,u_y) = 0, \tag{1.22}$$

мұнда $a_{ij} = a_{ij}(x,y)$ G облысында берілген екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функциялар, қысқаша $a_{ij}(x,y) \in C^2(G)$, $g(x,y,u,u_x,u_y)$ - берілген функция.

Сонымен қатар G облысының кез-келген нүктесінде a_{ij} коэффициенттері бір мезгілде нөлге тең емес деп ұйғарайық. Яғни: $\forall x \in G\ |a_{11}(x,y)| + |a_{12}(x,y)| + |a_{22}(x,y)| > 0$.

(x,y) айнымалыларының орнына жаңа тәуелсіз (ξ,η) айнымалыларын енгізейік:

$$\begin{cases} \xi = \xi(x,y), \\ \eta = \eta(x,y), \end{cases} \tag{1.23}$$

мұнда $\xi(x,y), \eta(x,y) \in C^2(G)$ және G облысында түрлендіру якобианы нөлден өзгеше:

$$J = \frac{D(\xi,\eta)}{D(x,y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial x} & \dfrac{\partial\xi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial\eta}{\partial x} & \dfrac{\partial\eta}{\partial x} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{1.24}$$

Сонда (1.23) жүйесінен x пен y - ті бірмәнді табуға болады және $x = x(\xi,\eta), y = y(\xi,\eta)$ функциялары $C^2(G)$ жатады.

$u(x,y)\in C^2(G)$ жатсын және күрделі функцияны дифференциалдау теоремаларына сай $u(x,y)$ функциясының дербес туындыларын жаңа айнымалылары бойынша табайық:

$$\left[\begin{array}{l} u_x = u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x, \\ u_y = u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y, \\ u_{xx} = u_{\xi\xi}\xi_x^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x + u_{\eta\eta}\eta_x^2 + u_\xi \xi_{xx} + u_\eta \eta_{xx}, \\ u_{xy} = u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y + u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y + \eta_x\xi_y\right) + u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y + u_\xi \xi_{xy} + u_\eta \eta_{xy}, \\ u_{yy} = u_{\xi\xi}\xi_y^2 + 2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y + u_{\eta\eta}\eta_y^2 + u_\xi \xi_{yy} + u_\eta \eta_{yy}. \end{array}\right. \qquad (1.25)$$

Бұл өрнектерді (1.22) теңдеуіне қойып, ұқсас мүшелерін біріктіргеннен соң,

$$\bar{a}_{11}(\xi,\eta)u_{\xi\xi} + 2\bar{a}_{12}(\xi,\eta)u_{\xi\eta} + \bar{a}_{22}(\xi,\eta) + \bar{g}\left(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta\right) = 0 \qquad (1.26)$$

теңдеуін аламыз. Мұнда

$$\left[\begin{array}{l} \bar{a}_{11}(\xi,\eta) = a_{11}\xi_x^2 + 2a_{12}\xi_x\xi_y + a_{22}\xi_y^2, \\ \bar{a}_{12}(\xi,\eta) = a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y, \\ \bar{a}_{22}(\xi,\eta) = a_{11}\eta_x^2 + 2a_{12}\eta_x\eta_y + a_{22}\eta_y^2. \end{array}\right.$$

Тікелей орнына қойып,

$$\bar{a}_{12}^2 - \bar{a}_{11}\bar{a}_{22} = \left(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}\right)\left(\xi_x\eta_y - \xi_y\eta_x\right)^2 = D\cdot J^2$$

теңдігінің дұрыстығын тексеруді оқушыларға ұсынамыз. Бұдан (1.23) және (1.24) түрлендірулерінің теңдеудің типін ауыстырмайтынын көруге болады. Негізгі мақсат (1.22) теңдеуінің жалпы интегралын табу. Ол үшін алдымен теңдеуді қарапайым түрге келтіріп, оның классификациясын құру керек. Сондықтан келесі есептің құрылымын қарастырайық: алынған (1.26) теңдеуін қарапайым түрге келтіру үшін ξ және η айнымалыларын қандай түрде таңдап алуға болады. (1.26) теңдеуінің қарапайым түрі деп $\bar{a}_{11}(\xi,\eta), \bar{a}_{12}(\xi,\eta), \bar{a}_{22}(\xi,\eta)$ коэффициенттерінің ең болмағанда біреуінің нөлге айналуын айтайық. Ал $\bar{a}_{11}(\xi,\eta)$ және $\bar{a}_{22}(\xi,\eta)$ коэффициенттерінің нөлге айналуы $a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_xz_y + a_{22}z_y^2 = 0$ бірінші ретті д.т.диф. теңдеудің шешімділігімен парапар екенін ескерейік.

Сызықтық дерлік теңдеуге қатысты алынған (1.21) характеристикалық теңдеуіне сүйене отырып, төмендегідей үш жағдай қарастырамыз.

Ескерту. Сызықтық теңдеудің характеристикалық теңдеуіндегі коэффициенттер тек тәуелсіз айнымалы x пен y - тің функциялары.

Бірінші жағдай: *гиперболалық типке жататын теңдеулер*. Айталық, (1.22) теңдеуі G_0 аймағында $\left(G_0 \subseteq G\right)$ гиперболалық типке жатсын. Онда дискриминант $D = a_{12}^2 - a_{11}a_{22} > 0$ болады. Ал (1.26) теңдеуін қарапайым түрге келтіру үшін $\bar{a}_{11}(\xi,\eta), \bar{a}_{12}(\xi,\eta), \bar{a}_{22}(\xi,\eta)$ коэффициенттерінің ең болмағанда біреуі нөлге тең болу керек. Мұндай мүмкіншілік тек бір жағдайда ғана орындалады:

$$\bar{a}_{11}(\xi,\eta)=\bar{a}_{22}(\xi,\eta)=0, \bar{a}_{12}(\xi,\eta)\neq 0 .$$

Демек,

$$a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0,$$

$$a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2=0$$

қатынастары орындалатындай $\xi(x,y)$ және $\eta(x,y)$ функцияларын табу керек.

Ол үшін $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}-\sqrt{D}}{a_{11}}$ және $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}+\sqrt{D}}{a_{11}}$ жай дифференциалдық теңдеулерінің жалпы интегралдарын $\xi(x,y)$ және $\eta(x,y)$ функциялары ретінде аламыз. Сонда (1.26) теңдеуі канондық (қарапайым) түрде жазылады

$$u_{\xi\eta}+\frac{1}{2\bar{a}_{12}}\bar{g}(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)=0 . \qquad (1.27)$$

Теңдеудің гиперболалық типке жататын басқа да канондық түрі жиі қолданылады. Оған келу үшін (1.27) теңдеуінде тәуелсіз айнымалыларды алмастырайық:

$$\xi=\rho+\sigma, \eta=\rho-\sigma .$$

Бұдан

$$\rho=\frac{1}{2}(\xi+\eta), \ \sigma=\frac{1}{2}(\xi-\eta),$$

$$u_\xi=u_\rho\rho_\xi+u_\sigma\sigma_\xi=\frac{1}{2}(u_\rho+u_\sigma), \ u_{\xi\eta}=\frac{1}{4}(u_{\rho\rho}-u_{\sigma\sigma}),$$

Сонда (1.27) теңдеуі $u_{\rho\rho}-u_{\sigma\sigma}+g_1(\rho,\sigma,u,u_\rho,u_\sigma)=0$ түріне келеді.

Екінші жағдай: *параболалық типке жататын теңдеулер*. Теңдеудің параболалық шартынан $a_{12}^2-a_{11}a_{22}=0$ және $\bar{a}_{12}^2-\bar{a}_{11}\bar{a}_{22}=0$ теңдіктерін аламыз. Бұл теңдіктер екінші ретті туындылардың тек біреуінің коэффициенті нөлден өзгеше жағдайда орындалады. Мысалы:

$$\bar{a}_{11}=\bar{a}_{12}=0, \ \bar{a}_{22}\neq 0.$$

$\bar{a}_{11}=0$ шартынан: $a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2=0$ және $a_{12}=\sqrt{a_{11}}\sqrt{a_{22}}$ теңдігін ескере отырып, оны келесі түрде жазайық:

$$\left(\sqrt{a_{11}}\xi_x+\sqrt{a_{22}}\xi_y\right)^2=0 \Rightarrow \sqrt{a_{11}}\frac{\partial\xi}{\partial x}+\sqrt{a_{22}}\frac{\partial\xi}{\partial y}=0 .$$

$\xi(x,y)$ функциясы үшін $D=0$ жағдайында характеристикалық теңдеудің $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$ жалпы интегралын алайық. Ал $\eta(x,y)$ функциясы үшін түрлендірудің якобианы нөлден өзгеше болатын кез келген $\eta(x,y)\in C^2(G_0)$ функциясын алуға болады. Өйткені $\bar{a}_{12}=0$ шартынан

$$a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + a_{22}\xi_y\eta_y =$$
$$= \left(\sqrt{a_{11}}\xi_x + \sqrt{a_{22}}\xi_y\right)\left(\sqrt{a_{11}}\eta_x + \sqrt{a_{22}}\eta_y\right) = 0$$

Ал соңғы теңдік кез келген $\eta(x, y)$ үшін орынды. Сонымен бұл жағдайда (1.26) теңдеуінің канондық теңдеуін $u_{\eta\eta} + \overline{g}_2\left(\xi, \eta, u, u_\xi, u_\eta\right) = 0$ түрінде аламыз.

Үшінші жағдай: *эллипстік типке жататын теңдеулер*. Теңдеудің эллипстік шартынан $\overline{a}_{12}^2 - \overline{a}_{11}\overline{a}_{22} < 0$, $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ теңсіздіктері орынды. Бұдан екінші ретті туындылардың коэффициенттерінің ішінен екеуі бірдей нөлге тең еместігі шығады. Демек теңдеудің ең қарапайым түрін $\overline{a}_{12} = 0$ және $\overline{a}_{11} = \overline{a}_{22} \neq 0$ шарттарынан алуға болады.

(1.21) характеристикалық теңдеуін $D < 0$ шартына сай түрлендірейік:

$$\frac{1}{a_{11}}\left[a_{11}dy - \left(a_{12} + i\sqrt{-D}\right)dx\right]\left[a_{11}dy + \left(a_{12} + i\sqrt{-D}\right)dx\right] = 0\,.$$

Өйткені $-D > 0$. Демек эллипстік типке жататын теңдеудің тек кешендік характеристикалары болады. Бұдан (1.21) теңдеуін канондық түріне алып келетін $\xi(x, y)$ және $\eta(x, y)$ айнымалылары өзара кешендік түйіндес болады. Оларды $\xi = \varphi(x, y) + i\psi(x, y)$, $\eta = \varphi(x, y) - i\psi(x, y)$ түрінде жазайық, мұнда $\varphi(x, y)$ және $\psi(x, y)$ функциялары – нақты. Содан соң тағы бір $\xi = \rho + i\sigma, \eta = \rho - i\sigma$ алмастыруын жасап,

$$\rho = \frac{1}{2}(\xi + \eta) = \varphi(x, y),\ \sigma = \frac{1}{2i}(\xi - i\eta) = \psi(x, y)$$
$$u_\xi = \frac{1}{2}u_\rho + \frac{1}{2i}u_\sigma,\ u_{\xi\eta} = \frac{1}{4}\left(u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma}\right),$$

түрлендірулерін орындап, ақырында эллипстік типке жататын теңдеудің канондық түрін аламыз

$$u_{\rho\rho} + u_{\sigma\sigma} + \overline{g}_3\left(\rho, \sigma, u, u_\rho, u_\sigma\right) = 0\,.$$

Тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықтық д.т.диф.т. барлық характеристикалары түзулер болғандықтан бұдан да әрі оны ықшам түрде жазуға болады.

Сонымен теңдеулерді келесі канондық түрлерге алып келдік:

гиперболалық типке жататын теңдеу

$$u_{\xi\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \qquad (1.28)$$

параболалық типке жататын теңдеу

$$u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \qquad (1.29)$$

эллипстік типке жататын теңдеу

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \beta_1 u_\xi + \beta_2 u_\eta + \gamma u = f(\xi, \eta), \qquad (1.30)$$

мұнда β_1, β_2 және γ коэффициенттері – тұрақтылар. Алдымен барлық теңдеулерге ортақ талдау жасаймыз. Содан кейін әрқайсысын жеке қарастырамыз.

Енді біздің координаттарға тиісуге құқымыз жоқ, өйткені тәуелсіз $\xi(x,y),\eta(x,y)$ координаттарын енгізе отырып (1.28), (1.29) және (1.30) канондық теңдеулерін алдық. Тек белгісіз $u(\xi,\eta)$ функциясын түрлендіріп тағы бір ықшам канондық түрге көшуге болады. Жаңа $v(\xi,\eta)$ функциясына

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)e^{\mu\xi+\upsilon\eta}$$

формуласы арқылы көшейік. Мұнда μ және υ әзірге кез келген сандар. Сонда теңдеудің құрамына кіретін туындылар:

$$u_\xi=(v_\xi+\mu v)e^{\mu\xi+\upsilon\eta},\quad u_\eta=(v_\eta+\upsilon v)e^{\mu\xi+\upsilon\eta},$$
$$u_{\xi\xi}=(v_{\xi\xi}+2\mu v_\xi+\mu^2 v)e^{\mu\xi+\upsilon\eta},$$
$$u_{\eta\eta}=(v_{\eta\eta}+2\upsilon v_\eta+\upsilon^2 v)e^{\mu\xi+\upsilon\eta},$$
$$u_{\xi\eta}=(v_{\xi\eta}+\mu v_\eta+\upsilon v_\xi+\mu\upsilon v)e^{\mu\xi+\upsilon\eta}.$$

Функцияны және оның туындыларын гиперболалық типтес (1.28) теңдеуіне қоялық:

$$v_{\xi\eta}+(\beta_1+\upsilon)v_\xi+(\beta_2+\mu)v_\eta+(\gamma+\mu\upsilon+\mu\beta_1+\upsilon\beta_2)v= \\ = f(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta} \tag{1.31}$$

Бұл жерде кез келген μ және υ сандарын (1.31) теңдеуіндегі $v(\xi,\eta)$ функциясының бірінші ретті дербес туындыларынан құтылу үшін пайдаланайық. Яғни $\beta_1+\upsilon=0$ және $\beta_2+\mu=0$ деп санайық. Нәтижесінде

$$v_{\xi\eta}+\gamma_1 v=f_1(\xi,\eta)$$

теңдеуін аламыз. Мұнда $\gamma_1=\gamma-\beta_1\beta_2,\ f_1(\xi,\eta)=f(\xi,\eta)e^{\beta_1\xi+\beta_2\eta}$

Осыған ұқсас алмастыруларды параболалық типтес (1.29) теңдеуіне қойсақ,

$v_{\eta\eta}+\beta_1 v_\xi+(\beta_2+2\upsilon)v_\eta+(\gamma+\mu\beta_1+\upsilon\beta_2+\upsilon^2)v=f(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}$ Бұл жерде $\mu=\dfrac{\left(\beta_2^2/4-\gamma\right)}{\beta_1}$ және $\upsilon=-\beta_2/2$ деп алып, v_η және v - дан құтыламыз. Нәтижесінде

$$v_{\eta\eta}+\beta_1 v_\xi=f_2(\xi,\eta)$$

теңдеуін аламыз. Ақырында эллипстік типтес теңдеу үшін $\mu=-\beta_1/2$ және $\upsilon=-\beta_2/2$ деп алып, $v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\gamma_1 v=f_3(\xi,\eta)$ теңдеуіне көшеміз, өйткені

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+(\beta_1+2\mu)v_\xi+(\beta_2+2\upsilon)v_\eta+ \\ +(\gamma+\mu\beta_1+\upsilon\beta_2+\mu^2+\upsilon^2)v=f(\xi,\eta)e^{-\mu\xi-\upsilon\eta}.$$

Мұнда $\gamma_1=\gamma-\dfrac{1}{4}(\beta_1^2+\beta_2^2)$.

Мысал. Теңдеуді канондық түрге келтір:

$$\sin^2 x u_{xx}-2y\sin x u_{xy}+y^2 u_{yy}=0. \tag{1.32}$$

Шешімі. Кез келген $(x,y)\in R^2$ үшін $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=y^2\sin^2 x-y^2\sin^2 x=0$. Олай болса R^2 жазықтығында (1.32) теңдеуі параболалық типке жатады. Характеристикалық теңдеуін құрайық:

$$\sin^2 xdy^2+2y\sin xdxdy+y^2dx^2=0,$$

бұдан $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{y}{\sin x}$, $\sin x\neq 0,\ x\neq \pi k,\ k\in Z$. Соңғы теңдеудің айнымалыларын ажыратып, жалпы интегралын табайық: $y\cdot tg\dfrac{x}{2}=C,\ C=const$. Теория бойынша жаңа $\xi(x,y)$ айнымалысы үшін характеристикалық теңдеудің жалпы интегралын, яғни $\xi(x,y)=y\cdot tg\dfrac{x}{2}$. Ал $\eta(x,y)$ үшін түрлендірудің якобианы нөлден өзгеше кез келген функциясын алуға болады, айталық: $\eta(x,y)=y$ болсын. Төмендегі формулалардың көмегімен u_{xx}, u_{xy} және u_{yy} туындыларын табайық.

$$\begin{cases} u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u_\xi\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}, \\ u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}\left(\xi_x\eta_y+\eta_x\xi_y\right)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}, \\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_\eta\eta_{yy} \end{cases}$$

және

$$\xi=ytg\frac{x}{2},\ \xi_x=\frac{y}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ \xi_y=tg\frac{x}{2},\ \xi_{xx}=\frac{y\sin\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}},$$

$$\xi_{xy}=\frac{1}{2\cos^2\frac{x}{2}},\ \xi_{yy}=0,$$

$$\eta=y,\ \eta_x=0,\ \eta_y=1,\ \eta_{xx}=\eta_{xy}=\eta_{yy}=0$$

теңдіктерін ескере отырып, табылған дербес туындыларды бастапқы теңдеуге қойсақ, $y^2u_{\eta\eta}-\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\left(1-\sin^2\frac{x}{2}\right)}{\cos\frac{x}{2}}u_\xi=0$ теңдеуіне келеміз. Соңғы теңдеуді түрлендіріп канондық түрін табамыз:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2}-\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial\xi}=0,\ \xi=ytg\frac{x}{2},\ \eta=y.$$

Мысал. Теңдеуді канондық түрге келтір:

$$u_{xx}-2\sin xu_{xy}-\cos^2 xu_{yy}-\cos xu_y=0. \qquad (1.33)$$

Шешімі. Кез келген $(x,y)\in R^2$ үшін дискриминант $D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=\sin^2 x+\cos^2 x>0$ болсын. Олай болса екі өлшемді жазықтықтың әрбір нүктесінде теңдеу гиперболалық типке жатады. Характеристикалық теңдеуін құрайық:

$$(dy)^2+2\sin x dx dy-\cos^2 x(dx)^2=0,$$

бұдан

$$\frac{dy}{dx}=-1-\sin x,\ \frac{dy}{dx}=1-\sin x.$$

Жалпы интегралын табайық:

$$x+y-\cos x=C_1 \text{ және } x-y+\cos x=-C_2.$$

Жаңа айнымалылар енгізейік:

$$\xi=x+y-\cos x,\ \eta=x-y+\cos x.$$

(1.25) - формулалар негізінде $u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}$ туындыларын тауып, (1.33) теңдеуіне қоялық:

$$\begin{aligned}&u_{\xi\xi}(1+\sin x)^2+2u_{\xi\eta}\left(1-\sin^2 x\right)+u_{\eta\eta}(1-\sin x)^2+u_\xi\cos x-u_\eta\cos x-\\&-\cos^2 x\left(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}\right)-2\sin x\left(u_{\xi\xi}(1+\sin x)-2\sin x u_{\xi\eta}-u_{\eta\eta}(1-\sin x)\right)-\\&-\cos x\left(u_\xi-u_\eta\right)=u_{\xi\xi}\left[(1+\sin x)^2-\cos^2 x-2\sin x(1+\sin x)\right]+\\&+2u_{\xi\eta}\left[\left(1-\sin^2 x\right)+\cos^2 x+2\sin^2 x\right]+u_{\eta\eta}\left[(1-\sin x)^2-\cos^2 x+2\sin x(1-\sin x)\right]-\\&-\left(u_\xi-u_\eta\right)\cos x+\left(u_\xi-u_\eta\right)\cos x=0.\end{aligned}$$

Бұдан квадрат жақшаның ішіндегі өрнектерді есептеп,

$$u_{\xi\eta}=0 \tag{1.34}$$

теңдеуін аламыз. Соңғы теңдеу айқын түрде оңай интегралданады. Сондықтан (1.33) теңдеуінің барлық дербес шешімдерін қамтитын формуланы (1.34) теңдеуінің жалпы шешімінен аламыз. (1.34) теңдеуінің жалпы шешімі

$$u(\xi,\eta)=f(\xi)+g(\eta)$$

формуласымен анықталады. Бұл формулада ескі *(x,y)* айнымалыларына қайта оралсақ, онда бастапқы теңдеудің жалпы шешімін табамыз. Сонымен

$$u(x,y)=f(x+y-\cos x)+g(x-y+\cos x),$$

мұнда $f,g\in C^2\left(R^2\right)$.

Ескерту. Көп жағдайда гиперболалық типтес теңдеулерді канондық түрге келтіру осы типтес теңдеулерді интегралдаудың бір тәсілі екенін атап өтейік.

Мысал. Тұрақты коэффициентті екінші ретті д.т.диф.т. канондық түрге келтір:

$$u_{xx}+2u_{xy}+5u_{yy}-32u=0. \tag{1.35}$$

Шешімі.

$$D=a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4-5=-1<0.$$

Демек, (1.35) - теңдеу эллипстік типке жатады. Характеристикалық теңдеуін құрайық: $dy^2-2dydx+5dx^2=0$. Бұдан $\frac{dy}{dx}=1+2i$ және

$\frac{dy}{dx} = 1 - 2i$. Жаңа айнымалылар енгізейік: $\xi = y - x,\ \eta = 2x$ деп алып, u_{xx}, u_{xy} және u_{yy} туындыларын табайық.

$$u_{xx} = u_{\xi\xi} - 4u_{\xi\eta} + 4u_{\eta\eta},\ u_{xy} = -u_{\xi\xi} + 2u_{\xi\eta} \text{ және } u_{yy} = u_{\xi\xi}$$

табылған мәндерді (1.35) - теңдеуге қойып, канондық теңдеуге көшейік.

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - 8u = 0,$$

мұнда

$$\xi_x = -1,\ \eta_x = 2,\ \xi_y = 1,\ \eta_y = 0.$$

n тәуелсіз айнымалыға қатысты екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық дербес туындылы дифференциалдық теңдеуді канондық түрге келтіру

Екінші ретті сызықтық теңдеуді қарастырайық:

$$Lu \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x) u_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) u_{x_i} + c(x)u(x) = f(x), \quad (1.36)$$

мұнда $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n, n \geq 2$ және $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$.

Бұл тақырыптың негізгі мақсаты G облысында (1.36) теңдеуінің классификациясын құру және мүмкіндігінше шешу жолдарын көрсету. Осы мақсатта x_0 нүктесін кез келген, бірақ G облысында бекітілген нүкте, деп санайық.

Енді (1.36) теңдеуінің характеристикалық квадраттық формасын құрайық:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x_0) \lambda_i \lambda_j. \quad (1.37)$$

Сонымен қатар (1.37) квадраттық формасын $\lambda_i = \lambda_i(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n),\ i = \overline{1,n}$ ерекше емес сызықтық түрлендірудің көмегімен канондық түрге келтірілетіні алгебра курсынан белгілі:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \xi_i^2,\ \ \alpha_i \in \{-1, 0, -1\}.$$

Бұл канондық (немесе қалыпты) формадағы оң, теріс және нөлге тең коэффициенттерінің саны инерция заңы бойынша осы ерекше емес сызықтық түрлендірудің инварианттары болады.

Анықтама. Егер барлық $\alpha_i = 1$ немесе $\alpha_i = -1$ тең болса, яғни теңдеудің квадраттық формасы оң немесе теріс анықталса, онда (1.36) д.т.диф. теңдеуі $x_0 \in G$ нүктесінде ***эллипстік*** деп аталады.

Егер α_i коэффициенттерінің ішінде тек біреуі теріс, ал қалғандарының бәрі оң (немесе керісінше) болса, онда д.т.диф. теңдеу $x_0 \in G$ нүктесінде ***гиперболалық*** деп аталады.

Егер α_i коэффициенттерінің ішінде $l(1<l<n-1)$ оң, ал қалған $(n-l)$ - і теріс болса, онда д.т.диф. теңдеу $x_0 \in G$ нүктесінде ***ультра гиперболалық*** деп аталады.

Егер α_i коэффициенттерінің ішінде ең болмағанда біреуі ғана нөлге тең болса, онда д.т.диф. теңдеу $x_0 \in G$ нүктесінде ***параболалық*** деп аталады.

Мысал. Теңдеуді канондық түрге келтір:

$$u_{xy} - 2u_{xz} + u_{yz} + u_x + \frac{1}{2}u_y = 0.$$

Шешімі. Бұл үш тәуелсіз айнымалыға қатысты екінші ретті тұрақты коэффициентті сызықтық д.т.диф.т.

1-қадам. Теңдеудің характеристикалық квадраттық формасын құрайық:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3.$$

Канондық түрге келтіру үшін Лагранж алгоритмін қолданамыз:

$$Q(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \lambda_1\lambda_2 - 2\lambda_1\lambda_3 + \lambda_2\lambda_3 = \left| \begin{array}{l} \nu_1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ \nu_2 = \lambda_1 - \lambda_2 \\ \nu_3 = \lambda_3 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - (\nu_1 + \nu_2)\nu_3 + \frac{1}{2}(\nu_1 - \nu_2)\nu_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - \nu_2^2\right) - \frac{1}{2}\nu_1\nu_3 - \frac{3}{2}\nu_2\nu_3 =$$

$$= \frac{1}{4}\left(\nu_1^2 - 2\nu_1\nu_3 + \nu_3^2\right) - \frac{1}{4}\left(\nu_2^2 + 6\nu_2\nu_3 + 9\nu_3^2\right) + 2\nu_3^2 =$$

$$= \frac{1}{4}(\nu_1 - \nu_3)^2 - \frac{1}{4}(\nu_2 + 3\nu_3)^2 + 2\nu_3^2 = \mu_1^2 - \mu_2^2 + \mu_3^2,$$

мұнда $\begin{cases} \mu_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3), \\ \mu_2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2 + 3\lambda_3), \\ \mu_3 = \sqrt{2}\lambda_3. \end{cases}$ матрицалық түрде

$$\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \mu_3 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \lambda_3 \end{pmatrix} \text{ немесе } [\mu] = [A][\lambda].$$

2-қадам.

$[\lambda] = \left[A^{-1}\right][\mu]$ немесе ашып жазсақ:

$$\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\\ \lambda_3\end{pmatrix}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & A_{31}\\ A_{12} & A_{22} & A_{32}\\ A_{13} & A_{23} & A_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\\ \mu_3\end{pmatrix},$$

мұнда кері матрица

$$A^{-1}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{1}{2} & -1 & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}.$$

3-қадам. Жаңа айнымалылар енгізейік:

$$\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\\ \zeta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \sqrt{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} \text{ сонда } \begin{cases}\xi=x+y,\\ \eta=x-y,\\ \zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x+2y+z).\end{cases}$$

Жаңа айнымалыларды бастапқы теңдеуге қою үшін $v(\xi,\eta,\zeta)=u(x,y,z)$ деп алайық, және $u_x, u_y, u_{xy}, u_{xz}, u_{yz}$ дербес туындыларын күрделі $v(\xi(x,y,z),\eta(x,y,z),\zeta(x,y,z))$ функциясының туындылары ретінде табайық:

$$u_x=v_\xi+v_\eta-\frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta,\ u_y=v_\xi-v_\eta+\sqrt{2}v_\zeta;$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}\cdot(-1)+v_{\eta\xi}\cdot 1-v_{\eta\eta}+$$

$$u_x=v_\xi+v_\eta-\frac{\sqrt{2}}{2}v_\zeta,\ u_y=v_\xi-v_\eta+\sqrt{2}v_\zeta;$$

$$u_{xy}=v_{\xi\xi}+v_{\xi\eta}\cdot(-1)+v_{\eta\xi}\cdot 1-v_{\eta\eta}+$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\xi}\cdot 2+v_{\eta\zeta}\cdot 2\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\zeta\xi}-v_{\zeta\eta}+\sqrt{2}v_{\zeta\zeta}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_{xy}=v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}+3v_{\eta\zeta}\right);$$

$$u_{xz}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}+v_{\eta\zeta}\right)-\frac{1}{2}v_{\zeta\zeta};$$

$$u_{yz}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}-v_{\eta\zeta}\right)+v_{\zeta\zeta}.$$

Табылған туындыларды бастапқы теңдеудің сол жағына қойып, ұқсас мүшелерін біріктіргеннен соң канондық теңдеуге көшеміз

$$u_{xy}-2u_{xz}+u_{yz}+u_x+\frac{1}{2}u_y=\left(v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}-v_{\zeta\zeta}+\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}+3v_{\eta\zeta}\right)\right)-$$

$$-2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}+v_{\eta\zeta}\right)-\frac{1}{2}v_{\zeta\zeta}\right)+$$

$$+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\left(v_{\xi\zeta}-v_{\eta\zeta}\right)+v_{\zeta\zeta}\right)+\left(v_{\xi}+v_{\eta}-\frac{\sqrt{2}}{2}v_{\zeta}\right)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(v_{\xi}-v_{\eta}+\sqrt{2}v_{\zeta}\right)=v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+{}^{3}\!/_{2}\,v_{\xi}+\frac{1}{2}v_{\eta}.$$

Жауабы. Теңдеу гиперболалық типке жатады, өйткені квадраттық форманың тек бір коэффициенті теріс, ал қалған екеуі оң. Сонымен

$$v_{\xi\xi}-v_{\eta\eta}+v_{\zeta\zeta}+{}^{3}\!/_{2}\,v_{\xi}+\frac{1}{2}v_{\eta}=0,$$

мұнда $\xi=x+y,\ \eta=x-y,\ \zeta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x+2y+z\right).$

Ескерту. Квадраттық форманы қалыпты түрге алып келетін түрлендіру бірмәнді анықталмағандықтан, бастапқы теңдеуді канондық теңдеуге келтіретін жаңа айнымалыларды енгізу тәсілі де бірмәнді анықталмайды. Сондықтан дұрыс жауап көп. Бірақ дұрыстығын тексерерде квадраттық форманың сигнатурасы шешу тәсіліне байланыссыз екенін ұмытпау керек.

Математикалық физиканың теңдеулеріне келтірілетін механиканың қарапайым есептері

Призмалық сырықтардың таза бұралуының жалпы теориясы

Призмалық немесе көлденең қимасы әртүрлі тұйық контур болатын сырық берілсін. Бұл сырықтың бір қапталы бекітілсін, ал бос қапталында бұрылу моментін туғызатын күштер әсер етсін. Қапталдың қалай бекітілгендігі және онда күштердің қандай заңдылықпен таралуы қарастырылмайды.

Сырықтың көлденең қимасының жазықтығында материалдың серпімділік сипаттамалары $a_{ij}\left(x,y\right)$ нүктеден нүктеге үзіліссіз өзгереді, бірақ сырық бойы өзгермейді деп ұйғарайық. Сырықтың бос қапталындағы жазықтықты *xOy* жазықтығы деп, ал оның жасаушысы z өсіне параллель деп санайық.

Енді анизатропты біртекті сырықтың таза бұралуының жалпы теңдеуін алуды өзімізге мақсат етіп қояйық. Ол үшін Сен-Венанның таза бұралу теориясы мен оның жартылай кері тәсілін қолданамыз.

Жалпы теориядан декарттық координаттар жүйесіне қатысты нүктенің кернеулік күйі "*тензорлық кернеуліктің*" тоғыз компоненттері бойынша анықталатыны белгілі. Таза бұралу теориясына қатысты оның төртеуі нөлге тең. Атап айтқанда $\sigma_x=\sigma_y=\sigma_z=\tau_{xy}=0$, ал қалған екеуі тұтас ортаның тепе-теңдік теңдеулерінен тек *x* пен *y*-ке байланысты екені шығады. Сонымен қатар "*тензорлық кернеуліктің*" компоненттері симметриялы екенін естен шығармау керек. Сонда серпімді дененің тепе-теңдік теңдеулер жүйесі келесі түрде жазылады:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}=0, \tag{1.38}$$

$$\left.\begin{aligned}
&1)\ \frac{\partial u}{\partial x}=0,\\
&2)\ \frac{\partial v}{\partial y}=0,\\
&3)\ \frac{\partial w}{\partial z}=0,\\
&4)\ \frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}=a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz},\\
&5)\ \frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}=a_{45}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz},\\
&6)\ \frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}=0.
\end{aligned}\right\}$$

3, 4 және 5 - теңдеулерден орын ауыстырудың проекцияларын анықтайық:

$$\left.\begin{aligned}
&w=W(x,y),\\
&v=z\left(a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)+V(x,y),\\
&u=z\left(a_{45}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+U(x,y).
\end{aligned}\right\}$$

Табылған өрнектерді 1, 2 және 6-ға қойып белгісіз U,V,W функциялары үшін төмендегі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\frac{\partial U}{\partial x}=0,\ \frac{\partial V}{\partial y}=0,\ \frac{\partial U}{\partial y}+\frac{\partial V}{\partial x}=0, \tag{1.39}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{45}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0,\\
&\frac{\partial}{\partial y}\left(a_{45}\tau_{yz}+a_{55}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{44}\tau_{yz}+a_{45}\tau_{xz}-\frac{\partial W}{\partial y}\right)=0.
\end{aligned}\right\} \tag{1.40}$$

(1.39) – ды интегралдайық;

$$U=-\omega_3 y+u_0,\ V=\omega_3 x+v_0,$$

мұнда ω_3, u_0, v_0 - кез келген тұрақтылар.

W функциясының орнына есептеуге ыңғайлы болу үшін $\varphi(x, y)$ функциясын төмендегі өрнек арқылы енгізейік:

$$W = \vartheta\varphi + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0 .$$

Сонда (1.40) жүйесінен

$$\left.\begin{aligned} a_{45}\tau_{yz} + a_{55}\tau_{xz} &= \vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right), \\ a_{44}\tau_{yz} + a_{45}\tau_{xz} &= \vartheta\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right). \end{aligned}\right\} \qquad (1.41)$$

теңдіктерін аламыз.

Бұдан
$$\left.\begin{aligned} u &= -\vartheta yz + \omega_2 z - \omega_3 y + u_0, \\ v &= \vartheta xz + \omega_3 x - \omega_1 z + v_0, \\ w &= \vartheta\varphi(x, y) + \omega_1 y - \omega_2 x + w_0. \end{aligned}\right\}$$

Бұл жерде $\omega_1, \omega_2, \omega_3, u_0, v_0, w_0$ - деформацияға тәуелсіз (қатысы жоқ) қатты дененің ығысуын көрсететін кез келген тұрақтылар. Ал ϑ-тұрақтысы сырықтың әрбір ұзындық бірлігіне қатысты қиманың бұралу бұрышы немесе салыстырмалы бұралу бұрышы:

$$\vartheta = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Көлденең қиманың қисаюын сипаттайтын $\varphi(x, y)$ функциясын кейде "бұралу функциясы" деп атайды.

Сонымен (1.41) теңдіктерін (1.38) тепе-теңдік теңдеуімен толықтыра отырып, белгісіз $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \varphi$ функцияларын анықтау үшін үш теңдеулер жүйесін аламыз.

Шекаралық шарттарына тоқталайық. Сырықтың бүйір бетінде $\tau_{xz}\cos(n, x) + \tau_{yz}\cos(n, y) = 0$ шарты орындалады.

Қапталдарында қорытқы моменттер берілсе, онда жоғарыдағы шартты интегралдық түрде жазуға болады.

$$\iint_G \tau_{xz}\,dxdy = 0, \; \iint_G \tau_{yz}\,dxdy = 0, \; \iint_G (\tau_{yz}x - \tau_{xz}y)\,dxdy = M.$$

Белгісіз функция ретінде $\psi(x, y)$ бұралудың кернеулік функциясын алайық. Бұл функция жанама кернеуліктермен $\tau_{xz} = \vartheta\dfrac{\partial\psi}{\partial y}$, $\tau_{yz} = -\vartheta\dfrac{\partial\psi}{\partial x}$ арақатынастарымен байланысты. Сондықтан (1.41) жүйесінен $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x\partial y} = \dfrac{\partial\varphi}{\partial y\partial x}$ аралас туындылардың теңдік қасиетін пайдалана отырып, кернеулік функция қанағаттандыратын дифференциалдық теңдеу аламыз. Жалпы жағдайда бұл теңдеу анизатропты біртекті емес сырық үшін келесі түрде жазылады.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(a_{44}\frac{\partial\psi}{\partial x}-a_{45}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-a_{45}\frac{\partial\psi}{\partial x}+a_{55}\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)=-2.$$

Егер деформация коэффициенттері a_{ij} тұрақты шамалар болатын ***түзу сызықты анизатропты біртекті сырық*** қарастырсақ, онда кернеулік және бұралу функцияларын анықтайтын теңдеулер тұрақты коэффициентті сызықтық теңдеулер болады. Яғни соңғы теңдеу

$$a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-2a_{45}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y}+a_{55}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-2 \qquad (1.42)$$

түрінде жазылады.

Ортотропты сырық жағдайында теңдеу бұдан да ықшам түрде жазылады:

$$a_{44}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+a_{55}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-2,$$

өйткені $a_{45}=0$. Ақырында ***біртекті изотропты сырық*** үшін Пуассон теңдеуін аламыз:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=-2G,$$

өйткені $a_{44}=a_{55},\ G=\dfrac{1}{a_{44}}$.

(1.42) теңдеуінің характеристикалық теңдеуін құрайық:

$$a_{44}(dy)^2+2a_{45}dxdy+a_{55}(dx)^2=0.$$

Бұдан $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-a_{45}\pm\sqrt{a_{45}^2-a_{44}a_{55}}}{a_{44}}$ немесе

$$dy=\frac{-a_{45}-\sqrt{D}}{a_{44}}dx,\ dy=\frac{-a_{45}+\sqrt{D}}{a_{44}}dx,$$

мұнда $D=a_{45}^2-a_{44}a_{55}$ - квадраттық форманың дискриминанты. Әрі қарай жалпы теорияға сүйене отырып үш дербес жағдай қарастыруға болады. Сырықтың таза бұралу теориясының физикалық мағынасына байланысты $D=a_{45}^2-a_{44}a_{55}<0$, яғни (1.42) теңдеуі эллипстік типке жатады.

Қорытынды. Физикалық құбылыстардың математикалық модельдерінің теориясы математикалық физиканың басқа да теңдеулеріне алып келеді. Сондықтан алдымен осы оқу құралында бакалавр курсы үшін келесі түрдегі екінші ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулердің шеттік есептері қарастырылады.

Атап айтқанда:

$$a_{11}\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+2a_{12}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}+a_{22}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y),$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y),$$

және

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + f(x, y).$$

Жалпы жағдайда математикалық физика есептері қарапайым үш типке жататын дифференциалдық теңдеулерге келтіріледі.

▪ Пуассон теңдеуі ($f = 0$, жағдайында Лаплас теңдеуі)

$$-\Delta u = f,\ u = u(x),\ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in G \subset R^n, \qquad 1.43)$$

мұнда $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + ... + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ Лаплас операторы.

▪ Жылу өткізгіштік теңдеуі

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \Delta u + f,\ u = u(x,t),\ x \in G \subset R^n,\ t > 0. \qquad (1.44)$$

▪ Толқындық теңдеу

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f,\ u = u(x,t),\ x \in G \subset R^n,\ t > 0. \qquad (1.45)$$

(1.44) және (1.45) теңдеулерінде t уақытты көрсетеді. Дифференциалдық теңдеулер шеттік шарттармен толықтырылады. Шеттік шарттарға келесі мысалдарды жатқызуға болады.

(1.43) теңдеуі үшін шекаралық шарттар:

$$u\big|_{x \in S} = v(x) \text{ немесе } \left.\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right|_{x \in S} = v_1(x),$$

мұнда S – G облысының шекарасы, ал $\vec{n}$ - сыртқы бірлік вектор. Бірінші жағдайда Дирихле есебі, ал екінші жағдайда Нейман есебі берілді деп саналады.

(1.44) теңдеуі үшін бастапқы шарт

$$u(x,0) = u_0(x),\ x \in R^n$$

Коши есебін анықтайды.

(1.45) теңдеуі үшін бастапқы шарттар

$$u(x,0) = u_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1(x),\ x \in R^n$$

Коши есебін анықтайды.

(1.44) және (1.45) теңдеулері үшін аралас есептің қойылымын да қарастыруға болады.

Дирихле немесе Нейман есептерінің қойылымында өте пайдалы Фридрихс теңсіздігін атап өткен жөн: егер $f \in C^1(G)$ функциясы

а) $\int_G f dx$ немесе

в) $f\big|_{x \in S} = 0$ шарттарының бірін қанағаттандырса, онда:

$$\int\limits_G f^2(x)dx \le C(G)\int\limits_G \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2\right]dx.$$

Бұл жерде *G* облысы шенелген, ал оның шекарасы *S* – құрама-тегіс бет. $n=1$ жағдайында теңсіздік келесі түрде жазылады:

$$\int\limits_0^l f^2(x)dx \le \frac{l}{\pi}\int\limits_0^l f'^2(x)dx.$$

Математиканың көптеген есептерінде бастапқы мағлұматтар u арқылы, ал есептің шешімі z арқылы ізделінеді. Сонда шешім алғашқы деректермен функционалдық қатынаста болады. Француз математигі Ж. Адамардың тұжырымдауы бойынша математикалық физика есептерінің ішінен өте маңызды ***қисындылық (корректность) қойылымындағы*** есептер класын бөліп қарастырайық. Ж. Адамар бойынша:

- кез келген бастапқы мүмкін болатын барлық мағлұматтарда есептің шешімі бар (шешімнің бар болуы);
- әрбір бастапқы мағлұматқа тек бір жалғыз шешім сәйкес келеді (есептің бірмәнділігі);
- шешім орнықты.
- Әрине бұл талаптар бір қарағанда өте орынды сияқты көрінгенімен қабылданған модель тұрғысында дәлелдеуді қажет етеді. Қисындылықты дәлелдеу – бұл математикалық модельдің алғашқы апробациясы. Сондықтан алдымен жоғарыдағы шарттардың мағынасын ажырата білейік.
- Бастапқы мағлұматтардың арасында есептің шешу мүмкіндігін жоққа шығаратын бір-біріне қайшы келетін шарттар жоқ;
- Модель физикалық үдерісті бірмәнді анықтайды;
- Шешім есептің бастапқы мағлұматтарына үзіліссіз тәуелді.

Басқаша айтқанда u_1 және u_2 бір-біріне ауытқу өлшемдері жеткілікті түрде аз бастапқы мағлұматтар болсын делік. Сонда бұларға сәйкес шешімдердің $z_1 = f(u_1)$ және $z_2 = f(u_2)$ ауытқу өлшемдері де әрбір алдын - ала берілген дәлдік өлшемінен кіші.

Жоғарыдағы үш шарттың ең болмағанда біреуі орындалмайтын болса, онда есептің қойылымы ***қисынсыз*** (некорректно) деп аталады. Есептің қисындылық қойылымына алғашқылардың бірі болып Ж. Адамар назар аударды. Ол қисындылықты дербес туындылы теңдеулердің шеттік есептерін шығарумен байланыстырды. Жеке жағдайда қисындылық ұғымы шеттік есептердің классификациясын құруға себеп болды.

Қисынсыз қойылымдағы есептер

Мысал (Ж. Адамар).

$$u(x,y)\big|_{y=0}=0,\ x\in R,\ \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{y=0}=\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=0}=$$
$$=e^{-\sqrt{n}}\cos nx,\ n>0,\ x\in R,\ y>0$$

алғашқы шарттарын қанағаттандыратын жарты жазықтықта $u_{xx}+u_{yy}=0$ Лаплас теңдеуінің шешімін тап. Математикалық физикада бұл есепті Лаплас теңдеуінің Коши есебі деп атайды.

Тікелей тексеру арқылы $u(x,y)=\dfrac{e^{-\sqrt{n}}}{n}\cos nxshny$ функциясының теңдеудің шешімі екеніне көз жеткізуге болады.

Бұл жағдайда есеп шешімінің орнықтылық шарты бұзылғандығын көрсетейік. Шынында да алғашқы шарттардан $n\to\infty$ $u(x,y)\big|_{y=0}=0,\ \left|\dfrac{\partial u}{\partial y}\right\|_{y=0}\le e^{-\sqrt{n}}\to 0$. Соған қарамастан $n>>1$ (жеткілікті үлкен) үшін $|u(x,y)|=O\left(\dfrac{1}{n}e^{\sqrt{n}(\sqrt{n}y-1)}\right)$ бағасы айқын, яғни есептің шешімі үлкен мәндерге ие. Демек қисындылықтың үшінші шарты орындалмайды. Әрине, бұл Коши есебінің қисынсыз қойылымын білдіреді.

Жаттығулар

Дербес туындылы дифференциалдық теңдеулерді канондық түрге келтір және қандай типке жататынын анықта:

1. $u_{xx}+2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0.\left(u_{\xi\eta}+\frac{1}{2}u_\xi=0;\xi=x+y,\eta=3x-y\right).$
2. $u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0.\left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0;\xi=2x-y,\eta=x\right).$
3. $u_{xx}-2u_{xy}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+cu=0.\left(u_{\eta\eta}+(\alpha+\beta)u_\xi+\beta u_\eta+cu=0;\xi=x+y,\eta=y\right).$
4. $\begin{cases}u_{xx}-2\sin x u_{xy}+\left(2-\cos^2 x\right)u_{yy}=0.\\ \begin{pmatrix}u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\cos\xi\cdot u_\eta=0;\\ \xi=x,\eta=y-\cos x\end{pmatrix}.\end{cases}$
5. $\begin{cases}y^2u_{xx}+2yu_{xy}+u_{yy}=0.\\ \begin{pmatrix}u_{\eta\eta}-2u_\xi=0;\{y\neq 0\}\text{облысында}\\ \xi=2x-y^2,\eta=y;y=0,u_{yy}=0\end{pmatrix}.\end{cases}$
6. $\begin{cases}u_{xx}+2u_{xy}-2u_{xz}+2u_{yy}+6u_{zz}=0.\\ \left(u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_{\zeta\zeta}=0;\xi=x,\eta=y-x,\zeta=x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z\right)\end{cases}$

7. $$\begin{cases} 4u_{xx} - 4u_{xy} - 2u_{xz} + u_y + u_z = 0. \\ \left(\begin{array}{l} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\eta} = 0; \xi = \dfrac{1}{2}x, \eta = \dfrac{1}{2}x + y, \\ \zeta = -\dfrac{1}{2}x - y + z \end{array} \right) \end{cases}$$

8. $$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} + 2u_{yy} + 2u_{zz} = 0. \\ \left(u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} = 0; \xi = x, \eta = y - x, \zeta = 2x - y + z \right) \end{cases}$$

9. $$\begin{cases} u_{xy} - u_{xt} + u_{zz} - 2u_{zt} + 2u_{tt} = 0. \\ \left(\begin{array}{l} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} + u_{\tau\tau} = 0; \xi = x + y, \eta = -x + y, \\ \zeta = z, \tau = y + z + t \end{array} \right) \end{cases}$$

10. $$\begin{cases} u_{xx} + 2u_{xy} - 2u_{xz} - 4_{yz} + 2u_{yt} + u_{zz} = 0. \\ \left(\begin{array}{l} u_{\xi\xi} - u_{\eta\eta} + u_{\zeta\zeta} = 0; \xi = x, \eta = -x + y, \zeta = 2x - y + z, \\ \tau = x + z + t \end{array} \right) \end{cases}$$

2-ТАРАУ. ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖӘНЕ ВЕКТОРЛЫҚ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Бұл тарауда «Математикалық физика теңдеулері» курсында жиі қолданылатын қисық сызықты координаталар жүйесі қарастырылған. Жалпы теориядан векторлық анализ элементтерінің көмегімен Лаплас операторының ортогональды (декарттық, цилиндрлік және сфералық) жүйеде жазылуы көрсетілген.

Кеңістіктегі нүктенің орнын бірмәнді анықтайтын q_1, q_2, q_3 сандарын таңдау заңдылығы есептің ыңғайына қарай белгілі деп ұйғарайық. Үш өлшемді Евклид кеңістігіндегі ағымдағы *M* нүктесінің орны q_1, q_2, q_3 сандарымен, яғни қисық сызықты координаттарымен анықталсын делік. Әрине, бұл нүктенің орнын кеңістікте таңдап алынған полюске қатысты сол нүктенің радиус-векторымен де анықтауға болады. Онда:

$$\vec{r} = \vec{r}(q_1, q_2, q_3)$$

скаляр аргументті вектор функция.

Радиус-вектордың декарттық координат жүйесіне түсірілген проекциялары да q_1, q_2, q_3 координаттарының функциясы болады:

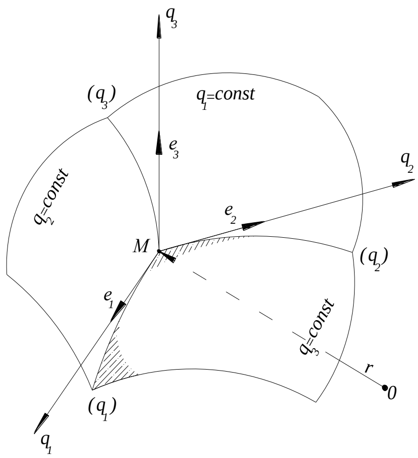
$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3).$$

(2.1)

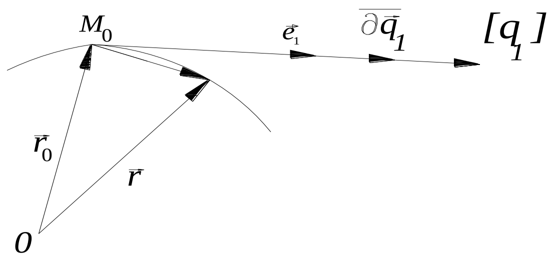
Координаттары q_1, q_{2^0}, q_{3^0} болатын M_0 нүктесін қарастырайық; сонда $x = x(q_1, q_{2^0}, q_{3^0}), \quad y = y(q_1, q_{2^0}, q_{3^0}), \quad z = z(q_1, q_{2^0}, q_{3^0})$ теңдеулерімен анықталатын қисық кеңістікте M_0 нүктесі арқылы өтетін қисықты анықтайды.

Өйткені бұл теңдеулерде тек q_1 ғана айнымалы. Бұл қисықты q_1 координатының өзгерісіне сәйкес ***координаттық сызық*** деп атайды. Осы сияқты q_2, q_3 координаттарының өзгерісіне сай координаттық сызықтар да анықталады.

Координат сызықтарына тиісті M_0 нүктесі арқылы сәйкес координаттардың өсу бағыттары бойымен жүргізілген жанамалар координат өстері деп аталады, және $[q_1], [q_2], [q_3]$ арқылы белгіленеді (2-сур. қара).



2-сурет. Қисық сызықты координаттар жүйесі



3-сурет. $[q_1]$ координат өсі

Жалпы жағдайда ағымдағы нүктенің үш координаты да айнымалы, егер бұлардың екеуі өзгеріп біреуі бекітілсе, онда (2.1) теңдеулері ***координаттық беттерді*** анықтайды. Мысалы (q_1, q_2) беті келесі теңдеулермен анықталады:

$$x = x(q_1, q_2, q_{3^0}),\ y = y(q_1, q_2, q_{3^0}),\ z = z(q_1, q_2, q_{3^0}).$$

Координаттық беттерге тиісті M_0 нүктесінен жүргізілген жанама жазықтықтар ***координаттар жазықтықтары*** деп аталады.

Координат өстерінің $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ бірлік векторларын анықтайық.

q_1 координатының өзгерісіне сәйкес координаттық сызық бойымен нүктенің қозғалысын қарастырайық. Сонда қозғалыстағы нүкте t уақыт мезгілінде M_0 нүктесінен табылсын делік (3-сур. қара). Онда $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ векторы $[q_1]$ координат өсінің бірлік $\vec{e}_1$ векторымен коллинеар болады. Яғни бұл векторлардың сәйкес координаттары пропорционал болады. Бір түзудің бойында жатқандықтан:

$$\vec{e}_1 = \frac{\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}}{\left|\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right|},$$

мұнда $\dfrac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \dfrac{\partial x}{\partial q_1}\vec{i} + \dfrac{\partial y}{\partial q_1}\vec{j} + \dfrac{\partial z}{\partial q_1}\vec{k}$, ал

$$\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} = H_1 .$$

Сонымен

$$\vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} .$$

Осы сияқты

$$\vec{e}_2 = \frac{1}{H_2}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} ,$$

$$\vec{e}_3 = \frac{1}{H_3}\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} ,$$

мұнда

$$H_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} ,$$

$$H_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} .$$

H_1, H_2, H_3 коэффициенттерін Ламе коэффициенттері деп атайды.

Анықтама. Координат өстерінің бірлік векторлары өзара перпендикуляр болса, координат жүйесі ортогональды деп аталады.

Алда біз тек ортогональды қисық сызықты координат жүйелерін қарастырамыз. Олардың қатарына цилиндрлік, сфералық координат жүйелері жатады (4-сур. қара).

Қисық сызықты өстердің ортогональды шарттарын аналитикалық түрде көрсетейік:

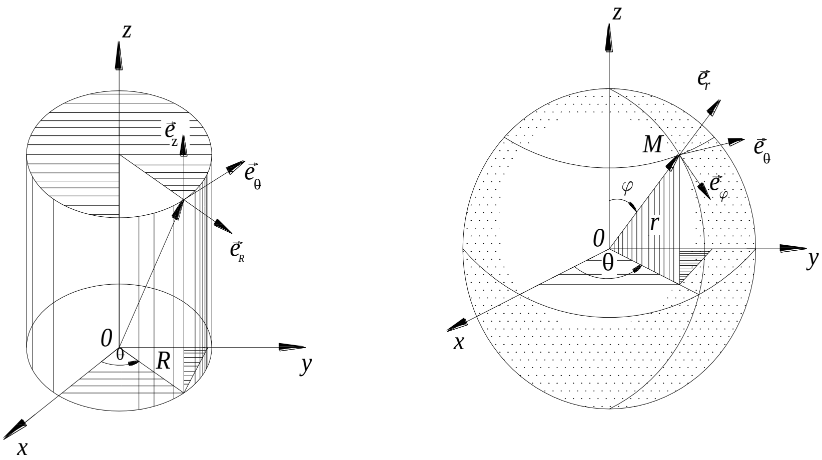
$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\frac{\partial x}{\partial q_j} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\frac{\partial y}{\partial q_j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\frac{\partial z}{\partial q_j} = H_i H_j \delta_{ij} .$$

Бұл жерде δ_{ij} Кронекер символы

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, i \neq j, \\ 1, i = j. \end{cases}$$

Нүктенің жылдамдығын радиус-векторды дифференциалдау арқылы табайық:

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{r}}{dt} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\dot{q}_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3}\dot{q}_3, \qquad (2.2)$$



а) ә)

4-сурет

а) Цилиндрлік координаттар жүйесі *ә) Сфералық координаттар жүйесі*

бірақ мұнда

$$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = H_1\vec{e}_1, \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_2} = H_2\vec{e}_2, \; \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_3} = H_3\vec{e}_3$$

Болғандықтан:

$$\vec{v} = \dot{q}_1 H_1 \vec{e}_1 + \dot{q}_2 H_2 \vec{e}_2 + \dot{q}_3 H_3 \vec{e}_3 .$$

Бірлік векторлардың $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij}$ ортогональдық шарттарын ескере отырып, жылдамдықтың модулін табамыз:

$$v = \sqrt{\dot{q}_1^2 H_1^2 + \dot{q}_2^2 H_2^2 + \dot{q}_3^2 H_3^2} . \qquad (2.3)$$

Жылдамдықтың координат өстеріне проекциялары

$$v_{q_1} = \dot{q}_1 H_1, \; v_{q_2} = \dot{q}_2 H_2, \; v_{q_3} = \dot{q}_3 H_3$$

өрнектерімен анықталады.

Ағымдағы нүктенің үдеуінің $[q_1]$ координат өсіне түсірілген проекциясы w_{q_1}:

$$w_{q_1} = \vec{w} \cdot \vec{e}_1 = \frac{1}{H_1}\frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1};$$

бұдан

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) - \vec{v} \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right). \qquad (2.4)$$

(2.2) өрнегінен $\dot{q}_1$ бойынша дербес туындысын алсақ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}. \qquad (2.5)$$

$\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}$ дербес туындысы q_1, q_2, q_3 координаттарына тәуелді, олай болса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_3.$$

(2.2) теңдігінің екі жағын бірдей q_1 бойынша дифференциалдасақ:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1^2}\dot{q}_1 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 \vec{r}}{\partial q_1 \partial q_3}\dot{q}_3.$$

Соңғы теңдіктерді салыстыра отырып,

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial q_1}\right) \qquad (2.6)$$

тең екеніне көз жеткіземіз. Табылған (2.5) және (2.6) теңдіктерін (2.4) формуласына қояйық. Сонда

$$H_1 w_{q_1} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_1}\right) - \vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1}.$$

$$\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial \dot{q}_1} = v\frac{\partial v}{\partial \dot{q}_1} = \frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right),$$

өйткені $\vec{v}^{\,2} = v^2$. Осы сияқты $\vec{v} \cdot \frac{\partial \vec{v}}{\partial q_1} = \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)$. Енді w_{q_1} өрнегін келесі түрде жазуға болады:

$$w_{q_1} = \frac{1}{H_1}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}.$$

Үдеудің қалған компоненттері де осыған ұқсас алынады:

$$w_{q_2} = \frac{1}{H_2}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\},$$

$$w_{q_3} = \frac{1}{H_3}\left\{\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial}{\partial \dot{q}_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right] - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{v^2}{2}\right)\right\}.$$

Декарттық, цилиндрлік және сфералық координат жүйелерінде Ламе коэффициенттерін табайық.

1. Декарттық координат жүйесінде Ламенің барлық коэффициенттері бірге тең:

$$H_1 = H_x = 1,\ H_2 = H_y = 1,\ H_3 = H_z = 1 \qquad (2.7)$$

2. Цилиндрлік координаттар: $q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z$. Цилиндрлік және декарттық координаттар арасындағы байланыс $x = \rho\cos\varphi,\ y = \rho\sin\varphi,\ z = z$ формулаларымен анықталады. Демек:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{i}\cos\varphi + \vec{j}\sin\varphi,$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{i}\rho\sin\varphi + \vec{j}\rho\cos\varphi,$$

$$\vec{e}_z = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = 1.$$

Сонда

$$H_1 = H_\rho, H_2 = H_\varphi = \rho, H_3 = H_z = 1. \qquad (2.8)$$

Координаттық беттері:

- дөңгелек цилиндрі $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$,
- жазықтығы $\varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$,
- жазықтығы $z = z$.

3. Сфералық координаттар: $q_1 = \rho, q_2 = \theta, q_3 = \varphi$. Сфералық және декарттық координаталар арасындағы байланыс $x = \rho\sin\theta\cos\varphi, y = \rho\sin\theta\sin\varphi, z = \rho\cos\theta$ формулаларымен анықталады. Демек:

$$\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = \vec{i}\sin\theta\cos\varphi + \vec{j}\sin\theta\sin\varphi + \vec{k}\cos\theta,$$

$$\vec{e}_\theta = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = \vec{i}\rho\cos\theta\cos\varphi + \vec{j}\rho\cos\theta\sin\varphi - \vec{k}\rho\sin\theta,$$

$$\vec{e}_\varphi = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\varphi} = -\vec{i}\rho\sin\theta\sin\varphi + \vec{j}\rho\sin\theta\cos\varphi.$$

Сонда

$$H_1 = H_\rho = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right| = \sqrt{\sin^2\theta\cos^2\varphi + \sin^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\theta} = 1,$$
$$H_2 = H_\theta = \left|\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right| = \rho\sin\theta,\ H_3 = H_\varphi = \rho. \qquad (2.9)$$

Координаттық беттер:

- сфера $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$,
- конус $\theta = arctg\,\dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}$,
- жазықтық $\varphi = arctg\,\dfrac{y}{x}$.

Кейде нақты тәжірибелік есептер шығарғанда бұлардан да басқа қисық сызықты координаталар жүйесін пайдалануға тура келеді. Бірақ тік бұрышты декарттық координаттар жүйесінде базистік векторлар барлық нүктеде шамасы және бағыты бойынша бірдей, ал қисық сызықты координаттар жүйесінде базистік векторлар нүктеден нүктеге өзгеріп отыратынын естен шығармау қажет.

Векторлық анализдің элементтері

Анықтама. Егер кеңістіктің немесе оның бөлігінің әрбір нүктесінде қайсыбір шаманың мәні анықталса, онда қарастырылып отырған облыста сол шаманың өрісі берілді деп саналады.

Егер қарастырылып отырған шама скаляр болса, онда оның өрісі ***скаляр өріс*** деп аталады және ол өзінің сандық мәнімен толықтай сипатталады.

Скалярлық өрістің геометриялық сипаттамасы-оның ***деңгейлік беті***, яғни өрістің скалярлық функциясының тек бірдей мән қабылдайтын нүктелерінің геометриялық орны.

Скалярлық өрістің дифференциалдық сипаттамасы ретінде оның скаляр аргументі бойынша алынған кез келген бағыттағы туындысы қабылданады.

Декарттық координат жүйесінде $\varphi(M)=\varphi(x_1,x_2,x_3)$ функциясы арқылы анықталған скалярлық өріс берілсін делік.

Егер $\varphi(x_1,x_2,x_3)$ өрісінің әрбір нүктесінде $\frac{\partial\varphi}{\partial x_1},\frac{\partial\varphi}{\partial x_2},\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ үзіліссіз дербес туындылары табылса, онда олардың жиынтығы вектор құрайды және ол өрістің кез келген бағыттағы тез өзгерісін табуға мүмкіндік береді. Бұл вектор скалярлық өрістің градиенті деп аталады және $grad\varphi$ арқылы белгіленеді. Егер $\vec{i}_1,\vec{i}_2,\vec{i}_3$ декарттық жүйенің бірлік векторлары болса, онда

$$grad\varphi=\vec{i}_1\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}+\vec{i}_2\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}+\vec{i}_3\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}. \qquad (2.10)$$

Анықтама. Егер $\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}$ қатынасының $\Delta l\to 0$ ұмтылғандағы шегі табылса, онда ол M_0 нүктесінде *l* бағыты бойынша алынған туындысы деп аталады және $\frac{d\varphi}{dl}$ символымен белгіленеді.

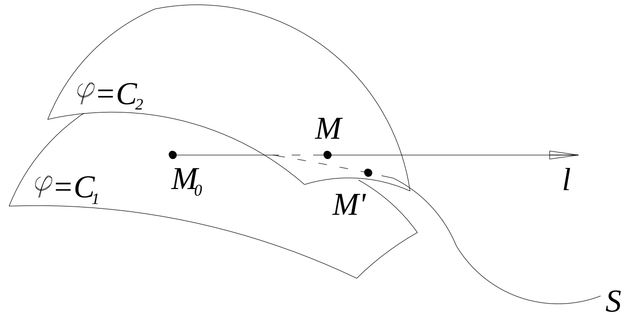
Сонымен $\frac{d\varphi}{dl}=\lim\limits_{\Delta l\to 0}\frac{\varphi(M)-\varphi(M_0)}{\Delta l},\overrightarrow{M_0M}\parallel\vec{l}$. Қандай координат жүйесін қарастырсақ та бағыт бойынша алынған туындының бұл анықтамасы өзгермейді. Бұл анықтаманың инварианттық сипаттамасын көрсетеді.

Декарттық координат жүйесінде:

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{M_0}=\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right|_{M_0}\cos\alpha+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right|_{M_0}\cos\beta+\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right|_{M_0}\cos\gamma, \qquad (2.11)$$

мұнда $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ $\vec{l}$ векторының бағыттауыш косинустары.

5-сурет. Бағыт және қисық бойынша туынды



Ескерту. $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}$ дербес туындылары φ функциясынан сәйкес Ox_1, Ox_2, Ox_3 координат өстерінің бағыттары бойынша алынған туындылары.

Егер M' нүктесі M_0 нүктесіне қарай (5-сур. қара) қисық бойымен жылжығанда $\vec{l}$ векторы M_0 нүктесінің жанама векторы болса, онда бағыт бойынша алынатын (2.11) формуласы өзінің күшін сақтайды.

Енді (2.11) формуласын өрістің градиентімен байланыстырайық. Ол үшін күрделі функциядан туынды табу ережесіне сай:

$$\frac{d\varphi}{dl} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dl} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dl} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dl} =$$

$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\cos\left(\vec{l}, \vec{i}_1\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\cos\left(\vec{l}, \vec{i}_2\right) + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\cos\left(\vec{l}, \vec{i}_3\right) = \sum_{k=1}^{3} l_k \frac{\partial\varphi}{\partial x_k}.$$

Соңғы өрнекті екі вектордың скаляр көбейтіндісі түрінде жазайық. Сонда

$$\frac{d\varphi}{dl} = \vec{l}\cdot grad\varphi\,.$$

Демек φ - дің l бағыты бойынша туындысы $grad\varphi$ - дің сол бағытқа түсірілген проекциясына тең. Яғни

$$\frac{d\varphi}{dl} = \Pi p_{\vec{l}}\, grad\varphi\,.$$

Сонымен скаляр өрістің әрбір нүктесінде $grad\varphi$ анықталса, онда кез келген берілген бағыт бойынша әрқашан өрістің тез өзгерісін табуға болады. Сондықтан $grad\varphi$ векторы скаляр өрістің ***біртекті еместік өлшемі*** (мера неоднородности) деп аталады.

Скалярлық өрістің градиентінің қасиеттерін атап өтейік.

1. Градиент деңгейлік беттің нормалі бойынша бағытталған.
2. Градиент скалярлық өріс функциясының өсу жағына бағытталған.
3. Градиенттің модулі бағыт бойынша алынған туындының берілген нүктедегі ең үлкен мәніне тең:

$$\left.\frac{d\varphi}{dl}\right|_{\max} = \left|grad\varphi\right| = \sqrt{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)^2}\ .$$

Бұл қасиеттер градиенттің координат жүйелеріне тәуелсіз инварианттық сипаттамаларын көрсетеді. Сонымен $grad\varphi$ векторы берілген нүктеде скалярлық өрістің бағытын және ең үлкен өзгерісінің шамасын береді. Бұдан, егер $\vec{n}$ деңгейлік беттің бірлік нормаль векторы болса, онда

$$\frac{d\varphi}{dn} = Пp_{\vec{n}}\, grad\varphi = |\vec{n}| \cdot |grad\varphi| = |grad\varphi|,$$

өйткені $|\vec{n}| = 1$ және

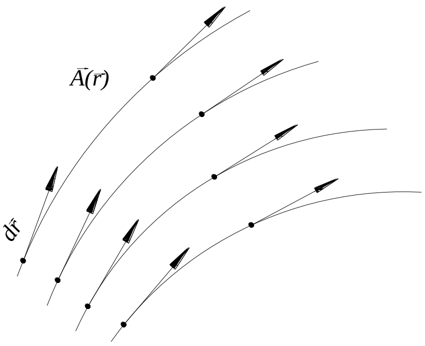
$$grad\varphi = \vec{n}\,\frac{d\varphi}{dn}.$$

Анықтама. Егер кеңістіктің немесе оның бөлігінің әрбір нүктесінде $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ векторлық шамасы анықталса, қарастырылып отырған облыста ***векторлық өріс*** берілді деп саналады.

Декарттық координат жүйесінде векторлық шаманың берілуі үш скаляр $A_1(x_1, x_2, x_3), A_2(x_1, x_2, x_3), A_3(x_1, x_2, x_3)$ функцияның берілуімен парапар.

$$\vec{A}(\vec{r}) = \vec{A}(x_1, x_2, x_3) = A_1(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_2 +$$
$$+ A_3(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_3$$

Анықтама. Қисықтың әрбір нүктесінде анықталған $\vec{A}(\vec{r})$ векторы сол нүктедегі жанамамен бағыттас болса, онда мұндай қисық ***векторлық өрістің векторлық сызығы*** деп аталады (6-сур. қара).



6-сурет. Өрістің векторлық сызықтары

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ векторлық өрісі берілсін делік, онда векторлық сызықтың анықтамасы бойынша оның $d\vec{r}$ жанамасымен бағыттас элементі сол нүктедегі $\vec{A}$ векторымен коллинеар. Сонда

$$d\vec{r} \times \vec{A} = 0.$$

Коллинеарлық шарттан бұл векторлардың сәйкес координаттарының пропорционалдығы шығады

$$\frac{dx_1}{A_1(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_2}{A_2(x_1, x_2, x_3)} = \frac{dx_3}{A_3(x_1, x_2, x_3)}. \qquad (2.12)$$

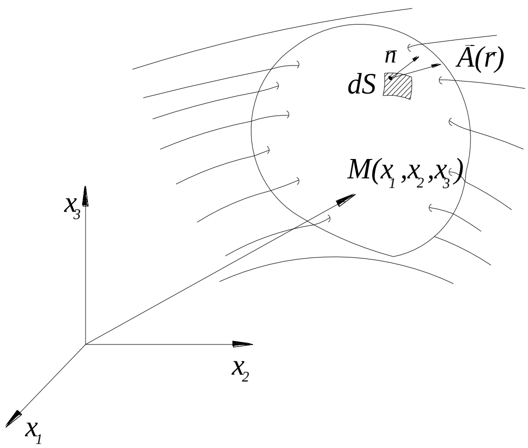
Яғни векторлық сызықтың дифференциалдық теңдеулерін аламыз. (2.12) теңдеулер жүйесінің шешімі екі параметрлі векторлық сызықтардың үйірін анықтайды.

$$\left.\begin{aligned}\psi_1(x_1, x_2, x_3) = C_1,\\ \psi_2(x_1, x_2, x_3) = C_2.\end{aligned}\right\} \qquad (2.29)$$

Ескерту. Стационар емес $\vec{A}(\vec{r}, t)$ өрісінің векторлық сызығының дифференциалдық теңдеуі де осы сияқты (2.12) түрінде жазылады. Бірақ әрбір уақыт мезгілінде t - ны бекітілген параметр ретінде қабылдаймыз.

Егер қандайда бір нүктеде $\vec{A}(\vec{r}) = 0$ болса, онда сол нүктеде $\vec{A}(\vec{r})$ өрісінің векторлық сызығының бағыты анықталмайды. Бұл нүкте арқылы бірде бір векторлық сызық өтпейді немесе шексіз көп векторлық сызықтар өтеді. Мұндай нүктелер (2.12) теңдеулер жүйесінің ерекше нүктелері деп аталады.

$\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ векторлық өрісінде тұйық немесе тұйықталмаған екі жақты бағдарланған (немесе құрама-тегіс) бет жайғассын делік (7-сур. қара).



7-сурет. Векторлық өрістің бет арқылы ағыны

Анықтама. ***Векторлық өрістің*** dS элементі арқылы өтетін ***ағыны*** деп $\vec{A} \cdot \vec{n} dS = A_n dS$ скалярлық шамасын айтамыз.

Анықтама. Векторлық өрістің бағдарланған беті арқылы өтетін бүкіл ағыны деп $\vec{A}(\vec{r})$ векторының осы беттің нормаль векторына түскен проекцияларының S беті бойынша алынған бірінші ретті беттік интегралы аталады.

Анықтамаға сәйкес декарттық координат жүйесінде:

$$\iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} dS = \iint_S A_n dS = \iint_S \Pi p_{\vec{n}} \vec{A} dS =$$
$$= \iint_s \left\{A_1 \cos(\vec{n}, \vec{i}_1) + A_2 \cos(\vec{n}, \vec{i}_2) + A_3 \cos(\vec{n}, \vec{i}_3)\right\} dS$$

Ескерту. Тұйық бет үшін $\vec{n}$ әрқашан беттің сыртқы нормалін көрсетеді.

Векторлық өрістің негізгі қасиеттері.

1. $\iint\limits_{S^+}(\vec{A},\vec{n})dS=-\iint\limits_{S^-}(\vec{A},\vec{n})dS$.

2. $\iint\limits_{S}(\lambda\vec{A}+\mu\vec{B},\vec{n})dS=\lambda\iint\limits_{S}(\vec{A},\vec{n})dS+\mu\iint\limits_{S}(\vec{B},\vec{n})dS$, мұнда λ, μ - тұрақты сандар.

3. Егер $S=S_1\cup S_2\cup\ldots\cup S_m$ болса, онда

$$\iint\limits_{S}(\vec{A},\vec{n})dS=\sum_{k=1}^{m}\iint\limits_{S_k}(\vec{A},\vec{n})dS.$$

Соңғы қасиет ағын ұғымының құрама-тегіс беттерге қолданылуын көрсетеді.

Ескерту. Кейде берілген *S* беті арқылы өтетін векторлық өрістің ағынын есептеу ыңғайлы болу үшін, өзінен локальдық қисық сызықты координат жүйесін таңдап алуға болады.

Тұйық бет арқылы табылатын векторлық ағын ұғымы өрістің ***дивергенция*** немесе ***алшақтау*** (расходимость) ұғымына алып келеді. Дивергенция ұғымы векторлық өрістің әрбір нүктесіндегі қайсыбір сандық сипаттамасын көрсетеді.

Сонымен векторлық өрістің әрбір нүктесінің төңірегінде анықталған дивергенция үйірі скалярлық өріс құрайды.

Математика тілінде дивергенция функционалды анықтайды.

Векторлық өрісте бекітілген *M* нүктесінің төңірегін кез келген тұйық *S* бетімен қоршайық та, сол бет бойынша алынған ағынды *S* бетімен шенелген τ көлемінің шамасына бөлейік:

$$\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\vec{n}dS.$$

Соңғы қатынаста көлем нөлге ұмтылғандағы, яғни көлем *M* нүктесіне тартылғандағы шегі табылса, онда ол $\vec{A}(\vec{r})$ векторлық өрісінің *M* нүктесіндегі дивергенциясы деп аталады және $\left(div\vec{A}\right)_M$ түрінде белгіленеді.

Анықтама бойынша:

$$\left(div\vec{A}\right)_M=\lim_{\substack{\tau\to 0\\(\tau)\to M}}\frac{1}{\tau}\iint\limits_{S}\vec{A}\cdot\vec{n}dS. \qquad (2.13)$$

(2.13) формуласы дивергенцияның координаттар жүйесіне тәуелсіз инварианттық шама екенін білдіреді.

Векторлық өрістің $div\vec{A}(\vec{r})>0$ нүктелері көз (источник) деп, ал $div\vec{A}(\vec{r})<0$ нүктелері құйылыс (сток) деп аталады.

Анықтама. Векторлық өрістің $div\vec{A}(\vec{r})=0$ теңдігін қанағаттандыратын нүктелерінің $G\subset R^3$ облысы соленоидальды деп аталады. “Соленоидальды” деген гректің сөзі, түтікше деген мағынаны білдіреді.

$G\subset R^3$ облысында үзіліссіз компоненттерімен $\vec{A}(\vec{r})=\{A_1,A_2,A_3\}$ векторлық өрісі берілсін делік.

Анықтама. *L* қисығы *G* облысында жататын бағдарланған құрама-тегіс қисық болсын. Сонда *L* қисығы бойынша алынған

$$\int_L \vec{A}\cdot d\vec{r} = \int_L A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 = \int_L \left(\vec{A}, \vec{\tau}\right)dl$$

интегралын векторлық өрістің жұмысы деп атайды. Егер L қисығы тұйық контурды құрса, $\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r}$ интегралы векторлық өрістің циркуляциясы деп аталады. Мұндағы $\vec{\tau}$ векторы L қисығының жанама бірлік векторы, ал dl – доғаның ұзындығының дифференциалы.

Анықтама. Векторлық өрісті қайсыбір $u(x_1, x_2, x_3)$ скалярлық өрісінің градиенті түрінде бейнелеуге болса, онда оны ***потенциалдық*** өріс деп атайды.

$$\vec{A}(\vec{r}) = grad u(x_1, x_2, x_3).$$

Сонда $u = u(x_1, x_2, x_3)$ функциясы – потенциалдық функция немесе $\vec{A}(\vec{r})$ векторлық өрістің потенциалы.

Сызықтық интегралдың қасиеттері

1. Егер $\vec{r} = \vec{r}(M)$ векторы L қисығының бойындағы кез келген M нүктесінің радиус-векторы болса, онда

$$\int_L \left(\vec{A}, \vec{\tau}\right)dl = \int_L \left(\vec{A}, d\vec{r}\right).$$

2. Сызықтық қасиеті:

$\int_L \left(\lambda\vec{A}_1 + \mu\vec{A}_2, d\vec{r}\right) = \lambda\int_L \left(\vec{A}_1, d\vec{r}\right) + \mu\int_L \left(\vec{A}_2, d\vec{r}\right)$, мұнда λ, μ –тұрақты сандар.

3. Аддитивтік (қосымдылық) қасиеті:

$$\int_{L_1+L_2} \left(\vec{A}, d\vec{r}\right) = \int_{L_1} \left(\vec{A}, d\vec{r}\right) + \int_{L_2} \left(\vec{A}, d\vec{r}\right).$$

4. L қисығы бағдарын өзгерткенде интеграл таңбасын өзгертеді

$$\int_{AB} \left(\vec{A}, d\vec{r}\right) = -\int_{BA} \left(\vec{A}, d\vec{r}\right),$$

мұнда A – бастапқы, ал B – қисықтың соңғы нүктесі.

5. $G \subset R^3$ облысында жататын кез келген тұйық бағдарланған құрама-тегіс L қисығы бойынша алынған потенциалдық өрістің циркуляциясы нөлге тең:

$$\oint_L \vec{A}\cdot d\vec{r} = 0.$$

6. $\int_{AB} \left(grad u, d\vec{r}\right) = u(B) - u(A).$

Анықтама. $G \subset R^3$ облысында компоненттері үзіліссіз дифференциалданатын $\vec{A} = \{A_1, A_2, A_3\}$ векторлық өрісі берілсін делік. Сонда $rot\vec{A} = \left\{\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}, \frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}, \frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right\}$ векторы векторлық өрістің роторы (құйыны) деп аталады.

Есте сақтауға оңай болу үшін оны детерминант түрінде жазайық:

$$rot\vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}.$$

Бұл анықтауыш міндетті түрде бірінші жатық жолдың элементтері бойынша ашылып жазылуы керек.

Сонда екінші жатық жолдың элементтерін үшінші жатық жолдың элементтеріне көбейтуді туынды табу амалы ретінде түсіндіруге болады, мысалы $\dfrac{\partial}{\partial x_2} \cdot A_3 = \dfrac{\partial A_3}{\partial x_2}$.

Анықтама. $\dfrac{1}{\tau}\iint\limits_S \left(\vec{n} \times \vec{A}\right) dS$ беттік интегралының көлемге қатынасы M нүктесінің төңірегіндегі құйынды (роторын) анықтайды. Нәтижесінде әрбір нүктенің төңірегінде векторлық құйындар өрісі пайда болады.

Соңғы қатынаста көлем нөлге ұмтылғандағы, яғни көлемнің M нүктесіне тартылғандағы шегі табылса, онда ол $\vec{A}(\vec{r})$ векторлық өрісінің M нүктесіндегі роторы деп аталады және $\left(rot\vec{A}\right)_M$ түрінде белгіленеді.

Анықтама бойынша:

$$\left(rot\vec{A}\right)_M = \lim_{\substack{\tau \to 0 \\ (\tau) \to M}} \frac{1}{\tau} \iint\limits_S \left(\vec{n} \times \vec{A}\right) dS. \qquad (2.14)$$

(2.14) формуласы ротордың координаттар жүйесіне тәуелсіз инварианттық шама екенін көрсетеді.

Кейінірек осы анықтамаларға сүйене отырып, векторлық өрістің дифференциалдық сипаттамалары градиент, ротор және дивергенциялардың әртүрлі қисық сызықты координаттар жүйесінде жазылуын көрсетеміз.

Векторлық анализдің интегралдық теоремалары

Теорема Жай G облысында анықталған $P(x_1, x_2), Q(x_1, x_2)$ функциялары $\dfrac{\partial P}{\partial x_2}, \dfrac{\partial Q}{\partial x_1}$ дербес туындыларымен бірге сол облыста үзіліссіз болсын. Сонда

$$\oint\limits_L P dx_1 + Q dx_2 = \iint\limits_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x_1} - \frac{\partial P}{\partial x_2}\right) dx_1 dx_2 \qquad (2.15)$$

теңдігі орынды. Мұнда қисық сызықты интеграл G облысының L шекарасының оң бағыты бойынша алынған.

Облыс бойынша алынған интегралды оның шекаралық екінші ретті қисық сызықты интегралымен байланыстыратын (2.15) формуласын Грин формуласы деп атайды.

Теорема. Тегіс L қисығымен шенелген тұйық G облысында $u(x_1, x_2)$ және $v(x_1, x_2)$ функциялары өздерінің бірінші және екінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болсын. Онда Гриннің екінші формуласы орынды:

$$\oint_L \begin{vmatrix} u & v \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n} \end{vmatrix} dl = \iint_G \begin{vmatrix} u & v \\ \Delta u & \Delta v \end{vmatrix} dx_1 dx_2 ,$$

мұнда $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ дербес туындысы L контурының сыртқы нормалінің бағыты бойынша алынған туынды, $\Delta u = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$, ал сол жақтағы өрнек бірінші ретті қисық сызықты интегралды көрсетеді.

Бұл формуланың алда қажеттілігіне байланысты дәлелдеуін қарастырайық.

Алдымен

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n} dl = \iint_G \left(v\Delta u + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \qquad (2.16)$$

теңдігін дәлелдейік.

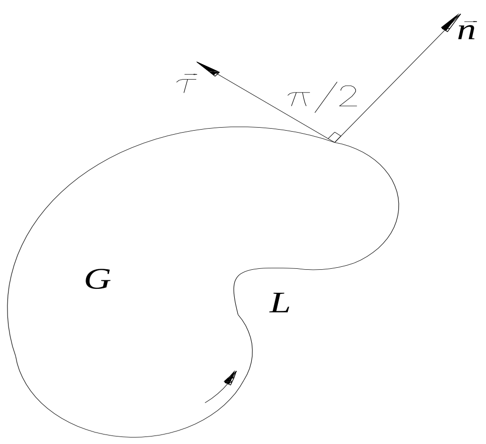
$\vec{n} = \{\cos\varphi, \sin\varphi\}$ векторы L қисығының сыртқы бірлік нормаль векторы болсын. Онда

$$\oint_L v\frac{\partial u}{\partial n} dl = \oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\varphi + v\frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi \right) dl ,$$

өйткені бағыт бойынша алынған туындының анықтамасы бойынша $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \vec{n}\cdot grad u = \dfrac{\partial u}{\partial x_1}\cos\varphi + \dfrac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi$.

$\vec{\tau} = \{\cos\alpha, \sin\alpha\}$ - контурдың оң бағытымен бағыттас бірлік жанама векторы (8-сур. қара).

Сонда $\alpha = \varphi + \pi/2, \cos\alpha = -\sin\varphi, \sin\alpha = \cos\varphi$. Енді қисық сызықты бірінші ретті интегралды қисық сызықты екінші ретті интеграл арқылы өрнектейік. Содан кейін Гриннің бірінші формуласын пайдаланамыз.



8-сурет. Грин теоремасына қатысты облыс

$$\oint_L \left(v\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\varphi + v\frac{\partial u}{\partial x_2}\sin\varphi \right) dl = \oint_L \left(-v\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 + \left(v\frac{\partial u}{\partial x_1} \right) dx_2 =$$

$$= \iint_G \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + v\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 =$$

$$= \iint_G \left(v\Delta u + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Сонымен (2.16) теңдігінің дұрыстығы дәлелденді.

Енді (2.16) теңдігіндегі $u(x_1, x_2)$ және $v(x_1, x_2)$ функцияларының рольдерін ауыстырсақ,

$$\oint_L u\frac{\partial v}{\partial n} dl = \iint_G \left(u\Delta v + \frac{\partial v}{\partial x_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2}\frac{\partial u}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2 \qquad (2.17)$$

теңдігін аламыз.

Бұдан (2.16) және (2.17) теңдіктерінің айырымы Гриннің екінші формуласына әкеледі:

$$\oint_L \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dl = \iint_G (u\Delta v - v\Delta u) dx_1 dx_2 \ .$$

Теорема. Құрама-тегіс S бетімен шенелген жай тұйық G облысында анықталған $P(x_1, x_2, x_3), Q(x_1, x_2, x_3), R(x_1, x_2, x_3)$ функциялары $\frac{\partial P}{\partial x_1}, \frac{\partial Q}{\partial x_2}, \frac{\partial R}{\partial x_3}$ дербес туындыларымен бірге сол аймақта үзіліссіз болсын. Сонда

$$\iiint_G \left(\frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial Q}{\partial x_2} + \frac{\partial R}{\partial x_3} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iint_S P dx_2 dx_3 + Q dx_1 dx_3 + R dx_1 dx_2$$

формуласы Остроградский-Гаусс формуласы деп аталады. Мұнда беттік интеграл беттің сыртқы жағы бойынша алынады.

Теорема. Тегіс S бетімен шенелген жай тұйық G облысында $u(x_1, x_2, x_3)$ функциясы өзінің бірінші және екінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болсын. Сонда

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iiint_G \Delta u dx_1 dx_2 dx_3$$

теңдігі орынды. Мұнда $\quad \Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

Дәлелдеуін қарастырайық.

$\vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ векторы S бетінің сыртқы бірлік нормаль векторы болсын делік. Сонда

$\frac{\partial u}{\partial n} = \vec{n} \cdot grad u = \frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\gamma$. Бұдан

$$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n} dS = \iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial x_2}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial x_3}\cos\gamma \right) dS =$$

$$= \iint_S \frac{\partial u}{\partial x_1} dx_2 dx_3 + \frac{\partial u}{\partial x_2} dx_1 dx_3 + \frac{\partial u}{\partial x_3} dx_1 dx_2 =$$

$$= \iiint_G \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \right) dx_1 dx_2 dx_3 = \iiint_G \Delta u dx_1 dx_2 dx_3 .$$

Гамильтон операторы «*набла*»

Көптеген векторлық анализдің амалдары Гамильтонның «набла» операторының көмегімен қысқаша ыңғайлы түрде жазылады:

$$\nabla = \vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} .$$

Бұл операторда дифференциалдық және векторлық қасиеттер біріккен. Қолдануы:

1. Егер $u = u(x_1, x_2, x_3)$ скалярлық дифференциалданатын функция болса, онда скалярды векторға көбейту ережесі бойынша $\nabla u = \left(\vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) u = \vec{i}_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial u}{\partial x_3} = grad u$.

2. Егер $\vec{A} = A_1(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_2 + A_3(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_3$ болса, онда скалярлық көбейту ережесі бойынша

$$\left(\nabla, \vec{A}\right) = \left(\vec{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \vec{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \vec{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3}, A_1\vec{i}_1 + A_2\vec{i}_2 + A_3\vec{i}_3 \right) =$$

$$= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} = div\vec{A}$$

мұнда A_1, A_2, A_3 - дифференциалданатын функциялар. Дербес жағдайда $\left(\nabla, \vec{c}\right) = 0$ ($\vec{c}$ - тұрақты вектор).

3. Егер

$\vec{A} = A_1(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_1 + A_2(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_2 + A_3(x_1, x_2, x_3)\vec{i}_3$ болса, онда

$$\left[\nabla, \vec{A}\right] = \nabla \times \vec{A} = \begin{vmatrix} \vec{i}_1 & \vec{i}_2 & \vec{i}_3 \\ \partial/\partial x_1 & \partial/\partial x_2 & \partial/\partial x_3 \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix} = rot\vec{A},$$

дербес жағдайда $\left[\nabla, \vec{c}\right] = 0$ ($\vec{c}$ - тұрақты вектор).

Гамильтон операторының көмегімен скалярлық және векторлық шамаларға қолданылатын бірінші ретті дифференциалдық амалдар мен сызықтық қасиеттері:

$$\nabla u = gradu; \quad \nabla(\varphi+\psi) = \nabla\varphi + \nabla\psi;$$
$$\nabla\cdot\vec{A} = div\vec{A}; \quad \nabla\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \nabla\cdot\vec{A} + \nabla\cdot\vec{B};$$
$$\nabla\times\vec{A} = rot\vec{A}; \quad \nabla\times\left(\vec{A}+\vec{B}\right) = \nabla\times\vec{A} + \nabla\times\vec{B}.$$

Осы алынған нәтижелерге тағы бір рет «набла» операторын қолдансақ:

$$\nabla\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = graddiv\vec{A};$$
$$\nabla\cdot\nabla\varphi = divgrad\varphi = \nabla^2\varphi = \Delta\varphi;$$
$$\nabla\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) = divrot\vec{A} = 0;$$
$$\nabla\times\left(\nabla\times\vec{A}\right) = rotrot\vec{A}.$$

екінші ретті дифференциалдық амалдарды аламыз.

Бұл формулаларда координаттар жүйесіне тәуелсіз символдық «набла» операторының өрнегі былай жазылады:

$$\nabla(\ldots) = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\iint_S \vec{n}(\ldots)dS .$$

«Набла» операторының қолдану ережелері

1. Егер ∇ операторы қандайда бір көбейтіндіге әсер етсе, онда бірінші оның дифференциалдық, содан кейін векторлық қасиеттері ескеріледі.
2. ∇ операторының қандайда бір күрделі функцияның құрамына кіретін шамаға ықпалы жүрмейтін болса, онда ол шаманы төменнен $C(const)$ индексімен белгілейді.
3. Нәтиженің ақырында «набла» операторы ықпал етпейтін бүкіл шамалар «набланың» алдына қойылады.

Сонымен «набла» операторын $\varphi\psi, \varphi\vec{A}, \vec{A}\cdot\overline{B}, \vec{A}\times\vec{B}$ функцияларының көбейтіндісіне қолдану үшін әрбір көбейткішке екіншісін тұрақты деп санап, бөлек қолдану қажет. Қысқаша айтқанда «набла» операторы құрылымдағы тұрақтының соңында, ал айнымалының алдында тұрады.

1. $$grad\varphi\psi = \nabla\varphi\psi = \nabla\varphi_C\psi + \nabla\varphi\psi_C = \\ = \varphi_C\nabla\psi + \psi_C\nabla\varphi = \varphi\nabla\psi + \psi\nabla\varphi = \varphi grad\psi + \psi grad\varphi$$

2. $$div\varphi\vec{A} = \nabla\cdot\varphi\vec{A} = \nabla\cdot\varphi_C\vec{A} + \nabla\cdot\varphi\vec{A}_C = \varphi_C\nabla\cdot\vec{A} + \vec{A}_C\cdot\nabla\varphi = \\ = \varphi div\vec{A} + \vec{A}\cdot grad\varphi$$

3. $$div\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \nabla\cdot\left(\vec{A}_C\times\vec{B}\right) + \nabla\left(\vec{A}\times\vec{B}_C\right) = \\ = -\vec{A}_C\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) + \vec{B}_C\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \\ = -\vec{A}\cdot\left(\nabla\times\vec{B}\right) + \vec{B}\cdot\left(\nabla\times\vec{A}\right) = \vec{B}\cdot rot\vec{A} - \vec{A}\cdot rot\vec{B}; \qquad (2.48)$$

4. $$\begin{aligned} rot\varphi\vec{A} &= \left(\nabla\times\varphi\vec{A}\right) = \nabla\times\varphi_C\vec{A} + \nabla\times\varphi\vec{A}_C = \varphi_C\left(\nabla\times\vec{A}\right) + \left(\nabla\varphi\times\vec{A}_C\right) = \\ &= \varphi rot\vec{A} + \left(grad\varphi\times\vec{A}\right) = \\ &= \varphi rot\vec{A} - \left(\vec{A}\times grad\varphi\right); \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} rot\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) &= \nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}\right) = \nabla\times\left(\vec{A}_C\times\vec{B}\right) + \nabla\times\left(\vec{A}\times\vec{B}_C\right) = \\ &= \vec{A}_C\left(\nabla\cdot\vec{B}\right) - \left(\vec{A}_C\cdot\nabla\vec{B}\right) + \left(\vec{B}_C\cdot\nabla\vec{A}\right) - \vec{B}_C\left(\nabla\cdot\vec{A}\right) = \\ &= \vec{A}div\vec{B} - \left(\vec{A}\cdot\nabla\right)\vec{B} + \left(\vec{B}\cdot\nabla\right)\vec{A} - \vec{B}div\vec{A}; \end{aligned}$$

6. $rotrot\vec{A} = graddiv\vec{A} - \Delta\vec{A}$.

«Набла» операторын күрделі функцияларға қолдану

$$\left.\begin{aligned} grad\varphi f\left(\vec{r}\right) &= \frac{d\varphi}{df}gradf, \\ div\vec{A}\left(f\left(\vec{r}\right)\right) &= grad\varphi\cdot\frac{d\vec{A}}{df}, \\ rot\vec{A}\left(f\left(\vec{r}\right)\right) &= gradf\times\frac{d\vec{A}}{df}. \end{aligned}\right\}$$

Теорема. Құрама-тегіс L контурымен шенелген G облысының ішінде жайғасқан бағдарланған S бетінде анықталған $A_1(x_1,x_2,x_3), A_2(x_1,x_2,x_3), A_3(x_1,x_2,x_3)$ функциялары өзінің бірінші ретті дербес туындыларымен бірге үзіліссіз болсын. Сонда

$$\oint_L A_1dx_1 + A_2dx_2 + A_3dx_3 =$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3}\right)dx_2dx_3 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1}\right)dx_1dx_3 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 \qquad (2.18)$$

теңдігі орынды. Мұнда L контуры оң бағытпен айналады, яғни контур бойымен жылжығанда облыс үнемі сол жақта қалады.

Тұйық контур бойынша алынған екінші ретті қисық сызықты интегралды L контурымен шенелген екінші ретті беттік интегралмен байланыстыратын (2.18) формуласын Стокс формуласы деп атайды.

Ескерту. Қайсыбір координаттар жүйесіне параллель жазық облыс үшін де Стокс формуласы орынды. Мысалы, егер S беті XOY жазықтығына параллель болса, онда $\vec{n} = \{0,0,1\}$, $\oint_L A_3dx_3 = 0$.

Бұдан Стокс формуласынан жазық облыс үшін Грин формуласы шығады:

$$\oint_L A_1dx_1 + A_2dx_2 = \iint_S \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2}\right)dx_1dx_2 .$$

Векторлық өрістің сипаттамалары

1. $\int\limits_L (\vec{a},\vec{\tau})dl = \int\limits_L a_\tau dl$ - Векторлық өрістің $\vec{a}$ циркуляциясы.

2. $\iiint\limits_G div\vec{a}dV = \iint\limits_S (\vec{a},\vec{n})dS$ - Векторлық түрдегі Остроградский-Гаусс формуласы.

3. $\oint\limits_L (\vec{a},\vec{\tau})dl = \iint\limits_S (rot\vec{a},\vec{n})dS$ немесе $\oint\limits_L (\vec{a},d\vec{r}) = \iint\limits_S (rot\vec{a},\vec{n})dS$ - Стокс формуласының векторлық түрі.

Мысал. Гриннің бірінші және екінші формулаларын векторлық түрге келтір.

Шешуі. Бізге φ, ψ скаляр функциялары берілсін делік. $\vec{a} = \varphi grad\psi$ векторын құрайық. Сонда

$$div\vec{a} = div(\varphi grad\psi) = \varphi div grad\psi + (grad\varphi, grad\psi) =$$
$$= \varphi\cdot\Delta\psi + (grad\varphi, grad\psi)$$

Енді Остроградский-Гаусс формуласын қолданайық:

$$\iint\limits_S (\vec{a},\vec{n}^0)dS = \iiint\limits_G div\vec{a}dV .$$

Біздің жағдайда

$$(\vec{a},\vec{n}^0) = (\varphi grad\psi,\vec{n}^0) = \varphi(\vec{n}^0, grad\psi) = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}$$

теңдігін ескеріп, нәтижесінде Гриннің бірінші формуласын аламыз:

$$\iiint\limits_V [\varphi\Delta\psi + (grad\varphi, grad\psi)]dV = \iint\limits_S \varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}dS . \qquad (2.19)$$

Дербес жағдайда, яғни $\varphi = \psi$ болғанда, жоғарыдағы формула былай жазылады:

$$\iiint\limits_V \left[\varphi\Delta\varphi + |grad\varphi|^2\right]dV = \iint\limits_S \varphi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS .$$

Егер (2.19) формуласында $\varphi \equiv 1$ болса, онда

$$\iiint\limits_V \Delta\psi dV = \iint\limits_S \frac{\partial\psi}{\partial n}dS .$$

(2.19) - формулада φ және ψ функцияларының орындарын ауыстыру нәтижесінде

$$\iiint\limits_V [\psi\Delta\varphi + (grad\psi, grad\varphi)]dV = \iint\limits_\Phi \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}dS \qquad (2.20)$$

теңдігін аламыз.

Сонда (2.19) және (2.20) теңдіктерінің айырымы Гриннің екінші формуласын береді.

Қисық сызықты координаттар жүйелерінде векторлық анализдің негізгі амалдары

1. $u(q_1, q_2, q_3)$ скалярлық өрісінің кез келген берілген бағыт бойынша тез өзгерісін табуға мүмкіндік беретін ең маңызды дифференциалдық сипаттамасының бірі – оның градиенті. Градиенттің q_1, q_2, q_3 қисық сызықты координаттар өстеріндегі проекцияларын тауып, келесі түрде жазайық:

$$\nabla u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1^{\,o} + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2^{\,o} + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3^{\,o}.$$

Цилиндрлік координаттар жүйесінде $(q_1 = \rho, q_2 = \varphi, q_3 = z)$:

$$grad u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho^{\,o} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi^{\,o} + \frac{\partial u}{\partial z}\vec{e}_z^{\,o},$$

сфералық координаттар жүйесінде $(q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi)$:

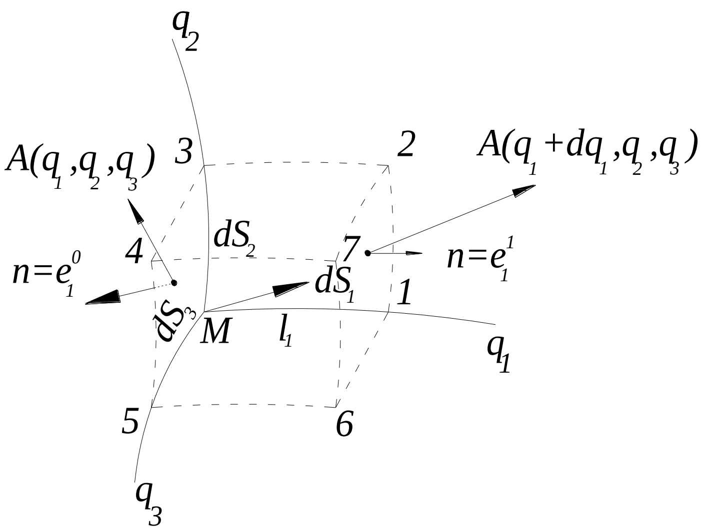
$$grad u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\vec{e}_\rho^{\,o} + \frac{1}{\rho \sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \theta}\vec{e}_\theta^{\,o} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi^{\,o}.$$

2. Векторлық өрістің әрбір нүктесінде оның сандық сипаттамасын беретін ұғым – дивергенция. Дивергенция ұғымы зерттелетін нүктенің төңірегін қамтитын (қоршайтын) тұйық беттің векторлық ағынымен тікелей байланысты. Сондықтан қисық сызықты координаттар жүйесінде дивергенция өрнегін анықтағанда оның координаттар жүйесіне тәуелсіз инварианттық анықтамасын пайдаланамыз.

$$div\vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \lim_{\tau \to 0}\frac{1}{\tau}\iint_S \vec{n} \cdot \vec{a} dS,$$

мұнда $d\tau = dS_1 dS_2 dS_3$ элементар көлем (9-сур. қара).

Алдымен $\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS$ интегралын анықтау үшін $\vec{a}$ векторлық өрісінің, элементар көлемнің қарама-қарсы жақтары арқылы өтетін векторлық ағынын табайық, мысалы (q_1) Алдымен $\iint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS$ интегралын анықтау үшін $\vec{a}$ векторлық өрісінің, элементар көлемнің қарама-қарсы жақтары арқылы өтетін векторлық ағынын табайық, мысалы (q_1)координаттық сызығына перпендикуляр жақтар арқылы (9-сур. қара).



9-сурет. Қисық сызықты координаттар жүйесінде элементар көлемнің беті арқылы өтетін векторлық ағын

M 345 жағының нормаль векторы - $\vec{n} = -\vec{e}_1^{\,o}$, онда бұл арқылы өтетін векторлық ағын

$$-\vec{e}_1^{\,o}\vec{a}dS_3dS_2 = -a_1H_2H_3dq_2dq_3 . \qquad (2.21)$$

Мұнда $a_1 = \vec{a}\cdot\vec{e}_1^{\,o}$.

1276 жағында q_1 координатасы шамасы dq_1 тең өсімше алады, онда (2.21) өрнегі де осыған сәйкес өсімше қабылдайды. Сондықтан өрістің векторлық ағыны бұл жақ арқылы $\left(a_1H_2H_3 + \dfrac{\partial(a_1H_2H_3)}{\partial q_1}dq_1\right)$ өрнегінің шамасына тең.

Осылай қалған басқа қос пара-пар жақтар арқылы өтетін өрістің векторлық ағындарын тауып, табылған бүкіл өрнектерді қосып, содан кейін ағымдағы нүктені қоршаған элементар көлемге бөлсек, онда сол нүктенің төңірегіндегі дивергенция өрнегінің шамасын аламыз.

$$div\vec{a} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(a_1H_2H_3) + \frac{\partial}{\partial q_2}(a_2H_1H_3) + \frac{\partial}{\partial q_3}(a_3H_1H_2)\right]$$ Цилиндрлік координаттар жүйесінде

$$q_1 = \rho,\ q_2 = \varphi,\ q_3 = z;$$

$$H_1 = 1,\ H_2 = \rho,\ H_3 = 1;$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho a_1)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial a_2}{\partial\varphi} + \frac{\partial a_3}{\partial z}.$$

Сфералық координаттар жүйесінде

$$q_1 = \rho,\ q_2 = \theta,\ q_3 = \varphi;$$

$$H_1 = 1,\ H_2 = \rho\sin\theta,\ H_3 = \rho;$$

$$div\vec{a} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial\left(\rho^2 a_1\right)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial\left(\sin\theta\cdot a_2\right)}{\partial\theta} + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial a_3}{\partial\varphi}.$$

3. Сонымен жоғарыдағы сияқты векторлық құйынның координаттар жүйесіне тәуелсіз инварианттық анықтамасы бойынша

$$rot\vec{a} = \lim_{\tau\to 0}\frac{1}{\tau}\iint_S \left(\vec{n}\times\vec{a}\right)dS$$

векторлық құйынның қисық сызықты координаттар жүйесіндегі өрнегін аламыз.

$$rot\vec{a} = \vec{e}_1^{\,0}\frac{1}{H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_2}\left(a_3H_3\right) - \frac{\partial}{\partial q_3}\left(a_2H_2\right)\right] +$$

$$+\vec{e}_2^{\,0}\frac{1}{H_1H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_3}\left(a_1H_1\right) - \frac{\partial}{\partial q_1}\left(a_3H_3\right)\right] +$$

$$+\vec{e}_3^{\,0}\frac{1}{H_1H_2}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(a_2H_2\right) - \frac{\partial}{\partial q_2}\left(a_1H_1\right)\right].$$

Цилиндрлік координаттар жүйесінде:

$$rot\vec{a} = \left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial a_3}{\partial\varphi} - \frac{\partial a_\varphi}{\partial z}\right)\vec{e}_\rho^{\,o} + \left(\frac{\partial a_\rho}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial\rho}\right)\vec{e}_\varphi^{\,o} +$$

$$+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial}{\partial\rho}\left(a_4\rho\right) - \frac{\partial a_\rho}{\partial\varphi}\right)\vec{e}_z^{\,o};$$

сфералық координаттар жүйесінде:

$$rot\vec{a} = \vec{e}_\rho^{\,o}\frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\rho a_3\right) - \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\rho\sin\theta a_2\right)\right] +$$

$$+\vec{e}_\theta^{\,o}\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial a_1}{\partial\varphi} - \frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho a_3\right)\right] +$$

$$+\vec{e}_\varphi^{\,o}\frac{1}{\rho\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\sin\theta a_2\right) - \frac{\partial a_1}{\partial\theta}\right].$$

4. Векторлық сызықтардың дифференциалдық теңдеулері

$$\frac{H_1dq_1}{a_1\left(q_1,q_2,q_3\right)} = \frac{H_2dq_2}{a_2\left(q_1,q_2,q_3\right)} = \frac{H_3dq_3}{a_3\left(q_1,q_2,q_3\right)}.$$

Цилиндрлік координаттар жүйесінде:

$$\frac{d\rho}{a_1\left(\rho,\varphi,z\right)} = \frac{\rho d\varphi}{a_2\left(\rho,\varphi,z\right)} = \frac{dz}{a_3\left(\rho,\varphi,z\right)};$$

сфералық координаттар жүйесінде:

$$\frac{d\rho}{a_1(\rho,\theta,\varphi)} = \frac{\rho d\theta}{a_2(\rho,\theta,\varphi)} = \frac{\rho \sin\theta d\varphi}{a_3(\rho,\theta,\varphi)}.$$

5. Қисық сызықты координаттар жүйесінде ағынды есептеу. $q_2 = \alpha_1,\ q_2 = \alpha_2\ (\alpha_1 < \alpha_2);$ $q_3 = \beta_1,\ q_3 = \beta_2\ (\beta_1 < \beta_2)$ координаттық сызықтарымен шенелген $q_1 = const$ координаттық беттің бөлігі S болсын делік. Сонда

$$\vec{a} = a_1(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_1 + a_2(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_2 + a_3(q_1,q_2,q_3)\vec{e}_3$$

өрісінің $\vec{e}_1$ векторының бағыты бойынша S беті арқылы өтетін векторлық ағыны

$$\Pi = \int_{\alpha_1}^{\alpha_2}\int_{\beta_1}^{\beta_2} a_1(c,q_2,q_3)H_2(c,q_2,q_3)H_3(c,q_2,q_3)dq_2dq_3$$

формуласымен есептеледі.

6. Қисық сызықты координаттар жүйесінде потенциалды табу. Векторлық өрістің потенциалы табылатын $\vec{a}(M) = grad\, u(M)$ теңдігі келесі түрде жазылады

$$a_1\vec{e}_1 + a_2\vec{e}_2 + a_3\vec{e}_3 = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\vec{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\vec{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\vec{e}_3.$$

Бұдан $\dfrac{\partial u}{\partial q_1} = a_1H_1,\ \dfrac{\partial u}{\partial q_2} = a_2H_2,\ \dfrac{\partial u}{\partial q_3} = a_3H_3$ дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер жүйесін интегралдап, ізделіп отырған потенциалды табамыз:

$$u = u(q_1,q_2,q_3) + C,$$

мұнда C – кез келген тұрақты.

Цилиндрлік координаттар жүйесінде:

$$\frac{\partial u}{\partial \rho} = a_\rho,\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = \rho a_\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial z} = a_z;$$

Сфералық координаттар жүйесінде:

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_r,\ \frac{\partial u}{\partial \theta} = r a_\theta,\ \frac{\partial u}{\partial \varphi} = r\sin\theta \cdot a_\varphi.$$

7. Қисық сызықты координаттар жүйесінде векторлық өрістің циркуляциясы мен сызықтық интегралын есептеу. Кез келген ағымдағы $M(q_1,q_2,q_3)$ нүктесінің радиус-векторының дифференциалы

$$d\vec{r} = H_1dq_1\vec{e}_1 + H_2dq_2\vec{e}_2 + H_3dq_3\vec{e}_3$$

екені белгілі. Сондықтан бағдарланған тегіс немесе құрама-тегіс $L \subset G$ қисығы бойынша алынған сызықтық интеграл

$$\int_L(\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_1H_1dq_1 + a_2H_2dq_2 + a_3H_3dq_3$$

өрнегін береді.

Цилиндрлік координат жүйесінде:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_\rho d\rho + a_\varphi \rho d\varphi + a_z dz ;$$

Сфералық координат жүйесінде:

$$\int_L (\vec{a}, d\vec{r}) = \int_L a_\rho d\rho + \rho a_\theta d\theta + r a_\varphi \sin\theta d\varphi .$$

8. Жоғарыдағы формулаларды пайдаланып ***Лаплас операторы*** үшін төмендегі өрнекті аламыз:

$$\Delta u = div\, grad\, u =$$

$$= \frac{1}{H_1 H_2 H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2 H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1 H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1 H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right]$$

Цилиндрлік координат жүйесінде:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

Сфералық координат жүйесінде:

$$\Delta u = \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\left[\begin{array}{l}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \sin\theta\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)\end{array}\right] =$$

$$= \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}.$$

Жоғарыдағы тақырыпқа байланысты практикалық есептер қарастырайық.

Мысал. $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ сферасы бойынша алынған $I = \oiint_S \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} dS$ беттік интегралын тап, мұнда

$$\varphi = x^2 + y^2, \psi = y^2 + z^2 .$$

Шешуі. Ізделініп отырған интеграл Гриннің бірінші формуласы негізінде $I = \iiint_V [\varphi \Delta \psi + (grad\,\varphi, grad\,\psi)] dV$ тең. Бұл жерде

$$\Delta \psi = 4, grad\,\varphi = 2x\vec{i} + 2y\vec{j}, grad\,\psi = 2y\vec{j} + 2z\vec{k};$$

$$(grad\,\varphi, grad\,\psi) = 4y^2,$$

сондықтан

$$I = \iiint_V (4x^2 + 4y^2 + 4y^2) dV = 4\iiint_V (x^2 + 2y^2) dV .$$

Соңғы интегралда

$$x = r\cos\varphi \sin\theta, y = r\sin\varphi \sin\theta, z = r\cos\theta$$

сфералық координаттар жүйесіне көшсек,

$$I = 4\iiint_V \left(r^2\cos^2\varphi\sin^2\theta + 2r^2\sin^2\varphi\sin^2\theta\right)r^2\sin\theta dr d\theta d\varphi =$$

$$= 4\int_0^{2\pi}\left(\cos^2\varphi + 2\sin^2\varphi\right)d\varphi\int_0^{\pi}\sin^3\theta d\theta\int_0^1 r^4 dr =$$

$$= \frac{4}{5}\int_0^{2\pi}\left(1+\sin^2\varphi\right)d\varphi\int_0^{\pi}\left(1-\cos^2\theta\right)\sin\theta d\theta =$$

$$= \frac{12}{5}\pi\left(-\cos\theta + \frac{1}{3}\cos^3\theta\right)\Bigg|_0^{\pi} = \frac{16}{5}\pi.$$

Мысал. $S: x^2+y^2=R^2, z=0, z=H, H>0$ тұйық беті бойынша алынған беттік $I = \oiint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS$ интегралды тап, мұнда $\varphi = x^2+y^2+x+z, \psi = x^2+y^2+2z+x$.

Шешуі. Ізделініп отырған интеграл Гриннің екінші формуласы негізінде

$$I = \oiint_S \left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)dS = \iiint_V \left(\varphi\Delta\psi - \psi\Delta\varphi\right)dV$$

тең. Бұл жерде $\Delta\varphi = 4, \Delta\psi = 4$, яғни $I = -4\iiint_V zdV$. Соңғы интегралда $x = \rho\cos\varphi, y = \rho\sin\varphi, z = z$ цилиндрлік координаттар жүйесіне көшсек,

$$I = -4\iiint_V \rho z d\rho d\varphi dz = -4\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R \rho d\rho\int_0^H zdz = -2\pi R^2H^2.$$

Мысал. u және v скалярлық өрістері үшін

$$div(ugrad\, v) = (grad\, u, grad\, v) + u\Delta v$$

формуласының дұрыстығын тексер.

Дәлелдеуі. Гамильтон операторын қолданайық:

$$div(ugradv) = \nabla\cdot(u\nabla v) = \nabla\cdot(u_c\nabla v) + \nabla\cdot(u\nabla v_c) =$$

$$= u_c(\nabla\cdot\nabla v) + (\nabla u\cdot\nabla v_c) =$$

$$= u\Delta v + (gradu, gradv).$$

Мысал. u және v скалярлық өрістері үшін

$$\Delta(uv) = v\Delta u + 2(gradu, gradv) + u\Delta v$$

формуласының дұрыстығын тексер.

Дәлелдеуі. $\Delta u = (\nabla\cdot\nabla u), \nabla(uv) = v\nabla u + u\nabla v$ және $(\nabla\cdot v\nabla u) = (\nabla u\cdot\nabla v) + v\Delta u$ формулаларын пайдалансақ:

$$\Delta(uv) = (\nabla \cdot \nabla(uv)) = (\nabla \cdot (v\nabla u + u\nabla v)) = (\nabla \cdot v\nabla u) + (\nabla \cdot u\nabla v) =$$
$$= (\nabla v \cdot \nabla u) + v\nabla^2 u + (\nabla u \cdot \nabla v) + u\nabla^2 v =$$
$$= v\Delta u + 2(gradu, gradv) + u\Delta v.$$

Мысал. Цилиндрлік координаттар жүйесінде берілген векторлық өрістің $\vec{a} = \sin\varphi \vec{e}_\rho + \dfrac{\cos\varphi}{\rho}\vec{e}_\varphi - \rho z \vec{e}_z$ құйынын (роторын) есепте.

Шешуі.

$$rot\vec{a} = \begin{vmatrix} \frac{1}{\rho}\vec{e}_\rho & \vec{e}_\varphi & \frac{1}{\rho}\vec{e}_z \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z \\ \sin\varphi & \cos\varphi & -\rho z \end{vmatrix} = z\vec{e}_\varphi - \frac{\cos\varphi}{\rho}\vec{e}_z .$$

Мысал. Жай тұйық G облысын шенейтін S беті бойынша алынған $I(\xi,\eta,\zeta) = \iint\limits_S \dfrac{\cos\varphi}{r^2} dS$ Гаусс интегралын есепте. Мұнда $N(\xi,\eta,\zeta)$ - G облысынан сырт бекітілген нүкте; $M(x,y,z) \in S$; $\vec{r} = \{x-\xi, y-\eta, z-\zeta\}, r = |\vec{r}|; \vec{n} = \{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$ S бетіне тиісті M нүктесі арқылы жүргізілген сыртқы бірлік вектор; φ бұрышы $\vec{r}$ және $\vec{n}$ векторларының арасындағы бұрыш.

Шешуі. $\vec{r}$ және $\vec{n}$ векторларының арасындағы бұрыштың косинусын өрнектейік:

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{n},\vec{r})}{|\vec{n}||\vec{r}|} = \frac{(x-\xi)\cos\alpha + (y-\eta)\cos\beta + (z-\zeta)\cos\gamma}{r}.$$

Сонда беттік интеграл I келесі түрде жазылады:

$$I = \iint\limits_S \left(\frac{x-\xi}{r^3}\cos\alpha - \frac{y-\eta}{r^3}\cos\beta + \frac{z-\zeta}{r^3}\cos\gamma \right) dS .$$

Демек $P = \dfrac{x-\xi}{r^3}, Q = \dfrac{y-\eta}{r^3}, R = \dfrac{z-\zeta}{r^3}$ функциялары өздерінің бірінші ретті туындыларымен бірге G облысында үзіліссіз, өйткені $N(\xi.\eta,\zeta)$ нүктесі G облысынан сырт жатады. Сондықтан бұл интегралға Гаусс-Остроградский формуласын қолдануға болады. Ол үшін:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(x-\xi)^2}{r^5}, \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(y-\eta)^2}{r^5}, \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{1}{r^3} - \frac{3(z-\zeta)^2}{r^5}$$ дербес туындыларын табайық және

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3}{r^2} - \frac{3r^2}{r^5} \equiv 0$$ нөлге тең екеніне көз жеткізейік.

Сонда

$$I(\xi,\eta,\zeta)=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)dV=0.$$

Жаттығулар

1. $S: x^2+y^2+z^2=a^2$ сфера беті бойынша алынған Гаусс $I(0,0,0)$ интегралын есепте.

2. Ω - құрама-тегіс S бетімен шенелген көлем делік. Онда $\iint\limits_S \cos(\vec{r},\vec{n})dS = 2\cdot\iiint\limits_\Omega \frac{1}{|\vec{r}|}dV$ формуласының дұрыстығын тексер. Мұндағы $\vec{r}=\{x,y,z\}$, $\vec{n}$ - сыртқы нормаль вектор.

3. $\vec{a}=\frac{2\cos\theta}{r^3}\vec{e}_r+\frac{\sin\theta}{r^3}\vec{e}_\theta$ векторлық өрісінің соленоидальды болатынын көрсет.

4. Сфералық координаттар жүйесінде берілген $\vec{a}=r^2\theta\vec{e}_r+r^2e^{2\theta}\vec{e}_\theta$ векторлық өрісінің центрі бас нүктеде, радиусы R жартысфераның S сыртқы жағы бойынша өтетін ағынын тап.

5. Цилиндрлік координаттар жүйесінде берілген $\vec{a}=\left(\frac{arctgz}{\rho}+\cos\varphi\right)\vec{e}_\rho-\sin\varphi\vec{e}_\varphi+\frac{\ln\rho}{1+z^2}\vec{e}_z$ векторлық өрісінің потенциалын тап.

6. Идеал сығылмайтын сұйықтың көзі жоқ қалыптасқан ағысының жылдамдық векторының өрісі бір мезгілде потенциалды және соленоидальды екені белгілі. Сұйықтың ток сызықтары $u(x,y)=const$ теңдеуімен өрнектелетінін көрсет, мұнда $u(x,y)$ ток функциясы – кез келген тұрақтыға дейінгі дәлдікпен анықталатын $u(x,y)=\int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} v_x dy - v_y dx$ қисық сызықты интеграл (мұнда (x_0,y_0) – бекітілген, ал (x,y) – өрістің ағымдық нүктесі).

7. Идеал сығылмайтын сұйықтың қалыптасқан ағысында кез келген бөлшектің жылдамдығының сан мәні оның радиус-векторына тең. T көлемінен уақыт бірлігінде қандай сұйық мөлшері ағады?

8. Радиусы a – ға тең центрі координаттар жүйесінің бас нүктесінде орналасқан сфералық бет арқылы өтетін $\vec{F}=-\frac{\gamma m\vec{R}}{R^3}$ тартылыс күші өрісінің ағынын есептеу үшін Гаусс-Остроградский теоремасын қолдануға бола ма?

9. Сұйық ағынындағы сызықты жылдамдықтар өрісінің құйыны айналу өсімен бағыттас және шамасы жағынан екі еселенген бұрыштық айналу жылдамдығына тең екенін дәлелде.

10. Кез келген S тұйық беті арқылы өтетін $\vec{R}$ векторының роторының ағыны нөлге тең екенін көрсет.

3 - ТАРАУ. ФУНКЦИОНАЛДЫҚ АНАЛИЗ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

Функционалдық анализ ұғымдары және теоремалары қазіргі кезде математикада кеңінен қолданылады. Бұл тарауда келесі бөлімдерде пайдаланатын негізгі анықтамалар мен алғашқы ұғымдардың болмысын ашатын мәліметтер қамтылады.

Математиканың бүкіл болмысында (негізінде) сандар жатыр. *N, Z, Q, R* және *C* арқылы натурал, бүтін, рационал, нақты және комплекс сандар жиындарын белгілейтіндігін мектеп бағдарламасынан білеміз. *N, Z, Q, R* жиындарындағы сандардың геометриялық кескіні ретінде түзу сызық бойындағы нүктені бейнелеуге болады. Кез келген комплекс санға геометриялық кескіні ретінде жазықтықтың бір нүктесі және керісінше жазықтықтың әрбір нүктесіне бір комплекс сан сәйкестендіріледі. Яғни мұндай жиындардың арасында бірмәнді сәйкестік орнатылған. Ал үш өлшемді кеңістіктегі нүктенің орнын қандай бір санмен өрнектейміз деген сұраққа адамзат әлі де нақты жауап таппай отыр.

Математикада элементтері сандардан да бөлек жиындар қарастырылады. ***Жиын ұғымы*** – алғашқы ұғым, сондықтан оны жай ұғымдар арқылы анықтаудың кажеттілігі жоқ. Өзімізге түсінікті болу үшін жиынды табиғаты әртүрлі объектілердің жиынтығы ретінде қабылдауға болады. Жиынның әрбір қос элементіне сол жиында немесе басқа жиынға жататын үшінші бір элемент сәйкес қойылатын ереже – ***композиция заңдылығы*** деп аталады.

Қорыта келгенде белгілі ережелерді қанағаттандыратын, элементтерінің арасында кейбір амалдар тағайындалған табиғаты әртүрлі объектілердің жиыны ***математикалық құрылым*** деп аталады. Олардың қатарына топ, сақина, өріс тағы сол сияқтылар жатады.

Жиындарға амалдар қолдану:

1) *A* және *B* жиындары берілсін делік. Бұл жиындардың бірігуі деп әрбір элементі не *A* жиынына немесе *B* жиынына жататын $C = A \cup B$ жиынын айтады. Анықтама бойынша: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{немесе } x \in B\}$.

2) *A* және *B* жиындарының қиылысуы деп осы екі жиынға да ортақ элементтерден тұратын $C = A \cap B$ жиынын айтады. Анықтама бойынша: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ және } x \in B\}$.

3) *A* және *B* жиындарының айырымы деп *A* жиынының *B* жиынына енбейтін элементтерінен тұратын $C = A \setminus B$ жиынын айтады. Анықтама бойынша $A \setminus B = \{x \mid x \in A, \text{ бірақ } x \notin B\}$.

4) Дәл осы сияқты *B* және *A* жиындарының айырымы табылады $B \setminus A = \{x \mid x \in B, \text{ бірақ } x \notin A\}$.

5) $A \setminus B$ және $B \setminus A$ жиындарының бірігуін көрсететін симметриялық жиын келесі түрде анықталады $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$.

6) Егер $A \subset B$ болса, онда

$$A \cup B = B;\ A \cap B = A; A \setminus B = \{\emptyset\},$$

мұнда *A* жиыны *B* жиынының ішкі жиыны, яғни *A* жиынының барлық элементтері *B* жиынына тиісті.

Элементтерінің санын санауға мүмкіндік туғызатын жиынды ***ақырлы***, ал керісінше – ***ақырсыз*** жиын деп атаймыз. Басқаша айтқанда ақырлы жиын өзінің кез келген меншікті ішкі жиынымен өзара бірмәнді сәйкестікте болмайтын жиын, ал керісінше – ақырсыз жиын деп аталады. Ақырлы жиынның барлық элементтерінің саны оның қуаты деп аталатынын еске түсіре кетейік.

Ақырсыз жиындардың элементтерінің сандары қаншалықты екені туралы дерек іздеу маңызды емес. Кез келген жиынның мөлшерлік сипаттамасы оның қуаттылығында. Ақырсыз жиындар үшін қуаттылық тек өзара бірмәнді сәйкестік орнату арқылы анықталады.

Элементтерінің арасында бір мәнді сәйкестік орнатылатын жиындарды (*A* және *B*) ***өзара эквивалентті*** (қысқаша: эквивалентті) жиындар деп атайды. Немесе ***тең қуатты*** жиындар деп аталады және ол былай белгіленеді: $A \sim B$.

Қасиеттері:

1) Егер $A \sim B, B \sim C$ болса, онда $A \sim C$;

2) Егер $A \subset B \subset C$ және $A \sim C$ болса, онда $A \sim B$.

Ақырсыз жиындардың ішінде бүкіл натурал сандар жиынына эквивалентті ***саналымды жиынның*** қуаты ең кіші болады.

Математикалық анализдің ең негізгі ұғымдарының қатарына ***функционалдық тәуелділік*** жатады. Функция ұғымы XVII ғасырдан қалыптаса бастады. Бір айнымалының функциясы деп бір санға (анықталу облысы деп аталатын қандай да бір сандар жиынтығынан) басқа бір санды сәйкестендіретін ережені айтады. Белгілеуі: $f : X \to Y$. Мұнда *X* – функцияның анықталу облысы, *Y* – мәндер жиыны (өзгеру облысы) деп аталады. Бұл сандық жиындар үшін. Осы ереженің негізінде біз сандық функцияларды қарастырамыз. Ал табиғаты әртүрлі жиындар үшін бұл ереже (заңдылық) қалай орындалады және мұндай сәйкестік қалай аталады деген сұраққа жауап беруіміз керек.

Табиғаттары әртүрлі *X* және *Y* жиындарының арасында әрбір $x \in X$ элементіне толықтай анықталған жалғыз $y \in Y$ элементі сәйкес қойылса, онда бұл жиындардың арасында $y = f(x)$ ***операторы*** берілген деп саналады. Бұл жағдайда да *X* жиынының *Y* жиынына бейнелеуін $f : X \to Y$ арқылы жазады. Дербес жағдайда, егер оператордың мәндер жиыны тек нақты немесе комплекс сандардан тұрса, мұндай операторды ***функционал*** деп атайды.

Осы жалпы түрде анықталған операторлардың қасиеттеріне қатысты еш нәрсе айта алмаймыз. Сондықтан қосымша ұйғарымдар енгізуіміз қажет.

Анализде тәуелділік ұғымымен қатар негізгі ұғымдар қатарына ***шек*** және осыған байланысты ***үзіліссіздік*** ұғымдары жатады. Қайсыбір жиында қабылданған немесе басқа тәсілмен сол жиындағы элементтер тізбегінің шегі туралы ұғым анықталса, онда бастапқы жиын ***математикалық кеңістік*** деп аталады.

Элементтері функциялар немесе сандық тізбектер болатын кеңістіктерді ***функционалдық кеңістіктер*** деп атаймыз. Функционалдық кеңістіктерде анықталған қандайда бір операторлар класын зерттеу функционалдық анализдің маңызды құрамы болып табылады.

Функционалдық анализді пайдаланатын қандайда бір ұғымдарға тоқталайық.

Қолданбалы математикада функционалдық кеңістіктер теориясы физиканың іргелі заңдарының бірі «ең кіші әрекет» (принцип наименьшего действия) принципін терең мағынада ұғыну үшін қолданылады.

Функционалдық анализ курсын тереңірек түсінуге оқырман назарын арнайы кітаптарға аударамыз (тізімі кітаптың соңында берілген).

Анықтама. Элементтерін векторлар деп атайтын табиғаты әртүрлі объектілер болуы мүмкін қандайда бір *L* жиыны берілсін делік. Бұл жиынның кез келген $x, y \in L$ элементтеріне $x + y$ символымен белгіленетін және олардың қосындысы деп аталатын сол жиындағы элемент сәйкес қойылсын деп ұйғарайық. Сонымен қатар кез келген $\alpha \in K$ саны мен кез келген $x \in L$ элементі үшін сол жиындағы αx элементі сәйкес қойылсын.

Жоғарыдағы анықталған амалдар үшін төмендегі қасиеттер орындалатын болса, онда L жиыны ***сызықтық*** (***векторлық***) кеңістік құрайды.

Барлық $x, y, z \in L$ үшін:

1. $x + y = y + x$;
2. $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3. Кез келген $x \in L$ элементі үшін $0 + x = x$ теңдігі орындалатын нөлдік $0 \in L$ элементі табылады;
4. Әрбір $x \in L$ элементі үшін $x + (-x) = 0$ теңдігі орындалатын тек бір қарама-қарсы элемент $(-x)$ табылады;

Кез келген $\alpha, \beta \in K$ және $x, y \in L$ үшін:

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y$;
8. $1 \cdot x = x$.

Мұндағы *K* не нақты сандар жиыны, не комплекс сандар жиыны.

Сызықтық кеңістік құрайтын бірнеше мысалдар қарастырайық.

1. Бүкіл R^2, R^3 кеңістігіндегі еркін векторлар жиынтығы сызықтық кеңістік құрайды.
2. $[a, b]$ аралығында берілген бүкіл үзіліссіз функциялар жиынтығы сызықтық кеңістік құрайды. Белгіленуі: $C[a, b]$.
3. Дәрежелері натурал n санынан артпайтын бүкіл көпмүшеліктер жиынтығы сызықтық кеңістік құрайды.
4. Өлшемдері $m \times n$ болатын бүкіл матрицалар жиынтығы сызықтық кеңістік құрайды. Белгіленуі: $M_{m\times n}$.

Анықтама. L – сызықтық кеңістік болсын делік. Онда $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n$ өрнегін $x_1, x_2, ..., x_n$ элементтерінің (векторларының) сызықтық комбинациясы деп атайды.

Анықтама. Егер $x_1, x_2, ..., x_n$ элементтерінің сызықтық комбинациясы, барлығы бірдей нөлге тең емес $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ сандары үшін нөлдік элементке тең болса, яғни

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = 0,$$

онда $x_1, x_2, ..., x_n$ элементтері (векторлары) өзара сызықтық тәуелді векторлар жүйесін құрайды.

Анықтама. Егер керісінше сызықтық комбинацияның нөлдік элементке теңдігі тек барлық $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_n = 0$ жағдайында орындалса, онда $x_1, x_2, ..., x_n$ векторлары өзара сызықтық тәуелсіз векторлар жүйесін құрайды.

Анықтама. Егер қандайда бір векторлық кеңістікте сызықтық тәуелсіз n векторлар жүйесі табылып, а сол кеңістіктегі $n+1$ векторлар жүйесі сызықтық тәуелді болса, онда ол кеңістік n өлшемді сызықтық кеңістік деп аталады.

Анықтама. Векторлық кеңістіктің құрамына кіретін сызықтық тәуелсіз векторлардың ең үлкен саны сол кеңістіктің өлшемін көрсетеді.

Анықтама. Шектеулі өлшемді кеңістік ақырлы, ал кері жағдайда ақырсыз өлшемді деп аталады. Мысалы $C[a,b]$ кеңістігі ақырсыз өлшемді.

Анықтама. n сызықтық тәуелсіз векторлар жиынтығы n өлшемді векторлық кеңістіктің базисі деп аталады.

Теорема (дәлелдеусіз). L^n кеңістігі n өлшемді сызықтық кеңістік болсын делік. Онда оның кез келген элементін (векторын) бекітілген координат жүйесінде базистік векторлардың сызықтық комбинациясы ретінде жіктеуге болады. Мұндай жіктеу тек бір-ақ түрде орындалады.

Сонымен, егер $f_1, f_2, ..., f_n$ элементтері L^n кеңістігінде базис құрса, онда $x = x_1 f_1 + x_2 f_2 + ... + x_n f_n$ теңдігін жазамыз. Ал мұндағы $x_1, x_2, ..., x_n$ сандары x элементінің сол базистегі координаттары деп аталады.

Ескерту. Сызықтық кеңістіктің элементтерін векторлар деп атайтынын естен шығармау керек, және сызықтық, векторлық атаулары синоним сөздер.

Енді L^n - сызықтық кеңістігінің элементтерінің арасында төмендегі аксиомалар орындалсын делік:

1. $(x, y) = (y, x)$;
2. $(x + y, z) = (x, z) + (y, z)$;
3. $(\lambda x, y) = \lambda(x, y)$;
4. $(x, x) \geq 0$, $(x, x) = 0$, егер $x = 0$.

Мұнда әрбір қос $x, y \in L^n$ элементке (x, y) нақты саны сәйкес қойылған. Яғни сызықтық кеңістікте скалярлық көбейтіндінің көмегімен функционал анықталған. Сонда сызықтық кеңістіктен элементтерінің арасында арақашықтық ұғымы енгізілген n өлшемді ***Евклид кеңістігіне*** көшеміз.

Мысал. $f(t), g(t) \in C[a,b]$ сызықтық кеңістіктің элементтері (яғни векторлары) болсын; бұл функциялардың скалярлық көбейтіндісін олардың көбейтінділерінің анықталған интегралы түрінде анықтаймыз:

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)dt .$$

Жалпы алғанда математикада базистік векторларының саны шексіз көп болатын кеңістіктердің де қарастырылатынын ескертеміз.

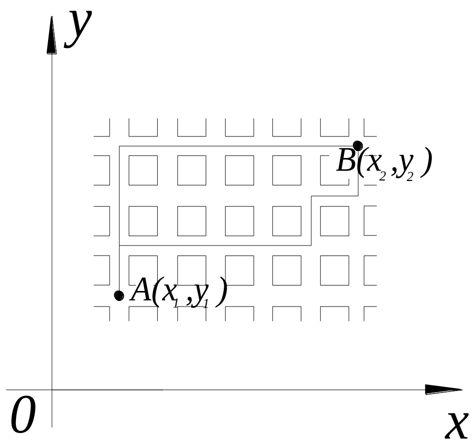
Метрикалық кеңістік – кез келген екі нүктесі (элементі) үшін арақашықтық ұғымы анықталған жиын.

Анықтама. X – кез келген жиын болсын делік. Егер келесі аксиомалар орындалса:

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ (симметриялық);
2. $\rho(x, y) \geq 0$ және $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (оң және тепе-теңдік);
3. $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geq \rho(x, z)$ (үшбұрыш теңсіздігі),

онда $\rho : X \times X \to R$ бейнелеуі X жиынында метрика (немесе арақашықтық) анықталғанын көрсетеді.

Күнделікті өмірдің өзінде “арақашықтық” ұғымы әртүрлі жағдайға байланысты әртүрлі мағына білдіреді. Мысалы 10-суретте берілген $A(x_1, y_1)$ және $B(x_2, y_2)$ пункттерінің арақашықтығын қалай табамыз деген сұрақ қоялық:



10-сурет. Әртүрлі метриканың пайда болуы

1. Бұл нүктелерді $|AB|$ кесіндісімен қосып, оның ұзындығын арақашықтық ретінде алайық:

$$\rho_1(A, B) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2} .$$

2. Егер біз (AB) түзуінің бойымен жүре алмайтын болсақ (жолай жөндеу жұмыстары жүргізіліп жатыр делік), онда арақашықтық ретінде көше бойымен жүргендегі төте жол ұзындығын алайық:

$$\rho_2(A, B) = |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1| .$$

3. Кейде есептің физикалық мағынасына байланысты осы жазықтықта

$$\rho_3(A,B)=\max\{|x_2-x_1|,|y_2-y_1|\}$$

арақашықтығы енгізіледі.

Бұл метрикалар үшін жоғарыдағы аксиомалардың орындалатынына көз жеткізу қиындыққа соқпайды. Дәлелдеулерін студенттердің өзіндік жұмыстарына ұсынамыз.

Қайсыбір жиында метрика (арақашықтық) анықталса, онда геометриялық объектілерді, мысалы шарды немесе нүктенің төңірегін осы метриканың негізінде суреттеуге болады.

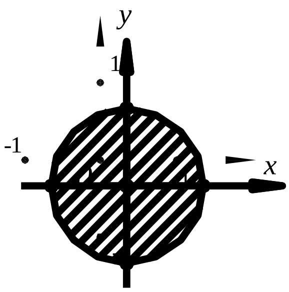
Анықтама. a – X метрикалық кеңістігінің элементі және $r>0$ болсын делік. Сонда $V_r(a)=\{x\in X : \rho(x,a)<r\}$ ішкі жиыны центрі a нүктесінде жататын радиусы r - ға тең ашық шарды береді.

Жоғарыда қарастырылған метрикалардың геометриялық мазмұнын центрі бас нүктеде жататын бірлік шардың көмегімен ашайық:

1. Евклид метрикасы үшін бірлік шар жай дөңгелекті анықтайды, өйткені $\rho_1(A,O)=\sqrt{x^2+y^2}\le 1$ (11- сур. қара);

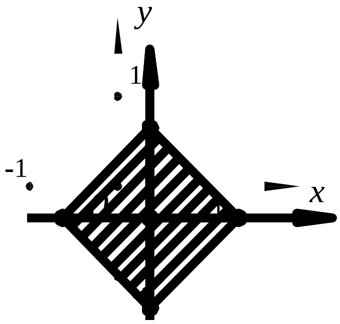
2. Екінші метрика үшін бірлік шар квадратты анықтайды, өйткені $\rho_2(A,O)=|x|+|y|\le 1$. Яғни осы теңсіздікті қанағаттандыратын жазықтықтағы бүкіл нүктелердің жиыны квадратты анықтайды (12-сур. қара);

3. Үшінші метрика үшін бірлік шар тағы да квадратты анықтайды. Бірақ бұл жолы қабырғалары координаттар өсіне параллель (13-сур. қара). Өйткені $\rho_3(A,O)=\max\{|x|,|y|\}\le 1$.



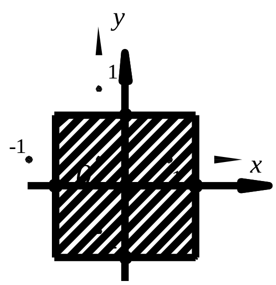
11-сурет

ρ_1*-метрикасына қатысты*



12-сурет

ρ_2*-метрикасына қатысты*

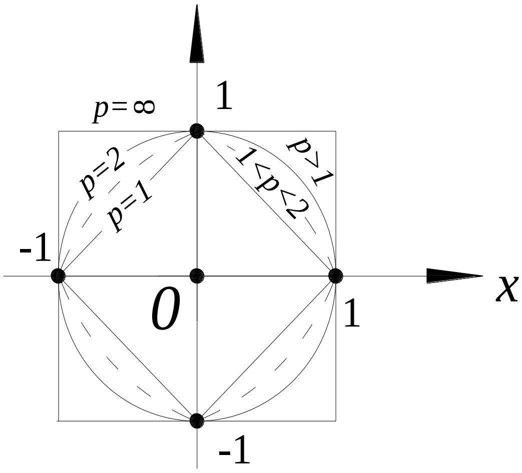


13-сурет

ρ_3*-метрикасына қатысты*

Функционалдық анализ курсында R^2 нүктелер жиынында анықталған $\rho_p(A,B)=\left(|x_2-x_1|^p+|y_2-y_1|^p\right)^{1/p}$ өрнегінің метрика болатыны Минковскийдің теңсіздігі арқылы дәлелденеді. Ал бұл метриканың геометриялық мазмұнын 14-суреттен ұғуға болады.

Ескерту. p параметрі шексіздікке ұмтылғанда $\rho_3 = \max\{|x|,|y|\}$ метрикасымен анықталған бірлік шар квадратты береді. Сондықтан көп жағдайда ρ_3- ті ρ_∞ арқылы белгілейді. Сонда $\rho_\infty = \max\{|x_2 - x_1|,|y_2 - y_1|\}$.



14-сурет. ρ_∞ *- метрикасының геометриялық мазмұны*

Ескерту. Әрине, бұл айтылғандарды R^n нүктелер жиынына көшіруге болады.

Ескерту. Метрикалық кеңістік міндетті түрде сызықтық кеңістік болу керек деген ұғымнан аулақ болу керек.

Егер сызықтық кеңістіктің кез келген элементі үшін $\forall x, x \in L$ келесі шарттарды қанағаттандыратын $\|x\|$ нақты саны табылса, онда сызықтық кеңістік ***нормаланған кеңістік*** деп аталады.

1. $\|x\| \geq 0$, және $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Нормаланған кеңістік метрикалық болады: $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (метрикалық кеңістіктің аксиомаларының дұрыстығын тексеруді өзіндік жұмыска тапсырамыз). Нормаланған кеңістікте тізбектердің жинақтылық ұғымын қарастырайық: егер $x_n \in N, n = 1,2,...$ элементтерінің тізбегі үшін $n \to \infty$ ұмтылғанда $\|x_n - x\| \to 0$ шегі орындалса, онда $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Бұл жинақтылық норма бойынша жинақтылық деп аталады.

Лемма. Егер $n \to \infty$ ұмтылғанда $x_n \to x_0$, онда $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Дәлелдеуі. Кез келген $x, y \in N$ элементтері үшін үшбұрыш теңсіздігінен $\|x\| = \|x - y + y\| \leq \|x - y\| + \|y\|$ шығады. Бұдан $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$. Бұл жерде x пен y – тің орындарын ауыстырып,

$\|y\| - \|x\| \le \|x - y\|$ теңсіздігіне көшеміз. Сонда соңғы екі теңсіздіктен жоғарыда жазылған шығады. Енді $n \to \infty$ ұмтылғанда $x_n \to x_0$ ұмтылсын делік. Сонда $\left\| \|x_n\| - \|x_0\| \right\| \le \|x_n - x_0\| \to 0$ немесе $n \to \infty$, $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

Мысал ретінде $[a,b]$ кесіндісінде үзіліссіз $C[a,b]$ функциялар кеңістігін қарастырайық. Бұл кеңістікте норманы келесі түрде енгізейік: $\|x(t)\| = \max\limits_{a<t<b} |x(t)|$. $C[a,b]$ кеңістігінде норма бойынша жинақтылық ***бірқалыпты жинақтылық*** деп аталады. Коши критериі бойынша үзіліссіз функциялар тізбегінің бірқалыпты жинақтылығының қажетті және жеткілікті шарттары оның фундаменталдығында.

Мысал. $C[0,1]$ кеңістігінде берілген $f(x) = x^2$, $g(x) = x^3$ функцияларының $\rho(f,g)$ арақашықтығын табайық. Анықтама бойынша $\rho(f,g) = \max\limits_{x\in[a,b]} |f(x) - g(x)| = \max\limits_{x\in[0,1]} |x^2 - x^3|$. Демек $h(x) = f(x) - g(x)$ функциясының $[0,1]$ кесіндісіндегі ең үлкен мәнін табу керек. Кесіндінің шеткі нүктелерінде $h(x) = 0$. Келесі қадамда $h'(x)$ туындысын нөлге теңестіріп, кризистік нүктелерін табайық: $h'(x) = 2x - 3x^2 = 0$, бұдан $x = 0$, $x = 2/3$. Екінші ретті туындысы арқылы зерттейік: $h''(x) = 2 - 6x$, $h''(2/3) = -2\langle 0$. Яғни $x = \dfrac{2}{3}$ нүктесі максимум нүктесі және $h\left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{4}{9} - \dfrac{8}{27} = \dfrac{4}{27}$. Олай болса $\rho(f,g) = \dfrac{4}{27}$.

Метрикалық кеңістіктің элементтерінің табиғаты векторлардан бөлек объектілерде болатын мысал қарастырайық. Жазықтықта координаттар бас нүктесінен өтпейтін $\{M\}$ бүкіл түзулер жиынын қарастырайық. Түзудің қалыпты теңдеуі $l : x\cos\alpha + y\sin\alpha - p = 0$ формуласымен анықталсын. Енді

$$\rho(l_1, l_2) = \left[(p_1 - p_2)^2 + 4\sin^2 \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

түріндегі метрика енгізейік. $\{M\}$ жиынының осы метрика тұрғысында шынында да метрикалық кеңістік құрайтынын көрсетейік.

Егер $l_1 = l_2$ болса, онда $\rho(l_1, l_2) = 0$. Керісінше $\rho(l_1, l_2) = 0$ делік. Сонда $p_1 = p_2$ және $\sin\dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = 0$. Соңғы теңдіктен $\alpha_1 - \alpha_2 = 2\pi n$, мұнда $n \in Z$. Бұдан $l_1 \equiv l_2$ түзулерінің беттесетіні шығады. Демек екінші аксиома орындалады.

Үшбұрыштар теңсіздігін дәлелдеуге кірісейік.

$4\sin^2 \dfrac{\alpha_1 - \alpha_2}{2} = (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2$ болғандықтан

$\rho(l_1, l_2) = \left[(p_1 - p_2)^2 + (\sin\alpha_1 - \sin\alpha_2)^2 + (\cos\alpha_1 - \cos\alpha_2)^2\right]^{\frac{1}{2}}$.

Үш өлшемді Евклид кеңістігінің A_i нүктелерінің координаттары ретінде $\{M\}$ жиынының үш түзуіне сәйкес келетін үштік $(p_i, \sin\alpha_i, \cos\alpha_i)$, $i = 1,2.3$ сандарын қарастырайық. Сонда $\rho(l_i, l_j) = |A_i A_j|$, мұнда $|A_i A_j|$ үш өлшемді Евклид кеңістігіндегі A_i және A_j нүктелерінің арақашықтығы. Демек үшбұрыш теңсіздігі $\rho(l_1, l_2)$ метрикасы үшін де орынды. Сонымен $\rho(l_1, l_2)$ енгізілген метрика бойынша $\{M\}$ жиыны метрикалық кеңістік құрайды. Байқасаңыз бұл кеңістік сызықтық емес.

Егер тізбек жинақты болса, онда ол фундаментальды. Егер кез келген фундаменталды тізбек жинақты болса, онда нормаланған кеңістік ***толық*** деп аталады.

Анықтама. Толық нормаланған кеңістік Банах кеңістігі деп аталады және ол B символымен белгіленеді.

Мысал (өзіндік жұмысқа ұсынамыз). $C^k[a,b]$ кеңістігінде норма $\|x(t)\|_{C^k[a,b]} = \sum_{n=0}^{k} \max\left\{\left|x^{(n)}(t)\right|, t \in [a,b]\right\}$ түрінде енгізілген. $C^k[a,b]$ - Банах кеңістігін құрайды. Ақырлы n өлшемді Евклид кеңістігінде норма скалярлық көбейтіндінің көмегімен енгізіледі: $\|x\|_{E^n} = \sqrt{(x,x)}$. Осыған ұқсас ақырсыз өлшемді $C[a,b]$ кеңістігінде скалярлық көбейтіндінің көмегімен

$$\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$$

нормасын енгізейік.

Осы норма бойынша жинақтылық ***орташа жинақтылық*** деп аталады. Бірқалыпты жинақтылықтан әруақытта орташа жинақтылық шығады. Ал орташа жинақтылықтан бірқалыпты тіпті нүктелік жинақтылық та шықпайды. Алда $\|x(t)\| = \sqrt{\int_a^b x^2(t)dt}$ нормасы енгізілген $C[a,b]$ кеңістігін $h[a,b]$ арқылы белгілейік.

Өкінішке орай $h[a,b]$ ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігі толық кеңістік құрмайды. Жалпы теориядан толымсыз нормаланған кеңістікті толық кеңістікке дейін толықтыруға болатыны белгілі. Толық ақырсыз өлшемді Евклид кеңістігін ***Гильберт кеңістігі*** деп атайды. Егер $h[a,b]$ кеңістігін толықтыратын болсақ, онда $h_2[a,b]$ Гильберт кеңістігін аламыз. Бірақта бұл кеңістіктің элементтерін сипаттау үшін Риман интегралымен қатар Лебег интегралын білу қажет.

Енді сызықтық операторлардың қасиеттеріне тоқталалық. L_1, L_2 – сызықтық нормаланған кеңістік болсын делік. $A: L_1 \to L_2$ операторы сызықтық деп аталады, егерде ол:

1) Аддитивті болса, яғни

$A(x+y)=Ax+Ay$ кез келген $x, y \in L_1$;

2) Біртекті болса, яғни

$A(\alpha x)=\alpha Ax$ кез келген $x \in L_1$ және кез келген $\alpha \in R$ үшін.

1) және 2) қасиеттерінен кез келген $x_1, x_2, ..., x_k \in L_1$ және кез келген $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_k \in R$ сандары үшін

$$A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_k x_k) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2 + ... + \alpha_k Ax_k$$

теңдігін оңай алуға болады.

Оператордың $x_0 \in D(A)$ нүктесіндегі үзіліссіздігі

$$\lim_{n\to\infty} Ax_n = Ax_0.$$

Теорема. Егер $A: L_1 \to L_2$, яғни $y = Ax$ сызықтық операторы $x_0 \in L_1$ нүктесінде үзіліссіз болса, онда ол *L₁* кеңістігіндегі барлық нүктелерде үзіліссіз.

Анықтама. Егер L_1 кеңістігінің барлық нүктелерінде анықталған $A: L_1 \to L_2$ сызықтық операторы үшін $M>0$ тұрақтысы табылып, $\|Ax\| \le M\|x\|$ $\forall x \in L_1$ теңсіздігі орындалса, онда ол ***шенелген*** деп аталады.

Мұндағы $\|Ax\|$ - L_2 кеңістігіндегі норма, ал $\|x\|$ - L_1 кеңістігінің нормасы.

Теорема. $A: L_1 \to L_2$ сызықтық операторы үзіліссіз болу үшін оның шектеулі болуы қажетті және жеткілікті.

Анықтама. Егер L_1 кеңістігінің бірлік шарында $A: L_1 \to L_2$ сызықтық операторы шенелген болса, онда $\|x\|<1$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық *x* үшін қандайда бір K саны табылып, $\|Ax\| \le \mathrm{K}$ теңсіздігі орындалады.

Анықтама. $M_0 = \sup\limits_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$ теңдігімен анықталатын M_0 санын *A* операторының нормасы деп атайды және оны $\|A\|$ символымен белгілейді.

Сонымен кез келген L_1 үшін $\|Ax\| \le \|A\|\|x\|$.

Мысал. Ақырлы кеңістіктерде кез келген сызықтық оператор шенелген. (Барлық теоремалардың, қажетті мысалдардың дәлелдеуін өзіндік жұмысқа ұсынамыз).

Енді L_1 нормаланған кеңістігінен L_2 нормаланған кеңістігіне әсер ететін жете үздіксіз сызықтық оператордың (вполне непрерывный линейный оператор) анықтамасын берейік.

Сызықтық алгебра курсында ақырлы өлшемді кеңістіктердегі сызықтық операторлар теориясы мазмұндалады, мысалы қалыпты Жордан формасы, ортогоналды және өзіне түйіндес операторлар және т.с.с.

Ал ақырсыз өлшемді кеңістікте мұндай жалпы теория жоқ. Бірақ қандайда бір сызықты операторлар класына байланысты кейбір ақырлы кеңістіктегі теоремаларды дәлелдеуге болады. Олардың ішінде ең қарапайымы ақырлы өлшемді операторлар класы.

Анықтама. X кеңістігінің AX бейнесі Y кеңістігінің ішкеңістігі болса, онда $A: X \to Y$ операторы ақырлы өлшемді.

Мысал. A интегралдық Фредгольм операторы болсын дейік. Сонда A жұпыны өзек (вырожденное ядро) операторы ақырлы өлшемді. Шынында да кез келген $x(t) \in L^2[a,b]$ үшін $Ax = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_a^b g_i(s)x(s)ds \right) f_i(t)$, яғни $AL^2[a,b]$ бейнесі $f_1(t), f_2(t), ..., f_n(t)$ функцияларының сызықтық қабықшасымен беттеседі.

Ақырлы өлшемді операторлар класына өзінің қасиеттері жағынан өте жақын жете үздіксіз сызықтық операторлар класын қарастырайық.

Анықтама. X кеңістігінің әрбір шенелген ішкі жиынын Y кеңістігінің қомақы (компактное) ішжиынына бейнелейтін A операторы ***жете үздіксіз сызықтық оператор*** деп аталады.

Әрбір қомақы ішжиын шенелген болғандықтан жете үздіксіз сызықтық оператор шенелген. Сонымен жете үздіксіз сызықтық оператор үзіліссіз.

Теорема. Гильберт кеңістігінде әрбір әлсіз жинақталатын $\{x_n\}$ тізбегі A операторының көмегімен қатаң жинақталатын $\{Ax_n\}$ тізбегіне көшірілетін болғанда және тек сонда ғана ол жете үздіксіз сызықтық оператор деп аталады.

Аздаған мағлұматтардан кейін бакалавр курсына қажетті функционалдық кеңістіктерге толығырақ тоқталайық.

Анықтама. $[a,b]$ кесіндісінде қосу $(f+g)x = f(x) + g(x)$ және нақты санға көбейту амалдары енгізілген барлық үзіліссіз нақты функциялар жиынтығы $C_R[a,b]$ кеңістігімен қатар $C_K[a,b]$ комплекс мәнді үзіліссіз функциялар кеңістігін де қарастыруға болады. Әрбір $f \in C[a,b]$ функциясының нормасын келесі түрде анықтайық: $\|f\| = \max_{[a,b]} |f(x)|$.

Норманың 1) және 2) анықтамаларын дәлелдеу қиындық туғызбайды (яғни мардымсыз түрде тексеріледі). Сондықтан 3) аксиомасының орындалуын көрсетейік.

Кез келген $x \in [a,b]$ үшін модульдің қасиеті бойынша: $|f(x) + g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \max_{[a,b]} |f(x)| + \max_{[a,b]} |g(x)|$.

Демек, $|f(x)| + |g(x) \le \|f\| + \|g\|$. Егер сол жағынан $\max_{[a,b]}$ алсақ та теңсіздік өзгермейді. Сонымен үшбұрыш теңсіздігі орындалады; осы түрде алынған нормаланған кеңістік үшін де бұрынғы белгілеуін сақтайық.

Енді $C[a,b]$ кеңістігіндегі норма бойынша жинақтылық бірқалыпты жинақтылық екенін көрсетейік. Бұл ұғымның геометриялық мағынасына келсек, ол кез келген өте аз $\varepsilon \rangle 0$ санына сәйкес $N = N(\varepsilon)$ саны табылып,

$n \rangle N$ болғанда $\rho(f, f_n) = \| f - f_n \|_{C[a,b]} = \max_{[a,b]} | f(x) - f_n(x) | \langle \varepsilon$ болатынын көрсетеді. Яғни бұл $\{f_n\} \in C[a,b]$ тізбегінің $f(x)$ функциясына бірқалыпты жинақтылығын білдіреді. Өйткені $\max_{[a,b]} | f(x) - f_n(x) | \langle \varepsilon$ болса, онда $x \in [a,b]$ үшін $| f(x) - f_n(x) | \langle \varepsilon$.

$C[a,b]$ толық кеңістік құрайды. Шынында да $\{f_n\} \in C[a,b]$ фундаменталды тізбегін қарастырайық және оның сол кеңістікте жататын $f \in C[a,b]$ шегі бар екенін дәлелдейік. Фундаменталдықтан: кез келген өте аз $\frac{\varepsilon}{2} \rangle 0$ саны үшін $n, m \rangle N$ болғанда $\| f_n - f_m \|_{C[a,b]} = \max | f_n(x) - f_m(x) | \langle \frac{\varepsilon}{2}$ теңсіздігі орындалатындай N санын көрсетуге болады. Енді $[a,b]$ аралығындағы x – ті бекітіп, $\{f_n(x)\}$ сандық тізбегін қарастырайық. Ол фундаменталды, сондықтан $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ шегі табылады. Бірқалыпты үзіліссіз функциялардың тізбегінің шегі де үзіліссіз функция болғандықтан $f(x)$ те үзіліссіз. Сонымен $f \in C[a,b]$ және $n \to \infty$ ұмтылдырсақ, $| f(x) - f_m(x) | \le \frac{\varepsilon}{2}$, $m \rangle N$, $x \in [a,b]$ болады. Бұдан $\max_{[a,b]} | f(x) - f_m(x) | = \| f - f_m \| \le \frac{\varepsilon}{2} \langle \varepsilon, \quad m \rangle N$. $C[a,b]$ кеңістігіндегі норма бойынша жинақтылық – бірқалыпты. Сонымен $C[a,b]$ кеңістігі $\| f \| = \max_{x \in [a,b]} | f(x) |$ нормасы бойынша Банах кеңістігін құрайды.

$C[a,b]$ кеңістігінде басқа да нормалар енгізуге болатынын атап өткен жөн. $[a,b]$ кесіндісінде әрбір функциясы $\| f \|_{CL_p} = \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ нормасымен анықталатын сызықтық үзіліссіз функциялар кеңістігін $CL_p[a,b]$ арқылы белгілейік.

Әдетте
$$\lim_{p \to \infty} \left(\int_a^b | f(x) |^p dx \right)^{\frac{1}{p}} = \max_{x \in [a,b]} | f(x) |, \qquad f \in C[a,b]$$
арақатынасының дұрыстығынан анықтамадағы p мәнінің орнына ∞ кіргізсек, онда шектік жағдайдағы норма $\| f \|_{CL_\infty} = \max_{x \in [a,b]} | f(x) |$ түрінде анықталады.

$CL_\infty[a,b]$ кеңістігімен қатар математикалық физикада $CL_1[a,b]$ және $CL_2[a,b]$ кеңістіктері де маңызды роль атқарады.

Алдымен $CL_1[a,b]$ кеңістігінің нормаланған кеңістік екенін дәлелдейік:

1) $\|f\|_{CL_1} = \int_a^b |f(x)|dx \geq 0$, $\|f\|_{CL_1} = 0 \Leftrightarrow f(x) \equiv 0$. Әрі қарай:

2) $\|\alpha f\|_{CL_1} = \int_a^b |\alpha f(x)|dx = |\alpha|\int_a^b |f(x)|dx = |\alpha|\|f\|_{CL_1}$,

3) $$\|f+g\|_{CL_1} = \int_a^b |f(x)+g(x)dx| \leq \int_a^b |f(x)dx| + \int_a^b |g(x)|dx =$$
$$= \|f\|_{CL_1} + \|g\|_{CL_1}.$$

Норманың барлық қасиеттері орындалды. Тұжырым дәлелденді. Бірақ $CL_1[a,b]$ кеңістігі толық кеңістік құрмайды. Оны келесі мысалдан көруге болады. $CL_1[-1,1]$ кеңістігінде жататын $\{f_n\}$ тізбегі келесі түрде берілсін делік:

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, -1 \leq x \leq -\frac{1}{n}, \\ nx, -\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{n}, \\ 1, \frac{1}{n} \leq x \leq 1, n = 1,2,3,\ldots. \end{cases}$$

Бұл тізбек $\|\cdot\|_{CL_1}$ нормасы бойынша фундаменталды. Ал оның шектік функциясы ретінде $f(x) = signx$ функциясын қабылдауға болар еді. Шынында да

$$\|f - f_n\|_{CL_1} = \int_{-1}^{1} |f(x) - f_n(x)|dx = \int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}} |f(x) - f_n(x)|dx \leq \frac{4}{n} \to 0,\ n \to \infty.$$

Бірақ $f(x) = signx$ функциясы $CL_1[-1,1]$ кеңістігінде жатпайды.

Анықтама. E сызықтық комплекс кеңістігіндегі скалярлық көбейтінді деп оның әрбір $f, g \in E$ қос элементіне төмендегі қасиеттер орындалатындай (f,g) комплекс санын сәйкес қоятын функционалды атайды:

1. $(f,g) = \overline{(g,f)}$ (эрмиттік симметрия);
2. $(\alpha f, g) = \alpha(f,g)$ (бірінші аргументке қатысты біртектілік);
3. $(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$ (үлестірімділік);
4. $(f,f) \geq 0$ және $(f,f) = 0$ теңдігінен $f \equiv 0$ шығады (скалярлық көбейтіндінің оң анықталғандығы);
5. $(f, \alpha g) = \overline{(\alpha g, f)} = \overline{\alpha}(f,g)$ (екінші аргументке қатысты түйіндес біртектілік).

Осындай ұйғарымдардан кейін $C_K[a,b]$ үзіліссіз комплекс мәнді функциялар кеңістігінде скалярлық көбейтіндіні келесі түрде енгізейік:

$$(f.g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

және $C_K[a,b]$ кеңістігін жаңадан $C_K L_2[a,b]\equiv CL_2([a,b],K)$ арқылы белгілейік. Осы сияқты $(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)dx$ скалярлық көбейтінді анықталған нақты үзіліссіз функциялар кеңістігін $C_R L_2[a,b]\equiv CL_2([a,b]R)$ арқылы белгілейміз.

Теорема. *E* сызықтық комплекс кеңістігінде (*f*, *g*) скалярлық көбейтіндісі берілсін делік. Сонда $\sqrt{(f,g)}$ шамасы норманың барлық аксиомаларын қанағаттандырады, демек $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$ деп алсақ, *E* нормаланған кеңістік болады.

Дәлелдеуі.

1. $\sqrt{(f,f)}\geq 0$, $(f,f)=0\Leftrightarrow f=\theta$, мұнда θ – нөлдік функция.
2. $\sqrt{(\alpha f,\alpha f)}=\sqrt{\alpha\overline{\alpha}(f,f)}=|\alpha|\sqrt{(f,f)}$.
3. $\|f+g\|\leq\|f\|+\|g\|$ үшбұрыш теңсіздігі.

$(f,g)\leq\sqrt{(f,f)}\cdot\sqrt{(g,g)}$ Шварц теңсіздігінің көмегімен дәлелденеді.

Сонымен скалярлық көбейтінді арқылы анықталатын нормаланған кеңістік Евклид кеңістігі деп аталады.

Евклид кеңістігінің қатарына l_2^n және $CL_2[a,b]$ кеңістіктері жатады. Олардың сәйкес нормалары:

$$\|x\|_{l_2^n}=\left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},\quad \|f\|_{CL_2[a,b]}=\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма. $[a,b]$, $1\langle\rho\langle\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ кесіндісінде $f(x)$ және $g(x)$ анықталған және интегралданатын (Риман бойынша) функциялар болсын делік. Сонда анализде маңызды роль атқаратын $\left|\int_a^b f(x)g(x)dx\right|\leq\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_a^b |g(x)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}}$ Гельдер теңсіздігі дұрыс.

Лемма. $[a,b]$ кесіндісінде *f* үзіліссіз функциялар жиынтығы әрбір бекітілген *p*, $1\langle\rho\langle\infty$ үшін $\|f\|_{CL_p}=\left(\int_a^b |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$ нормасы бойынша нормаланған кеңістік құрайды.

Дәлелдеуі. Біз үшбұрыш теңсіздігін дәлелдеумен шектелейік.

$$\int_a^b |f(x)+g(x)|^p dx = \int_a^b |f(x)+g(x)||f(x)+g(x)|^{p-1} dx \le$$

$$\le \int_a^b |f(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}} dx +$$

$$+\int_a^b |g(x)||f(x)+g(x)|^{\frac{p}{q}} dx \le \{\text{Гельдер теңсіздігін қолданамыз}\} \le$$

$$\le \left\{ \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right\} \left(\int |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{q}}.$$

Қысқарта отырып Минковский теңсіздігіне келеміз:

$$\left(\int |f(x)+g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_a^b |g(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Сонымен $\|f+g\|_{CL_p} \le \|f\|_{CL_p} + \|g\|_{CL_p}$ үшбұрыш теңсіздігі дәлелденді.

Бүкіл $CL_p[a,b]$ кеңістіктері құрамындағы элементтері бойынша ажыратылмайды, өйткені $[a,b]$ кесіндісінде олардың элементтерінің бәрі бірдей үзіліссіз функциялардан тұрады. Әрине, бұл кеңістіктер қайсыбір сызықтық кеңістікте әртүрлі нормалар қарастыру негізінде туындайды. Бұдан біз әртүрлі нормалар енгізу арқылы қандай түрдегі кеңістік іздейміз деген орынды сұрақ туады.

Алдымен барлық $CL_p[a,b]$ кеңістіктерінің ішінен тек $CL_\infty[a,b]$ кеңістігі ғана толық кеңістік құрайтынын атап өтейік. Қалған кеңістіктер $1 \le \rho \langle \infty$ болғанда толық кеңістік құрмайды.

Сонда жоғарыда қойылған сұраққа жауап ретінде біз $1 \langle \rho \langle \infty$ болғанда $CL_p[a,b]$ кеңістіктерінің ұлғаюын және толықтыруын қарастыруды айтуға болады.

Анықтама. Тек санаулы бірінші текті үзіліс нүктелері бар $[a,b]$ кесіндісінде анықталған $f(x)$ функциясы құрама-үзіліссіз функция деп аталады.

$[a,b]$ кесіндісіндегі құрама-үзіліссіз функциялар жиынында функцияларды қосу және нөлден өзгеше санға көбейту амалдарын енгізейік. Сонда пайда болған сызықтық кеңістікті $Q[a,b]$ арқылы белгілейік.

$Q[a,b]$ кеңістігінде

$$\|f\|_{QL_p} = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le \rho \langle \infty \qquad (3.1)$$

өрнегінің мағынасы бар. Бірақ бұл өрнек $Q[a,b]$ кеңістігінде норма бола ма деген сұрақ қосымша зерттеулерді қажет етеді.

Өкінішке орай $QL_p[a,b]$ қатаң түрде анықтамаға сәйкес нормаланған кеңістік құрмайды. Өйткені өзара тең емес f_1, f_2 функциялары үшін (3.1) өрнегінің мәні бірдей болуы мүмкін. Немесе нөлден өзгеше кез келген функцияның (3.1) интегралы нөлге тең болуы мүмкін. Сонымен $Q[a,b]$ кеңістігінде қарастырылып отырған (3.1) өрнегі тек оң анықталғандықтан басқа норманың барлық қасиеттеріне ие, ал $\|f\|_{QL_p} = 0$ теңдігінен $f = \theta$ (нөлдік элемент) шықпайды.

Қорытынды. Не арбаны майлау керек, не атты ауыстыру қажет.

$\|f\|_{QL_p}$ шамасының оң анықталғандық қасиетінің "аз ғана болмашы" бұзылу күйін келесі түрде түзетуге болады.

Анықтама. Тек санаулы нүктелерде ғана ерекшеленетін $Q[a,b]$ кеңістігінің f және g функциялары өзара эквивалентті деп аталады. Белгіленуі $f \sim g$. Сонда (3.1) шамасы үшін келесі қасиеттер орындалады:

1) $\|f\|_{QL_p} \geq 0$, $\|f\|_{QL_p} = 0 \iff \boldsymbol{f} \sim \theta$;

2) $\|\alpha f\|_{QL_p} = |\alpha| \cdot \|f\|_{QL_p}$;

3) $\|f + g\|_{QL_p} \leq \|f\|_{QL_p} + \|g\|_{QL_p}$.

Бұл жерде оң анықталғандық қасиеті $\boldsymbol{f} = \theta$ (эквиваленттілікке дейінгі дәлдікпен) шартымен алмастырылады. Осы анықтамадан кейін біз $CL_p[a,b]$ кеңістігінің ұлғаюы болып саналатын нормаланған $QL_p[a,b]$ кеңістігіне келеміз: $CL_p[a,b] \subset QL_p[a,b]$.

Бұл ұлғаю үрдісін толық нормаланған кеңістік алмайынша жалғастыра береміз. Келесі қадамда Лебег интегралын қарастырамыз.

Анықтама. Егер әрбір $\varepsilon > 0$ үшін $\{[\alpha_m, \beta_m]\}$ ақырлы немесе саналымды кесінділер жүйесі табылып, төмендегі шарттар орындалатын болса, онда $M \subset [a,b]$ жиыны ***нөлдік өлшемді жиын*** деп аталады.

1) M жиыны осы жүйенің кесінділерімен бүркеледі, яғни $M \subset \bigcup_n [\alpha_n, \beta_n]$;

2) Бүкіл $[\alpha_n, \beta_n]$ кесінділерінің қосындысы ε – нан кіші, яғни $\sum_n (\beta_n - \alpha_n) < \varepsilon$

Мысал. Рационал сандар жиыны – нөлдік өлшемді жиын.

Шынында да $[a,b]$ кесіндісіндегі рационал сандар жиыны саналымды жиын құрайды. Олай болса оларды келесі түрде нөмірлейік: $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots = \{r_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Сонда $\varepsilon\rangle 0$ үшін әрбір r_n рационал санын бүркейтін $\left[r_n - \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}, r_n + \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\right] = [\alpha_n, \beta_n]$ кесінділерін сәйкес қоялық.

1) $r_n \in [\alpha_n, \beta_n]$ екені айқын, демек $\{r_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty}[\alpha_n, \beta_n]$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n - \alpha_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\varepsilon}{2^{n+1}} = \frac{\varepsilon}{2}\langle\varepsilon$, яғни анықтама бойынша $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ нөлдік өлшемді жиын.

Осы мағынадағы тұжырымдама кез келген саналымды жиындарға қолданылады, демек кез келген саналымды жиын – нөлдік өлшемді жиын.

- Саналымды жиынның кез келген ішкі жиыны саналымды немесе ақырлы жиын;
- Кез келген ақырсыз жиынның саналымды ішкі жиыны болады;
- Саналымды жиындардың қиылысуы саналымды немесе ақырлы жиын болады. Саналымды жиындардың саналымды бірігуі де саналымды жиын болады.

Сонда кез келген нөлдік өлшемді жиындардың қиылысуы да және олардың ақырлы немесе саналымды бірігуі де нөлдік өлшемді жиын.

Егер қандай да бір тұжырым $[a,b]$ кесіндісінің мүмкін болатын нөлдік өлшемді жиынынан басқа барлық нүктелерінде дұрыс болса, онда бұл тұжырымды барлық жерде дерлік дұрыс деп айтамыз.

Анықтама. Егер $f(x)$ және $g(x)$ функциялары барлық жерде дерлік тең болса, онда олар эквивалентті деп аталады. Белгіленуі: $f(x) \sim g(x)$.

Мысал. $[0,1]$ аралығында Дирихле функциясын қарастырайық:

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \text{ рационал} \\ 0, & x \text{ иррационал} \end{cases}$$

Бұл функция $[0,1]$ аралығында нөлге тепе-тең функциямен эквивалентті, өйткені нөлдік өлшемді жиын болатын рационал сандар жиынынан басқа нүктелерде ол нөлдік функциямен беттеседі.

Енді $\{f_n(x)\}$ тізбегінің барлық жерде дерлік $f(x)$ шегі табылсын делік: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;\underline{\underline{б.ж.д.}}\; f(x)$, онда мұндай жинақтылық ***барлық жерде дерлік жинақтылық*** деп аталады. Нүктелік жинақтылықтан барлық жерде дерлік жинақтылық шығатынын, ал керісінше – орындалмайтынын ескерте кетейік.

Анықтама. Егер $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) \;\underline{\underline{б.ж.д.}}\; f(x)$ болатындай орташа фундаменталды $\{f_n(x)\}$ үзіліссіз функциялар тізбегі табылса, онда $f(x)$ функциясы $[a,b]$ кесіндісінде Лебег бойынша интегралданатын функция деп аталады.

- Орташа жинақталатын $\{f_n(x)\}$ тізбегі – орташа фундаментальды;

- Гильберт кеңістігінде норма бойынша жинақтылық –орташа жинақтылық.

  Сонымен анықтама бойынша

$$(L)\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx.$$

Ескерту. Біріншіден интегралдың бұл анықтамасы $f_n(x)$ тізбегінен тәуелсіз, тек осы тізбек тиісті $\hat{f}$ класына ғана тәуелді. Екіншіден, егер $f(x)$ Лебег бойынша интегралданатын болса, онда оған эквивалентті $g(x)\sim f(x)$ функциясы да интегралданады және $(L)\int_a^b g(x)dx = (L)\int_a^b f(x)dx$.

Анықтама. Эквивалентті кластар жиынын L^1 арқылы белгілейік.

$\|f\| = \int_a^b |f(x)|dx$ нормасы бойынша анықталатын L^1 эквивалентті кластар жиыны нормаланған кеңістік құрайды.

Сонымен L^1 - барлық жерде дерлік тең эквивалентті функциялар класы.

Ескерту. $f\in L^1$ дербес жағдайында $f(x)$ символының нақтылы x үшін мағынасы жоқ.

Теорема (Рисс-Фишер). L^1 кеңістігі толық.

Салдар. Егер L^1 кеңістігінде $f_n \to f$, онда қайсыбір іштізбек барлық жерде дерлік нүктелерде f - ке жинақталады.

Келісім. Норма бойынша $C[a,b]$ кеңістігі $L^1[a,b]$ кеңістігінде тығыз (плотно), яғни $C[a,b]$-ны толықтыру арқылы $L^1[a,b]$ алынған.

Анықтама. L_1 нормаланған, ал L_2 Банах кеңістігі болсын делік. Сонда L_2 кеңістігі L_1 кеңістігінен норма бойынша толықтыру арқылы алынған деп саналады, егер:

1) $\forall x\in L_1\subset L_2$ және $\|x\|_{L_1} = \|x\|_{L_2}$;

2) әрбір $x\in L_2$ қайсыбір L_1 кеңістігінің фундаменталды тізбегінің шегі.

$L_2[a,b]$ **Лебег кеңістігі.** Жалпы айтқанда $L_2[a,b]$ кеңістігінің элементтері үзіліссіз функциялар болмайды. Сонымен қоса қатаң мағынада олар функциялар да болмайды. $f\in L_2[a,b]$ элементі интегралдық нормаға қатысты фундаменталды функциялар тізбегінің шегі. Бірақ $x\in[a,b]$ ”барлық жерде дерлік нүктелерде” $f_k(x)$ тізбегінің мәндері жинақты, яғни $f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)$. Сонымен Лебег кеңістігінің элементі $x\in[a,b]$ ”барлық жерде дерлік” функция, ал қалған нүктелерінде оны еркін түрде анықтауға болады. $L_2[a,b]$ элементтері $[a,b]$ кесіндісінде Лебег бойынша интегралданатын функциялар деп аталады. Анықтамаға сәйкес: $(L)\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\aleph}\int_a^b f_n(x)dx$. Сондай-ақ барлық үзіліссіз функциялар $L_2[a,b]$ кеңістігінде жатады.

Теорема. $[a,b]$ кесіндісінде $f(x)$ Риман бойынша интегралданатын болса, онда ол сол кесіндіде Лебег бойынша да интегралданады $(R)\int_a^b f(x)dx=(L)\int_a^b f(x)dx$.

Анықтама. Егер:

1) H сызықтық кеңістік, яғни H жиынында элементтерді қосу және нақты немесе комплекс санға көбейту амалдары анықталған;
2) нормаға қатысты үйлестірілген скалярлық көбейтінді анықталған;
3) $\rho(f,g)=\|f-g\|$ арақшықтығына қатысты H толық метрикалық кеңістік болса, онда $f,g,h,...$ элементтерінен тұратын H жиыны ***Гильберт кеңістігі*** деп аталады.

Олардың қатарына $[a,b]$ кесіндісінде Лебег бойынша модулінің квадратымен интегралданатын $L^2[a,b]$ кеңістігі де жатады.

Бұл кеңістікте скалярлық көбейтінді $(f,g)=\int_a^b f(x)\cdot\overline{g(x)}dx$ формуласымен енгізіледі, мұнда $f(x),g(x)\in L^2[a,b]$.

$|f(x)\cdot g(x)|\le\frac{1}{2}\left\{|f(x)|^2+|g(x)|^2\right\}$ теңсіздігінен $f\cdot g$ көбейтіндісінің $L^2[a,b]$кеңістігінде жататындығы шығады. Сонымен, $L^2[a,b]$ - Гильберт кеңістігі.

Мысал. $g(x)=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\in L^2[0,1]$, өйткені $\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=\frac{3}{2}$, $\int_0^1 g^2(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}=3$ интегралдары жинақты. Ал $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$ функциясы $L^2[0,1]$ кеңістігінің элементі болмайды. Өйткені $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{x}}=2$ интегралы жинақты; $\int_0^1 f^2(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{x}=+\infty$, яғни жинақсыз.

Үйлестірім. Нормаланған кеңістікте норма скалярлық көбейтінді арқылы параллелограмм ережесіне сай анықталуы қажетті және жеткілікті: $\|f+g\|^2+\|f-g\|^2=2\left(\|f\|^2+\|g\|^2\right)$.

Анықтама. $L_2[a,b]$ кеңістігінде $f_n(x) \in L_2[a,b]$ тізбегі $f \in L_2[a,b]$ элементіне жинақты (немесе бұл тізбек $f(x)$ функциясына орташа жинақты), егер $\lim_{n\to\infty} \rho(f_n, f) = 0$ яғни $\lim_{n\to\infty} \sqrt{\left[f_n(x) - f(x)\right]^2 dx} = 0$.

Анықтама. Егер $\lim_{m,n\to\infty} \rho(f_m, f_n) = 0$ болса, онда $f_n \in L_2[a,b]$ функциялар тізбегі $L_2[a,b]$ кеңістігінде фундаменталды деп аталады.

Анықтама. Метрикалық кеңістіктің кез келген жинақты тізбегі сол кеңістікте фундаменталды.

Анықтама. Егер кез келген $\{f_n\}$ фундаменталды тізбек үшін сол метрикалық кеңістікте жататын және тізбектің шегі болатын f элементі табылса, онда метрикалық кеңістік – толық.

Ескерту. Барлық метрикалық кеңістіктер толық деп айтуға болмайды.

Теорема. $L^2[a,b]$ кеңістігі – толық Гильберт кеңістігі. Сонымен қатар $L^2[a,b]$ сепарабельді кеңістік. Мұнда барлық жерде тығыз саналымды жиын үшін рационал коэффициентті көпмүшеліктер жиынын алуға болады.

Анықтама. $f, g \in L^2[a,b]$ элементтері ортогональды, егер $(f,g) = 0$.

Ескерту. Гильберт кеңістігінде ортогоналды векторлар жүйесі маңызды роль атқарады. Мұндай жүйені алу үшін Грам-Шмид ортогональдау әдісін қолданады.

Теорема. $f_1(x), f_2(x), \dots, f_k(x)$, $f_m \in L^2[a,b], \quad m = 1,2,\dots,k$ функцияларының Грам анықтауышы нөлге тең болғанда және тек сонда ғана бұл функциялар сызықты тәуелсіз. Мұнда

$$\Gamma(f_1, f_2, \dots, f_k) = \begin{vmatrix} (f_1, f_1) & (f_1, f_2), & \dots, & (f_1, f_n) \\ (f_2, f_1) & (f_2, f_2), & \dots, & (f_2, f_n) \\ \dots & \dots & \dots, & \dots, \\ (f_n, f_1) & (f_n, f_2) & \dots, & (f_n, f_n) \end{vmatrix}$$

Грам анықтауышы.

Ескерту. $\{\varphi_n\}$ толық жүйелерін зерттегенде осы жүйе сепарабельді кеңістіктің базисін құра ма деген сұрақ өте маңызды.

Теорема. $\{\varphi_n\}$ әрбір толық ортонормаланған жүйе сепарабельді H Гильберт кеңістігінің базисін құрайды, яғни кез келген $f \in H$ үшін $f = \sum_{n=1}^{\infty} (f, \varphi_n)\varphi_n$ жіктелуі орынды және $\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |(f, \varphi_n)|^2$ (Парсеваль теңдігі).

4-ТАРАУ. ГИПЕРБОЛАЛЫҚ ТИПТЕС ТЕҢДЕУЛЕР

Бұл тарауда гиперболалық типтес теңдеулерге келтірілген қарапайым физикалық есептер қарастырылады. Ішектің аз көлденең тербелісінің және мембрана тербелісінің теңдеулері қорытылып *шығарылады. Осы түрдегі теңдеулерді шешуде негізгі әдістер қарастырылады. Коши есебі қойылымындағы толқындық теңдеулер үшін Кирхгоф, Пуассон және Даламбер формулалары алынады. Шеттік есептер үшін айнымалылары ажыратылатын Фурье әдісі толықтай қарастырылады.*

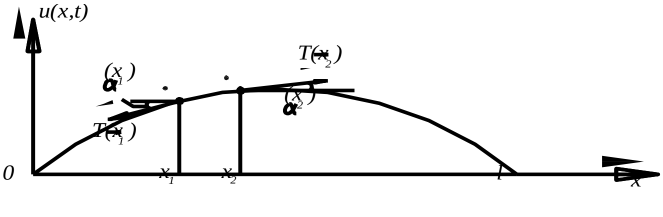
Ішектің аз көлденең тербелісінің теңдеуі (Уравнение малых поперечных колебаний струны)

Тербелістің теңдеуін қорыту

Ұзындығы l ішекті қарастырайық. Тепе-теңдік жағдайында ішек түзу сызықты, онда x өсін ішек бойымен бағыттайық (15-сур. қара). Ішектің әрбір нүктесі тепе-теңдік жағдайында x ($0 \le x \le l$) координатасымен сипатталады. Тербеліс кезінде әрбір x нүктесіндегі ішектің орны t уақыты мезгіліндегі $\vec{u}(x,t)$ ығысу векторымен анықталады.

Есепті ықшамдайтын бірнеше табиғи маңызды ұйғарымдар жасайық.

- Ішек бір жазықтықтың бойында жатады.
- Кез келген t уақыт мезгілінде $\vec{u}(x,t)$ векторы Ox өсіне перпендикуляр. Осы екі ұйғарымнан кейін ішектің орны бір скаляр $u(x,t)$ функциясымен сипатталады.
- Ішек – иілмелі серпімді жіп. "Иілмелі" ұғымы ішек бойында иілу деформациясының жоқтығын білдіреді. Бұл жерде ішектің әрбір нүктесіндегі керілу күштерінің векторы жанама бойымен бағытталған. Ішектің серпімділігі Гук заңымен анықталады және уақытқа тәуелсіз серпімділік керілу күштерінің әсерінен пайда болады.
- Ішектің көлденең тербелісін аз деп ұйғарайық. Дәлірек айтатын болсақ $\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 << 1$ шартын орынды деп санаймыз.
- Ішектің ауырлық күші оның керілу күштерімен салыстырғанда өте аз болғандықтан оны ескермеуге болады. Атап айтқанда, жоғарыдағы ұйғарымдар орындалғанда ғана, ішек тепе-теңдік жағдайында өзінің түзу сызықты қалпын сақтайды.



15-сурет. Ішектің көлденең тербелісі $\vec{O}(\tilde{o}_1)$ және $\vec{O}(\tilde{o}_2)$ керілу күштері

Ішектің тербеліске дейінгі ұзындығы $S = x_2 - x_1$ тең (x_1, x_2) бөлігін қарастырайық. Көлденең тербелістің аздығынан оның t уақыты мезгіліндегі доғасының ұзындығы S':

$$S' = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{1+u_x^2}\, dx \approx x_2 - x_1 = S \qquad \text{тең.}$$

Керілу күшінің x-қа тәуелсіз екенін көрсетейік. Көлденең тербеліс кезінде сыртқы күштер мен үдеулер x өсіне перпендикуляр бағытталған. Даламбер принципіне сай барлық күштерді x өсіне проекциялайық.

$$\sum X = 0: \; T(x_2)\cos\alpha(x_2) - T(x_1)\cos\alpha(x_1) = 0,$$

$$\cos\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{1+tg^2\alpha(x)}} = \frac{1}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx 1,$$

$$T(x_2) \approx T(x_1) \equiv T_0.$$

Ішектің (x_1, x_2) бөлігінің қозғалысы импульс өзгерісінің теңдеуімен анықталады, яғни Ньютонның екінші заңымен:

$$\Delta\vec{P} = \vec{F}\Delta t, \text{ дәлірек } \Delta\vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t)dt. \tag{4.1}$$

t уақыт мезгілінде ішектің (x_1, x_2) бөлігінің импульсы x өсіне перпендикуляр бағытталған және

$$P(t) = \int_{x_1}^{x_2} \rho(x) u_t(x,t) dx \text{ тең,}$$

Мұнда $\rho(x)$ – сызықтық масса тығыздығы, яғни ішектің бірлік ұзындығына сай келетін масса. Сонда ішектің (x_1, x_2) бөлігінің t_1-ден t_2-дейінгі уақыт аралығындағы өзгеру импульсы:

$$\int_{x_1}^{x_2} \rho(x)\left[u_t(x,t_2) - u_t(x,t_1)\right]dx.$$

Енді күш импульсын табайық. Бәрінен бұрын оған (x_1, x_2) аралығында әсер ететін керілу күштерінің векторлық қосындысы кіреді. Көлденең бағытқа проекциялап, $T(x_2)\sin\alpha(x_2) - T(x_1)\sin\alpha(x_1)$ өрнегін аламыз. Мұнда

$$\sin\alpha(x) = \frac{\mathrm{tg}\alpha(x)}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha(x)}} = \frac{u_x}{\sqrt{1+u_x^2}} \approx u_x.$$

Сонымен қатар осы аралықта әсер ететін сыртқы күштер де болуы мүмкін. Сыртқы күштердің сызықтық тығыздығы $g(x,t)$ функциясы арқылы берілсін делік. Яғни $g(x,t)$ ішектің бірлік ұзындығына әсер ететін күш.

(x_1, x_2) бөлігінің импульсының өзгерісін толық күштердің импульсына теңестіре отырып, ішек тербелісінің интегралдық түрдегі теңдеуін аламыз:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)]dx=\int_{t_1}^{t_2}[T_0u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)]dt+$$
$$+\int_{t_1}^{t_2}\int_{x_1}^{x_2}g(x,t)dxdt \tag{4.2}$$

Бұдан дифференциалдық теңдеуге көшу үшін $u(x,t)$ функциясының екінші ретті үзіліссіз туындылары табылады деп ұйғарайық. Бұл жерде біз зерттелетін шешімдер класының тарылатынын атап өтейік, өйткені (4.2) теңдеуінің $u(x,t)$ функциясының екінші ретті үзіліссіз туындысы табылмағанның өзінде басқа шешімі табылуы мүмкін. Аталған жағдайларды ескере отырып келесі теңдіктерді жазайық:

$$u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)=\int_{t_1}^{t_2}u_{tt}(x,t)dt,$$

$$u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)=\int_{x_1}^{x_2}u_{xx}(x,t)dx.$$

Осы теңдіктерді (4.2) теңдеуіне қойсақ, онда барлық қосылғыштардағы екі еселі интегралдардың шектері (x_1,x_2) және (t_1,t_2) бірдей екеніне көз жеткіземіз. Шектер еркінше таңдалып алынғандықтан, бұл жағдайда интегралдардың теңдігі интеграл астындағы өрнектердің теңдігін білдіреді, яғни:

$$\rho(x)u_{tt}=T_0u_{xx}+g(x,t).$$

Бұл ішек тербелісінің теңдеуі. Тығыздыққа бөліп келесі теңдеуге көшеміз:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}+f(x,t), \tag{4.3}$$

мұнда

$$a=\sqrt{\frac{T_0}{\rho}},\quad f(x,t)=\frac{1}{\rho}g(x,t).$$

$f(x,t)$ функциясы меншікті күшті көрсетеді, яғни ішектің бірлік массасына әсер ететін күш.

Егер сыртқы күштер жоқ болса, онда ішектің еркін тербелісінің теңдеуін аламыз:

$$u_{tt}=a^2u_{xx}. \tag{4.4}$$

Егер t-ның орнына $y=at$ жаңа айнымалысын енгізсек, онда жоғарыдағы теңдеу гиперболалық түрдегі теңдеудің канондық формасын қабылдайды:

$$u_{xx}-u_{yy}=0.$$

(4.3) немесе (4.4) теңдеулері шексіз көп дербес шешімдер жиынына ие. Нақты физикалық үдерістің жалғыз тек бір шешімін табу үшін қосымша шеттік шарттар қарастыру қажет. Оған ішектің алғашқы ығысулары мен алғашқы жылдамдықтарының кескіндерін көрсететін бастапқы шарттар жатады:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u_t(x,0)=\psi(x).$$

Және ішек шенелген болғандықтан оның ұштарына шеттік немесе шекаралық шарттар қойылады. Мысалы, егер ұштары бекітілсе, онда

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0.$$

Күштің бір нүктеге қадалып түскен жағдайы

(4.2) теңдеуінде ішек бойымен қандайда бір тығыздықпен таралған күштерді қарастырдық. Енді ішектің $x_0\left(x_1<x_0<x_2\right)$ нүктесінде $f_0(t)$ қадалған күші түсірілген делік (16-сур. қара). Сонда (4.2) интегралдық теңдеуінде тек соңғы қосылғыш, яғни сыртқы күштердің импульсы өзгереді:

$$\int_{x_1}^{x_2}\rho(x)\left[u_t(x,t_2)-u_t(x,t_1)\right]dx=\int_{t_1}^{t_2}T_0\left[u_x(x_2,t)-u_x(x_1,t)\right]dt+ \\ +\int_{t_1}^{t_2}f_0(t)dt \tag{4.5}$$

$x_1\to x_0-0$ және $x_2\to x_0+0$ ұмтылдырайық. Есептің физикалық мағынасынан жылдамдықтардың шектелгені шығады. Олай болса (4.5) теңдеуінің сол жағы нөлге айналады. Бұдан:

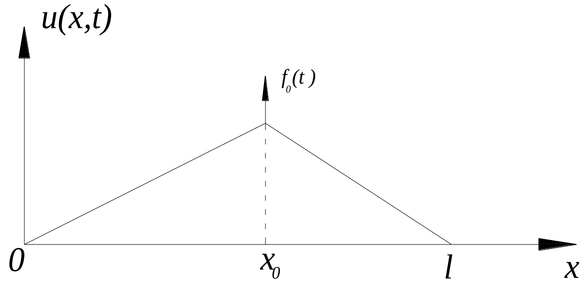
$$\int_{t_1}^{t_2}\left\{T_0\left[u_x(x_0+0,t)-u_x(x_0-0,t)\right]+f_0(t)\right\}dt=0.$$

Бұл жерде интегралдау шектері еркін болғандықтан

$$u_x(x_0+0,t)-u_x(x_0-0,t)=-\frac{1}{T_0}f_0(t) \tag{4.6}$$

теңдігін аламыз.

Сонымен қадалған күш түскен нүктеде u_x туындысы үзілісті, яғни оның екінші ретті үзіліссіз туындысы табылмайды. Онда бүкіл $(0,l)$ кесіндісінде (4.3) түріндегі дифференциалдық теңдеуге көшу шарттары орындалмайды. Есепті u_x туындысы үзіліссіз $(0,x_0)$ және (x_0,l) аралықтарында жекелеп қарастырып, сол аралықтарға сәйкес дифференциалдық теңдеулерді шешу керек. Содан кейін секірме туынды (4.6) теңдеуін және ішектің $u(x_0+0,t)=u(x_0-0,t)$ үзіліссіздік шарттарын пайдалана отырып, бүкіл ішек бойы түйіндестік шешімі тұрғызылады.



16-сурет. Ішекке қадалған күштің әсері

Ішек тербелісінің энергиясы

Кинетикалық және потенциалдық энергиялардың қосындысынан тұратын $E = E_К + E_П$ ішек тербелісінің толық энергиясын табайық. Механикалық жүйенің ұзындығы *dx*, массасы $dm = \rho dx$ ішек бөлігінің кинетикалық энергиясын есептейік:

$$\frac{1}{2}dmv^2 = \frac{1}{2}\rho(x)dx(u_t)^2 .$$

Сонда ішектің бүкіл кинетикалық энергиясы:

$$E_К = \frac{1}{2}\int_0^l \rho(x)[u_t(x,t)]^2 dx .$$

Потенциалдық энергия – денелер жүйесінің немесе дененің жеке бөліктерінің өзара орналасуы бойынша анықталатын энергия. Ішектің $t = t_0$ уақыт мезгілінде кескіні $u(x,t_0) = u_0(x)$ болатын потенциалдық энергиясы $u(x,0) = 0$ тепе-теңдік жағдайынан $u(x,t_0) = u_0(x)$ кескініне көшкенде жасалатын жұмыстың кері таңбасымен алынған шамасына тең. Ұзындығы *dx* ішек элементіне түсірілген тең әрекетті керілу күші:

$$T_0 u_x(x + dx,t) - T_0 u_x(x,t) = T_0 \frac{u_x(x + dx,t) - u_x(x,t)}{dx} dx = T_0 u_{xx} dx .$$

Осы элемент *dt* уақыт аралығында $u_t dt$ жолын өтеді. Бүкіл ішектің *dt* уақыт ішінде жасалатын жұмысы:

$$dA = \left(\int_0^l T_0 u_{xx} u_t dx\right) dt .$$

Соңғы интегралды бөліктеп интегралдайық:

$$\int_0^l u_{xx} u_t dx = \int_0^l u_t \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) dt = u_t u_x\Big|_0^l - \int_0^l u_x u_{xt} dx =$$

$$= u_t u_x\Big|_0^l - \int_0^l u_x \frac{\partial}{\partial t} u_x dx = u_t u_x\Big|_0^l - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l (u_x)^2 dx.$$

$u_t u_x\Big|_0^l$ өрнегінің физикалық мағынасын түсіндірейік. $T_0 u_x\big|_0$ ішектің керілу күшінің $x = 0$ нүктесіндегі шамасы, ал $u_t dt$ сол жақ ұшының орын ауыстыруы. Олардың көбейтіндісі ішектің $x = 0$ ұшының *dt* уақыт ішінде орын ауыстыруының элементар жұмысын береді. Дәл осы сияқты ішектің $x = l$ ұшы үшін де элементар жұмысты табуға болады. Егер ішектің ұштары бекітілген болса, онда бұл қосылғыш нөлге тең. Сонымен жұмыс:

$$dA = \left[-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^l T_0 (u_x)^2 dx\right] dt = -dE_П .$$

Уақыт бойынша 0 ден t-ға дейін интегралдап, осы уақыт аралығындағы ішектің толық жұмысын табамыз:

$$E_П = \frac{1}{2}\int_0^l T_0\left[u_x(x,t)\right]^2 dx .$$

Ішек тербелісінің толық энергиясы:

$$E = E_K + E_П = \frac{1}{2}\int_0^l \left\{\rho(x)\left[u_t(x,t)\right]^2 + T_0\left[u_x(x,t)\right]^2\right\}dx .$$

Таралушы толқындар тәсілі. Даламбер формуласы

Талдауды ақырсыз ішек жағдайынан бастайық. Оның еркін тербелісінің теңдеуін:

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \qquad (4.7)$$

бастапқы шарттармен толықтырайық:

$$u(x,0) = \varphi(x),\ u_t(x,0) = \psi(x). \qquad (4.8)$$

Осы қойылымдағы есепті Коши есебі деп айтады. Бірінші тараудың нәтижелеріне сүйене отырып характеристикалық теңдеуін құрайық:

$$dx - adt = 0,\ dx + adt,$$

бұдан теңдеудің характеристикалары түзулер болатынына көз жеткіземіз:

$$x - at = C_1,\ x + at = C_2. \qquad (4.9)$$

$\xi = x - at, \eta = x + at$ жаңа айнымалыларын енгізіп, канондық түрге көшеміз:

$$u_{\xi\eta} = 0. \qquad (4.10)$$

Соңғы теңдеу айқын түрде оңай интегралданады.

Сонда (4.10) теңдеуінің барлық дербес шешімдерін қамтитын жалпы шешімі былай жазылады:

$$u(\xi,\eta) = f_1(\xi) + f_2(\eta).$$

Ескі x, t айнымалыларына қайта оралсақ, онда

$$u(x,t) = f_1(x - at) + f_2(x + at) \qquad (4.11)$$

формуласы бастапқы (4.7) теңдеуінің жалпы шешімін береді. Бұған (4.8) бастапқы шарттарын қоялық:

$$u(x,0) = f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x),$$

$$u_t(x,0) = -af_1'(x) + af_2'(x) = \psi(x).$$

Екінші теңдеуді интегралдап, $f_1(x), f_2(x)$ функциялары үшін жүйе аламыз:

$$f_2(x) - f_1(x) = \frac{1}{a}\int_{x_0}^{x} \psi(\bar{x})d\bar{x} + C,$$

$$f_2(x) + f_1(x) = \varphi(x),$$

бұдан

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\bar{x})d\bar{x} - \frac{C}{2},$$

$$f_2(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int_{x_0}^{x}\psi(\bar{x})d\bar{x} + \frac{C}{2}.$$

Осы функцияларды (4.11) жалпы шешіміне қойып, ақырында Даламбер формуласын аламыз:

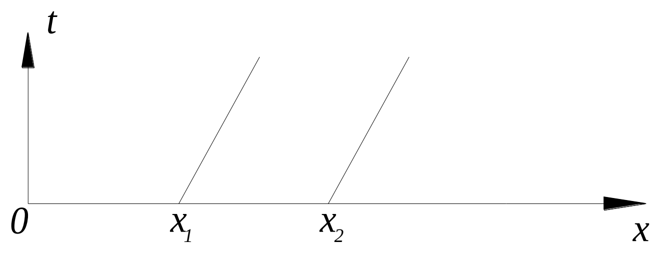
$$u(x,t) = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\bar{x})d\bar{x}\,. \quad (4.12)$$

(4.11) формуласы ішектің бастапқы ұйтқуының (бастапқы ығысу және бастапқы жылдамдық) таралу үдерісін бейнелейді. $u(x,t_0)$ функциясы $t = t_0$ уақыт мезгілінде қарастырылған ішек кескінін көрсетеді. Екінші жағынан $x = x_0$ координатасын бекітіп, x_0 нүктесінде қозғалыс үдерісін бейнелейтін $u(x_0,t)$ функциясын аламыз.

Енді (4.11) жалпы шешіміндегі қосылғыштардың физикалық мағынасын қарастырайық. Қайсыбір бақылаушы $t = 0$ уақыт мезгілінде x өсінің $x = 0$ нүктесінен a тұрақты жылдамдығымен қозғалып бастады делік. Осы бақылаушымен байланысты K' санақ жүйесінде x' координатасы $x' = x - at$ тең. Демек бақылаушы әрдайым қозғалмайтын кескінді көреді, өйткені $f_1(x-at) = f_1(x')$. Сонымен (4.11) формуласындағы бірінші қосылғыш, яғни $u_1(x,t) = f_1(x-at)$ функциясы a жылдамдығымен x өсінің оң бағытында қозғалатын қума толқыны болып табылады. Олай болса $f_2(x+at)$ екінші қосылғышы x өсінің теріс бағытында a жылдамдығымен қозғалатын толқын екені анық.

Бір өлшемді толқындардың таралу үдерісін көрнекті түрде көрсету үшін (x,t) фазалық жазықтығын пайдаланған қолайлы.

Алғашқы $t = 0$ уақытында тек (x_1, x_2) интервалында ғана нөлден өзгеше $f_1(x-at)$ функциясын қарастырайық. Бастапқы (4.7) теңдеуінің екі характеристикалар үйірі (4.9) бар екенін еске алайық. Сонымен $f_1(x-at)$ функциясы $x - at = const$ характеристикаларының бойында тұрақты (17-сур. қара) және x өсінің оң бағытымен таралатын толқынды өрнектейді.



17-сурет: x осінің бойымен таралатын алдыңғы және артқы шептердің характеристикалары

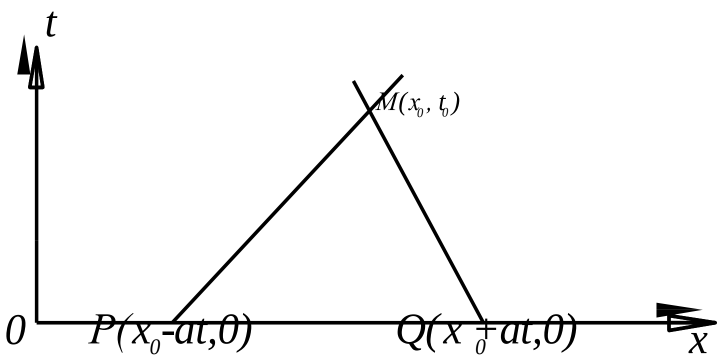
Сонда $x - at = x_2$ және $x - at = x_1$ характеристикалары осы толқынның алдыңғы және артқы шептерінің қозғалысын бейнелейді.

Фазалық жазықтықтың $M(x_0, t_0)$ бекітілген нүктесін қарастырайық және сол нүкте арқылы екі характеристиканы жүргізейік.

$$x - at = x_0 - at_0,\ x + at = x_0 + at_0.$$

Бұл түзулер $t = 0$ өсін P және Q нүктелерінде қиып өтеді (18-сур. қара)

$$x_P = x_0 - at_0,\ x_Q = x_0 + at_0.$$



18-сурет. Фазалық жазықтықтағы характеристикалық үшбұрыш

PQM үшбұрышы фазалық жазықтықтағы характеристикалық үшбұрыш. (4.12) Даламбер формуласынан M нүктесінде $u(x_0, t_0)$ функциясының мәні P және Q нүктелеріндегі φ бастапқы функциясының және PQ кесіндісіндегі ψ бастапқы жылдамдығының мәндерімен анықталады:

$$u(M) = \frac{\varphi(P) + \varphi(Q)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{PQ} \psi(\bar{x})d\bar{x}\,.$$

Сонымен PQ кесіндісінен тыс берілген бастапқы мәндер $u(x,t)$ функциясының $M(x_0, t_0)$ нүктесіндегі мәніне әсер етпейді. Егер бастапқы шарттар бүкіл шексіз түзудің бойында емес, тек PQ кесіндісінде ғана берілсе, онда олар шешімді негізі PQ болатын характеристикалық үшбұрыштың ішінде бірмәнді анықтайды. Алғашқы шарттардың жәй екі мысалдарын қарастырайық.

Мысал. Бастапқы жылдамдық нөлге тең болсын $\psi(x) \equiv 0$, онда (4.12) формуласынан шешімді төмендегі түрде аламыз:

$$u(x,t) = \frac{\varphi(x - at) + \varphi(x + at)}{2}\,.$$

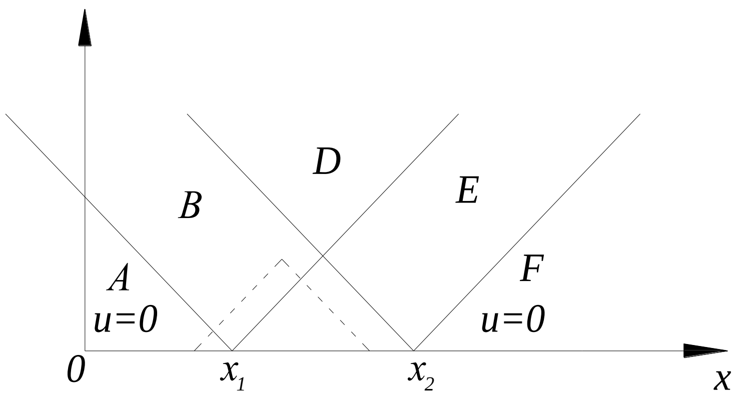
Бұл шешім әрқайсысының бастапқы формалары $\frac{1}{2}\varphi$ тең қума толқындар қосындысын береді.

Егер тек (x_1, x_2) кесіндісінде $\varphi(x)$ нөлден өзгеше болса, онда фазалық жазықтықта шешімдері әртүрлі болатын алты облысты бөліп қарастыруға болады (19-сур. қара). Жоғарыда айтылғандай C облысында шешім бірмәнді анықталады, яғни

$$u_C(x,t)=\frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2}.$$

Бастапқы шарт тек (x_1,x_2) кесіндісінде берілгендіктен A, F және D облыстарында шешімнің нөлге тең екені айқын. B облысындағы шешім x_2 нүктесінде берілген бастапқы шарттың әсерінен келесі түрде табылады $u_B(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x+at)$. Осыған ұқсас E облысындағы шешім: $u_E(x,t)=\frac{1}{2}\varphi(x-at)$.

Мысал. Енді бастапқы ығысу нөлге тең болсын делік (яғни $\varphi(x)=0$). Ал бастапқы жылдамдық (x_1,x_2) кесіндісінде тұрақты $\psi(x)=\psi_0$ және кесіндіден сырт аралықтарда нөлге тең болсын. Онда 19-суреттен және (4.26) формуласынан нөлдік емес төмендегідей шешімдер аламыз:



19-сурет. Әртүрлі шешімдерге сәйкес фазалық жазықтықтағы облыстар

$$u_C(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi_0 d\bar{x}=\psi_0 t,$$

$$u_B(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x+at}\psi_0 d\bar{x}=\frac{1}{2a}(x+at-x_1)\psi_0,$$

$$u_E(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x_2}\psi_0 d\bar{x}=\frac{1}{2a}(x_2-x+at)\psi_0,$$

$$u_D(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2}\psi_0 d\bar{x}=\frac{1}{2a}(x_2-x_1)\psi_0=const.$$

Жартылай шектелген түзуде таралушы толқындар әдісі

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0 \tag{4.13}$$

теңдеуінің $0 \le x < \infty$ аралығында шекаралық

$$u(0,t) = \mu(t) \text{ (немесе } u_x(0,t) = \nu(t)), \ t \ge 0 \tag{4.14}$$

және

$$u(x,0) = \varphi(x), \ u_t(x,0) = \psi(x), \ 0 \le x < +\infty \tag{4.15}$$

бастапқы шарттарын қанағаттандыратын шешімін іздейік.

Алғашқы кезеңде ішектің ұшы бекітілген $u(0,t) = 0$ және ұшы бос $u_x(0,t) = 0$ біртекті шекаралық шарттармен анықталатын жағдайларын қарастырайық.

Шексіз ішектер есебіне қайта оралайық та, айқын болып тұрған екі теореманы дәлелдейік.

Теорема. Егер $x = 0$ нүктесіне қатысты қарағанда шексіз ішек үшін бастапқы берілімдер тақ функциялар болса, онда кез келген *t* уақытында осы нүктедегі шешім нөлге тепе-тең, $u(0,t) \equiv 0$. Яғни

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \ \psi(-x) = -\psi(x).$$

Сонда (4.12) формуласына сәйкес

$$u(0,t) = \frac{\varphi(-at) + \varphi(at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{at} \psi(\overline{x}) d\overline{x} \equiv 0.$$

Теорема дәлелденді.

Теорема. Егер $x = 0$ нүктесіне қатысты қарағанда шексіз ішек үшін бастапқы берілімдер жұп функциялар болса, онда шешімнің *x* бойынша дербес туындысы осы нүктеде кез келген *t* уақытта нөлге тепе-тең, $u_x(0,t) \equiv 0$. Демек:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \ \psi(-x) = \psi(x).$$

Алдымен (4.12) өрнегін *x* бойынша дифференциалдайық:

$$u_x(x,t) = \frac{\varphi'(x-at) + \varphi'(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\psi(x+at) - \psi(x-at)\right].$$

Содан соң жұп функцияның туындысы тақ функция екенін ескере отырып, оның $x = 0$ нүктесіндегі мәні нөлге тең болатынына көз жеткізейік:

$$u_x(0,t) = \frac{\varphi'(-at) + \varphi'(at)}{2} + \frac{1}{2a}\left[\psi(at) - \psi(-at)\right] \equiv 0.$$

Теорема дәлелденді.

Енді ұшы бекітілген, $u(0,t) = 0$, жартылай шексіз ішектің қозғалысы туралы есепті қарастырайық. Бастапқы шарттарды $x = 0$ нүктесіне қатысты теріс шексіз жарты өске тақ күйінде жалғастыра отырып, есепті шексіз ішектер есебіне алып келейік. Сонымен біз:

$$\tilde{u}(x,0) = \tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \varphi(x), x > 0, \\ -\varphi(-x), x < 0, \end{cases}$$

$$\tilde{u}_x(x,0) = \tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \psi(x), x > 0, \\ -\psi(-x), x < 0, \end{cases}$$

бастапқы шарттары орындалатын шексіз ішектің қозғалысын өрнектейтін $\tilde{u}(x,t)$ функциясын іздейміз.

(4.12) Даламбер формуласы бойынша шексіз ішек есебінің шешімін жазайық:

$$\tilde{u}(x,t)=\frac{\tilde{\varphi}(x-at)+\tilde{\varphi}(x+at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\tilde{\psi}(\bar{x})d\bar{x}\,, \qquad (4.16)$$

бұл шешім $x>0$ аймағында жартылай шексіз ішек есебінің барлық (4.15) бастапқы шарттарын қанағаттандырады. Сонда бірінші теорема бойынша шекаралық шарт $u(0,t)=0$ міндетті түрде орындалады.

Қарастырылып отырған (4.13) есебінің $\varphi(x),\psi(x)$ бастапқы шарттарының функцияларына қайта оралып, (4.16) шешімді фазалық жазықтықтың екі облысында жазайық.

Шекараның әсері әлі білінбейтін $x-at>0$ облысында, яғни $t<\frac{x}{a}$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\bar{x})d\bar{x}\,. \qquad (4.17)$$

$x-at<0$ облысында, яғни $t>\frac{x}{a}$

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{at-x}^{x+at}\psi(\bar{x})d\bar{x}\,, \qquad (4.18)$$

шешімін аламыз; өйткені $(x-at,at-x)$ симметриялық аралықта $\tilde{\psi}(x)$ тақ функциясынан нөлге тең интегралы алынып тасталады.

Осыған ұқсас ұшы бекітілмеген жартылай шексіз ішек туралы есепте бастапқы шарттарды теріс шексіз жарты өске жұп күйінде жалғастырайық:

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\varphi(x), x>0,\\ \varphi(-x), x<0,\end{cases}$$

$$\tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\psi(x), x>0\\ \psi(-x), <0.\end{cases}$$

Осы жағдайда шексіз ішектің қозғалысын сипаттайтын $\tilde{u}(x,t)$ функциясы үшін де (4.16) өрнегін аламыз. Бұл шешім $x>0$ облысында жартылай шексіз ішек есебінің барлық бастапқы шарттарын қанағаттандырады. Екінші теорема бойынша $u_x(0,t)=0$ шекаралық шарты орындалады.

Қарастырылып отырған (4.13) - есептің бастапқы шарттарының $\varphi(x),\psi(x)$ функцияларына қайта оралайық та, шешімді фазалық жазықтықтың сол екі облысында жазайық. Шекаралық әсері әлі байқалмайтын $t<\frac{x}{a}$ облысында шешім (4.17) түрінде табылады.

$t>\frac{x}{a}$ облысында шешім:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(at-x)}{2}+\frac{1}{2a}\left[\int_0^{at-x}\psi(\bar{x})d\bar{x}+\int_0^{x+at}\psi(\bar{x})d\bar{x}\right],$$

мұнда $\varphi(x-at)=\varphi(at-x)$, $\int_{x-at}^{0}\psi(\bar{x})d\bar{x}=\int_0^{at-x}\psi(\bar{x})d\bar{x}$.

Біз шекаралық шарттар біртекті болған жағдайларды қарастырдық. Шекаралық шарттары біртекті емес (4.14) және бастапқы шарттары (4.15) болатын есептің шешімі қосынды түрінде тұрғызылады. Оның әрбір қосылғышы бір шартты қанағаттандырады, ал екінші шарт нөлдік деп саналады.

Бастапқы шарттары нөлдік, яғни

$$u(x,0),\, u_t(x,0)=0,\quad (x>0),$$

және шекаралық шарты $u(0,t)=\mu(t),(t>0)$ түрінде берілген (4.13) есебін қарастырайық. Нөлден өзгеше шекаралық шарт x өсінің оң бағытымен a жылдамдығымен таралатын қума толқынды тудырады. Жартылай шексіз ішек есебінде қарсы толқынның тумайтыны оның физикалық мағынасынан айқын көрінеді.

Сондықтан есептің шешімін

$$u(x,t)=f(x-at)$$

түрінде іздеу керек. Енді шекаралық шарттың көмегімен f функциясын табайық:

$$u(0,t)=f(-at)=\mu(t),\ f(z)=\mu\left(-\frac{z}{a}\right).$$

Сөйтіп $$u(x,t)=\mu\left(-\frac{x-at}{a}\right)=\mu\left(t-\frac{x}{a}\right).$$

Бұл функция тек $t-\dfrac{x}{a}\geq 0$, яғни $x-at\leq 0$ мәндері үшін ғана анықталған. $x-at>0$ жағдайында $u(x,t)$ функциясын табу үшін қосымша $t<0$ болғанда шекаралық шарт беру қажет, мысалы:

$$u(0,t)=\mu(t)=\begin{cases}\mu(t),\ t\geq 0,\\ 0,\ t<0.\end{cases}\tag{4.19}$$

Бұрын аталғандай, егер (4.19) түріндегі шекаралық шартпен қоса нөлдік емес бастапқы шарттар болса, онда есептің жалпы шешімін (4.17), (4.18) және (4.19) өрнектерінің қосындысы ретінде табамыз.

Даламбер формуласы

Бүкіл түзу бойында біртектес емес толқындық теңдеудің Коши есебін қарастырайық:

$$\begin{aligned}&u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ x\in(-\infty,+\infty),t\in(0,+\infty);\\&u(x,0)=\varphi(x),\ x\in(-\infty,+\infty);\\&u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in(-\infty,+\infty).\end{aligned}\tag{4.20}$$

Теорема. Егер $f(x,t)$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ функциялары $f(x,t)\in C((-\infty,+\infty)\cap[0,+\infty))$; $\varphi(x)$, $\psi(x)\in C(-\infty,+\infty)$ кеңістіктерінен алынса, онда (4.20) Коши есебінің шешімі Даламбер формуласы арқылы беріледі:

$$u(x,t)=\frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(s)ds+ \\ +\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(s,\tau)dsd\tau. \tag{4.21}$$

Толық дәлелдеуін "Математикалық физика теңдеулерін шешуде Фурье түрлендіруін қолдану" тақырыбын өткеннен соң көрсетеміз. Әзірге бастапқы теңдеуге Даламбер формуласын тікелей қою арқылы көз жеткіземіз. Әрине, бұл тәсіл (4.20) теңдеуінің (4.21) формуласымен анықталатын шешімі табылатынын көрсетеді. Ал басқа формулалармен табылатын шешімдері туралы кепілдік бермейді.

Жартылай шектелген түзулердегі толқындық теңдеулерге есептер шығару. Жалғастыру тәсілі

Шексіз түзу үшін қарапайым толқындық теңдеудің Коши есебін қарастырайық:

$$\begin{aligned}
&u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ x\in(-\infty,+\infty), t\in(0,+\infty);\\
&u(x,0)=\varphi(x),\ x\in(-\infty,+\infty);\\
&u_t(x,0)=\psi(x),\ x\in(-\infty,+\infty).
\end{aligned}$$

Жоғарыда дәлелденген тұжырымдарды еске түсірейік:

a) Егер $f(x,t)\equiv 0$ болса, онда φ және ψ функцияларының $\varphi(-x)=-\varphi(x)$ және $\psi(-x)=-\psi(x)$ тақтылықтарынан

$u(0,t)=0$ шығады.

b) Бұл функциялардың $\varphi(-x)=\varphi(x)$ және $\psi(-x)=\psi(x)$ жұптылықтарынан

$u_x(0,t)=0$ шығады.

c) f функциясының x айнымалысы бойынша $f(-x,t)=-f(x,t)$ тақтылығынан

$u(0,t)=0$ шығады.

d) f функциясының x айнымалысы бойынша $f(-x,t)=f(x,t)$ жұптылығынан

$u_x(0,t)=0$ шығады.

Осы түрдегі тұжырымдар жалғастыру тәсілінің негізін құрайды.

Мысал.

$$\begin{aligned} &u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ x>0,t>0;\\ &u(x,0)=0,\ x\ge 0;\\ &u_t(x,0)=0,\ x\ge 0;\\ &u(0,t)=0,\ t>0. \end{aligned} \tag{4.22}$$

Алдымен бүкіл түзу бойында анықталған:

$$\begin{aligned} &v_{tt}-a^2v_{xx}=f_1(x,t),\ x\in(-\infty,+\infty),t>0;\\ &v(x,0)=0,\ x\in(-\infty,+\infty);\\ &v_t(x,0)=0,\ x\in(-\infty,+\infty), \end{aligned}$$

көмекші есепті қарастырайық. Мұнда

$$f_1(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & x>0;\\ 0, & x=0;\\ -f(-x,t), & x<0. \end{cases}$$

Бүкіл сан өсінде f функциясының x айнымалысы арқылы жүргізілген тақ жалғастыруы бойынша $f_1(x,t)$ функциясы тұрғызылған $v(x,t)$ функциясы $x\in(0,+\infty)$ аралығында қандай шарттарды қанағаттандыратынын қарастырайық:

$$\begin{aligned} &v_{tt}-a^2v_{xx}=f(x,t),\ x\in(0,+\infty),t>0;\\ &v(x,0)=0\equiv\varphi(x),\ x\in(0,+\infty),t>0;\\ &v_t(x,0)=0\equiv\psi(x),\ x\in(0,+\infty),t>0. \end{aligned}$$

Ақырында $f_1(x,t)$ функциясының жұптылығынан:

$$v(0,t)=0,t>0\,.$$

Сондықтан көмекші теңдеудің шешімі $v(x,t)$ бастапқы (4.22) теңдеуінің де шешімі болады:

$$u(x,t)\equiv v(x,t),\ x\ge 0,t\ge 0\,.$$

Онда (4.21) Даламбер формуласы бойынша:

$$u(x,t)=v(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\tau)\,ds\,d\tau\,.$$

Мысал.

$$\begin{aligned} &u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t),\ x>0,t>0;\\ &u(x,0)=\varphi(x),\ x\ge 0;\\ &u_t(x,0)=\psi(x),\ x\ge 0;\\ &u(0,t)=0,\ t>0. \end{aligned}$$

Жарты түзу бойында екі көмекші есеп қарастырайық:

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0,\ x,t > 0; \\ v(x,0) = \varphi(x),\ x \ge 0; \\ v_t(x,0) = \psi(x),\ x \ge 0; \\ v(0,t) = 0,\ t > 0 \end{cases} \quad \text{және} \quad \begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = f(x,t),\ x,t > 0; \\ w(x,0) = 0,\ x \ge 0; \\ w_t(x,0) = 0,\ x \ge 0; \\ w(0,t) = 0,\ t > 0. \end{cases}$$

$u(x,t) \equiv v(x,t) + w(x,t)$ функциясы бастапқы есептің шешімі. Жоғарыда шығарылған есептердің нәтижелерін пайдаланайық. Сонда

$$v(x,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)\,ds,$$

$$w(x,t) = \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\tau)\,ds\,d\tau,$$

мұнда $\varphi_1(x), \psi(x)$ және $f_1(x,t)$ функциялары келесі теңдіктермен анықталған:

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\varphi(-x), & x < 0, \end{cases} \qquad \psi_1(x) = \begin{cases} \psi(x), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -\psi(-x), & x < 0, \end{cases}$$

$$f_1(x,t) = \begin{cases} f(x,t), & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -f(-x,t), & x < 0. \end{cases}$$

Сондықтан

$$u(x,t) = \frac{\varphi_1(x+at) + \varphi_1(x-at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi_1(s)\,ds +$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_0^t \int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f_1(s,\tau)\,ds\,d\tau.$$

Лаплас операторының меншікті мәндері

Сызықтық алгебрада квадраттық форманы канондық түрге келтіру үшін келесі түрдегі меншікті мәндер есебіне келеміз. Квадраттық форманың симметриялы *A* матрицасы $(a_{ij} = a_{ji})$ берілсін делік. Сонда

$$\hat{A}\vec{x} = \lambda\vec{x}$$

теңдеуін және $\vec{x} \ne 0, |\vec{x}| = 1$ қосымша шарттарын қанағаттандыратын нөлден өзгеше $\vec{x} \in R^n$ векторы мен $\lambda \in R$ санын табу керек. Осы есептің нөлден өзгеше шешімдері меншікті векторлар, ал λ сандары – меншікті мәндер деп аталады. Осы тұрғыда қойылған есептің ең маңызды нәтижесі – меншікті векторлар жиыны R^n кеңістігінде базис құрайды және осы базисте *A* матрицасы диагоналды. Практикалық тұрғыдан қарағанда *A* матрицасымен байланысты сызықтық алгебраның кез келген есебі жаңа базиске көшу арқылы оңай шешіледі. Әлдебір осыған ұқсас қасиеттер басқа да сызықтық операторлар үшін орындалуы мүмкін.

Мұндай жалпылаудың қажеттілігі физикалық ойлардан туындайды. Бар мәселе классикалық физикада меншікті мәндер, мысалы ішектің, мембрананың т.с.с. тербелісін табу, ал кванттық механикада бөлшектер үшін энергияның мүмкін деңгейлерін табу туралы есептерге тіреледі.

Дифференциалдық операторлар үшін көрсетілген жалпылау қай жағдайда орындалатынына тоқталайық. Ол үшін төмендегі түрде Лебег кеңістігін енгізейік:

$$L_2(\Omega)=\left\{ f(x): \int_\Omega f^2(x)dx<\infty; \Omega\subset R^n \right\},$$

мұнда Ω – шектелген жиын. $L_2(\Omega)$-де скалярлық көбейтіндіні анықтайық:

$$(f,g)=\int_\Omega f(x)g(x)dx .$$

Сонда $L_2(\Omega)$ сепарабельді (бөлінімді) Гильберттік кеңістік болып шығады. Сонымен қатар $L_2(\Omega)$ кеңістігінде векторлардың ортогоналдық ұғымы және вектордың нормасы анықталған:

$$(f,g)=0,\ \|f\|=\sqrt{(f,f)} .$$

Кейбір жағдайларда комплекс мәнді функцияларды қарастыруға тура келеді. Онда скаляр көбейтіндінің анықтамасы өзгереді:

$$(f,g)=\int_\Omega f^*(x)g(x)dx .$$

Сызықты дифференциалдық оператор қарастырайық:

$$\hat{L}u \overset{def}{=} [-\operatorname{div}(p\operatorname{grad})+q]u=-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+q(x)u ,$$

мұнда $p(x)\in C^1(\overline{\Omega}),\ q(x)\in C(\Omega),\ p(x)>0,\ q(x)\ge 0$. $\hat{L}$ операторы $U\subset L_2(\Omega)$ ішене кеңістігінде анықталған және кез келген $u(x)\subset U$ функциясы үшін біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандыратын

$$\left.\left(\alpha(x)u+\beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0 ,$$

$C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ функциялар класынан тұрады, мұнда $\alpha(x),\beta(x)\in C(\partial G),\ \alpha(x),\beta(x)\ge 0$ және $\alpha(x)+\beta(x)>0$. $\hat{L}$ операторы теріс емес және симметриялы (дәлелдеуін өзіндік жұмысқа ұсынамыз).

$\hat{L}$ операторының меншікті мәндеріне есеп келесі түрде қойылады:

$$\hat{L}u(x)=\lambda u(x),$$

теңдеуін және $u(x)\not\equiv 0,\ \|u(x)\|=1$ қосымша шарттарын қанағаттандыратын λ сандары мен $u(x)\in U$ функцияларын табу керек.

$u(x)$ функциялары меншікті функциялар деп, ал λ сандары меншікті мәндер деп аталады. $n=1$ жағдайында бұл есеп Штурм-Луивилль есебі деп аталады.

Қарапайым жағдайда $p(x)=1, q(x)=0$ $\hat{L}$ дифференциалдық операторы Лаплас операторын береді: $\hat{L}=-\Delta$, мұнда $\Delta=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_k^2}$. Бұл жағдайда біз Лаплас операторының меншікті мәндер есебіне көшеміз.

Бір өлшемді жағдай: *кесінді*

Келесі есептің меншікті функциялары мен меншікті мәндерін табайық:

$$\begin{cases} -\frac{d^2}{dx^2}y(x)=\lambda y(x),\ x\in(0,1), \\ y(0)=0, y(1)=0, y(x)\not\equiv 0, \|y(x)\|=1. \end{cases} \tag{4.23}$$

Нормалау шартын жазайық: $\|y(x)\|=\int_0^1 |y(x)|^2 dx=1.$

Біртекті тұрақты коэффициентті екінші ретті сызықты дифференциалдық теңдеуде $y(x)=e^{\alpha x}$ Эйлер ауыстыруын қолданып, характеристикалық теңдеуін құрайық: $-\alpha^2=\lambda$. Белгісіз λ параметрінің мәніне байланысты мүмкін болатын үш жағдайды қарастырайық.

1. $\lambda<0$. Сонда $\alpha_{1,2}=\pm\sqrt{|\lambda|}$ және диф.т. жалпы шешімі $y(x)=C_1e^{-\sqrt{-\lambda}x}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}x}$ түрінде табылады. Шекаралық шарттардан C_1 және C_2 үшін теңдеулер жүйесін аламыз

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y(1)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1+C_2=0, \\ C_1e^{-\sqrt{-\lambda}}+C_2e^{\sqrt{-\lambda}}=0. \end{cases}$$

$y(x)\not\equiv 0$ қосымша шарты бұл жүйенің мардымсыз (тривиальное) емес шешімдерінің болуын талап етеді. Мардымсыз емес шешім тек жүйенің анықтауышы нөлге тең жағдайында табылады:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{-\sqrt{-\lambda}} & e^{\sqrt{-\lambda}} \end{vmatrix}=0 \Rightarrow 2\mathrm{sh}\sqrt{-\lambda}=0.$$

Соңғы теңдеудің шешімі жоқ, өйткені *shx* функциясының мәндер облысы $(0,+\infty)$ аралығында жатады. Демек, бастапқы есептің $\lambda<0$ жағдайында меншікті мәндері жоқ.

2. $\lambda=0$. Бұл характеристикалық теңдеудің еселі нөлдік түбірлері болатын жағдай: $\alpha_{1,2}=0$. Диф.т. жалпы шешімі $y(x)=C_1x+C_2$ түрінде жазылады. Бірінші жағдай сияқты:

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ y(1)=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2=0, \\ C_1+C_2=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$$

Қайтадан есептің меншікті мәндері жоқ.

3. $\lambda > 0$. Характеристикалық теңдеудің түбірлері түйіндес комплекс сандар: $\alpha_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Диф.т. жалпы шешімін жазайық $y(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}x$. Шекаралық шарттардан C_1 және C_2 үшін теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} y(0) = 0, \\ y(1) = 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 \cdot 1 + C_2 \cdot 0 = 0, \\ C_1 \cos\sqrt{\lambda} + C_2 \sin\sqrt{\lambda} = 0. \end{cases} \qquad (4.24)$$

Бұл жүйенің мардымсыз емес шешімдерінің бар болуы есептің меншікті мәндерін анықтайтын теңдеуге алып келеді:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ \cos\sqrt{\lambda} & \sin\sqrt{\lambda} \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \sin\sqrt{\lambda} = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = \pi k, k = 1,2,...$$

Сонымен (4.24) жүйесінің $\lambda = \lambda_k = (\pi k)^2$ мәндеріндегі шешімі $C_1 = 0, C_2 = N_k$ болады. Бұл қадамда N_k анықталмаған. Сонда λ_k-ның меншікті мәніне сәйкес меншікті функция былай жазылады:

$$y_k(x) = N_k \sin \pi k x.$$

Нормалау шартынан N_k-ның модулін анықтаймыз:

$$1 = \|y_k\| = \sqrt{\int_0^1 |N_k \sin \pi k x|^2 dx} = |N_k| \sqrt{\int_0^1 \sin^2 \pi k x dx} = \frac{1}{\sqrt{2}} |N_k|.$$

Бұдан $|N_k| = \sqrt{2}$.

Ақырында (4.23) есебінің функциялары мен меншікті мәндері төмендегі түрде алынады:

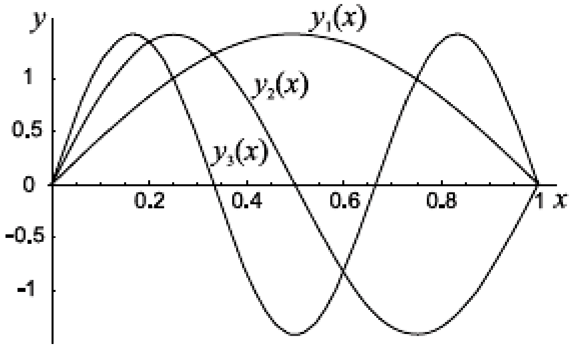
$$\lambda_k = (\pi k)^2,\ y_k(x) = \sqrt{2} \sin \pi k x,\ k = 1,2,\dots .$$

(4.23) есебі Штурм-Луивилль есебінің дербес жағдайы, ал оның шешімдері осы түрде қойылған есептерге тән бірқатар қасиеттерге ие:

1. Меншікті мәндер шексіздікте тек жалғыз бір жинақталу нүктесі бар теріс емес шексіз өспелі тізбек құрайды; әрбір меншікті мәнге бір меншікті функция сәйкес келеді.
2. Меншікті функциялар $L_2[0,1]$ кеңістігінде ортонормаланған жүйе құрайды:

$$(y_k, y_m) = \int_0^1 y_k(x) \cdot y_m(x) dx = \delta_{km}, \text{ мұнда } \delta_{km} = \begin{cases} 1, m = k, \\ 0, m \neq k, \end{cases} \text{ Кронекер символы.}$$

1. Ең кіші меншікті мәнге сәйкес меншікті функцияның түйін нүктесі болмайды, яғни берілген аралықта меншікті функцияның нөлдік нүктелері жоқ; келесі меншікті функцияның бір түйін нүктелері; одан әрі k-шы меншікті функцияның k-1 түйін нүктелері табылады және $y_{k+1}(x)$ функциясының түйін нүктелерінің аралықтарында жатады (20-сур. қара).
2. $L_2[0,1]$ кеңістігінде $\{y_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ тізбегі базис құрайды.



20-сурет. Меншікті функциялардың түйін нүктелері

Ұштары бекітілген ішектің еркін тербелістері

Ішек тербелісінің толқындық теңдеуінің

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0,\ a^2 = T_0 / \rho \tag{4.25}$$

$u(x,0) = \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x)$ бастапқы және $u(0,t) = u(l,t) = 0$ біртекті шекаралық шарттарын қанағаттандыратын шешімін $C^2(G)$ функциялар класынан іздейміз:

Есептің шешімін табу үшін Фурье қатарының теориясына негізделген айнымалыларды ажырату әдісін қолданамыз. G облысында (4.25) теңдеуінің нөлден өзгеше дербес шешімдерін біртекті нөлдік шекаралық шарттарды қанағаттандыратын екі функцияның көбейтіндісі ретінде іздейік:

$$u(x,t) = X(x)T(t). \tag{4.26}$$

(4.26) өрнегін (4.25) бастапқы теңдеуге қойып, айнымалыларын ажыратайық. Сонда

$$\frac{T''(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda. \tag{4.27}$$

(4.27) теңдігінің сол жағы тек t-ға, ол оң жағы x-ке байланысты. Сондықтан (4.27) теңдігінің оң және сол жақтары тек бір λ тұрақтыға тең болғанда, тек сонда ғана орындалады. Сонда (4.27) теңдігінен екі тұрақты коэффициентті екінші ретті қарапайым дифференциалдық теңдеу аламыз:

$$T''(t) + a^2 \lambda T(t) = 0,\ 0 < t < T_1, \tag{4.28}$$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ 0 < x < l. \tag{4.29}$$

$t \in (0, T_1)$ аралығында $T(t) \neq 0$ болғандықтан: $X(0) = X(l) = 0$ шарттары шығады.

Сонымен $X(x)$ функциясын табу үшін келесі түрдегі есепке келеміз: λ параметрінің біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандыратын, (4.29) дифференциалдық теңдеуінің нөлден өзгеше шешімдері бар болатын мәндерін табу керек. Мұндай есепті жоғарыда айтылғандай Штурм-Луивилль есебі немесе спектрлік есеп деп атайды.

Осы тұрғыда қойылған есептің мардымсыз емес шешімі тек

$$\lambda_k = \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2, \; k = 1,2,...$$

мәндерінде табылады (алдыңғы тақырыпты қара). Бұл меншікті мәндерге тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен анықталатын $X_k = \sin\sqrt{\lambda_k} = \sin\frac{k\pi x}{l}$ меншікті функциялары сәйкес қойылады.

$\lambda = \lambda_k$ мәндерінде (4.28) теңдеуінің жалпы шешімі $T_k(t) = a_k \cos\frac{\pi kat}{l} + b_k \sin\frac{\pi kat}{l}$ формуласымен анықталады. Мұнда a_k және b_k кез келген тұрақтылар. Сонда

$$u_k(x,t) = X_k(x)T_k(t) = \left(a_k \cos\frac{\pi kat}{l} + b_k \sin\frac{\pi kat}{l}\right)\sin\frac{\pi kx}{l}$$

функциясы құрылуы бойынша G облысында кез келген a_k және b_k мәндерінде (4.25) бастапқы теңдеуін және біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандырады. Сонымен қатар $u_k(x,t)$ шешімдерінің ақырлы қосындысы да бастапқы теңдеудің шешімі болады. Өйткені бастапқы теңдеу сызықты және біртекті, яғни суперпозиция тәсілі орындалады.

Егер $u(x,t) \in C^2(\overline{G})$ және

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \cos\frac{k\pi at}{l} + b_k \sin\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (4.30)$$

қатары $\overline{G}$ тұйық облысында бірқалыпты жинақты болса, онда суперпозиция тәсілі қатардың бұл қосындысы үшін де дұрыс. (4.30) қатарының әрбір қосылғышы нөлдік шекаралық шарттарды қанағаттандырса, онда осы шартты қатардың қосындысы $u(x,t)$ да қанағаттандырады. Енді бастапқы шарттар орындалатын a_k және b_k тұрақтыларын табу қалды.

(4.30) қатарын t бойынша формальды түрде дифференциалдайық:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}\left(-a_k \sin\frac{k\pi at}{l} + b_k \cos\frac{k\pi at}{l}\right)\sin\frac{k\pi x}{l}. \quad (4.31)$$

(4.30) және (4.31) қатарында $t = 0$ деп алайық. Сонда бастапқы шарттардың есебінен

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin\frac{k\pi x}{l}, \; \psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l} b_k \sin\frac{k\pi x}{l} \qquad (4.32)$$

түріндегі жіктеулерді аламыз. Фурье теориясы негізінде: (4.32) қатарлары берілген $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларының $[0,l]$ кесіндісінде синус бойынша Фурье қатарына жіктелуін көрсетеді. Сонда a_k және b_k коэффициенттері төмендегі формулалармен анықталады:

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,$$

$$b_k = \frac{2}{k\pi a}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx.$$

Ескерту. Жоғарыдағы ішек тербелістерінің толқындық теңдеуінің шешімін $u(x,t)$ $C^2(\overline{G})$ кеңістігінен іздедік. Егер бұл түрдегі шешім табылатын болса, оны классикалық шешім деп атайды.

Сұрақ. $u(x,t)$ толқындық теңдеуінің классикалық шешімі болу үшін $\varphi(x)$ және $\psi(x)$ бастапқы функциялары қай функциялар кеңістігінен алынады?

Бұл сұраққа жауап беру үшін келесі тұжырымды дәлелдеусіз қабылдайық: егер $\varphi(x)$ $[0,l]$ кесіндісінде $\varphi(0)=\varphi(l)=0,\ \varphi'(0)=\varphi'(l)=0$ шарттарын қанағаттандыратын үш рет үзіліссіз дифференциалданатын функция, ал $\psi(x)$ сол аралықта $\psi(0)=\psi(l)=0$ шарты орындалатын екі рет үзіліссіз дифференциалданатын функция болса, онда $u(x,t)\in C^2[0,l]$ және $u(x,t)$ классикалық шешім.

Жалпылама шешім ұғымы

Егер $\varphi(x)$, $\psi(x)$ бастапқы функциялар тұжырымының шарттарын қанағаттандырмаса, онда бірінші бастапқы – шекаралық есептің екі рет үзіліссіз дифференциалданатын шешімі табылмауы мүмкін. Алайда $\varphi(x)\in C^2(R)$ және $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, ал $\psi(x)\in C[0,l]$ болса, онда шешімнің сәйкес (4.30) қатары G облысында бір қалыпты жинақты және үзіліссіз функцияны анықтайды.

Дегенмен бұл шарттарда $C^2(G)$ кеңістігінде (4.25) теңдеуінің классикалық шешімі табылмаса да бәрібір ішек тербелісте болады. Демек, ішектің нақты физикалық тербелісіне сәйкес есептің қандайда бір "жалпылама шешімі" болу керек.

Әрине, бұл жерде функционалдық анализ ұғымдарын тереңірек қолдануға тура келеді. Физикалық мағынасына тоқталатын болсақ, біз бірінші бастапқы шекаралық есептің потенциалдық және кинетикалық энергиялары ақырлы болатын шешімдерін іздейміз, яғни:

$$\int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx < \infty, \quad \int_0^l \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 dx < \infty.$$

Бұдан $u = u(x,t)$ функциясының $L_2[0,l]$ кеңістігінің элементі екенін көреміз.

Анықтама. Егер $n\to\infty$ ұмтылғанда қандайда бір функционалдық кеңістікте $\|u_n - u\|\to 0$ шарты орындалатын ішек тербелісі теңдеуінің $u_1(x,t), u_2(x,t),\ldots,u_n(x,t),\ldots$ тегіс классикалық шешімдерінің тізбегі бар болса, онда $u(x,t)$ функциясын Коши есебінің жалпылама шешімі деп атаймыз.

Бұл жағдай $\{u_n(x,t)\}$ тізбегінің $u(x,t)$ шектік функциясы дифференциалданатын функция болуы міндетті емес екенін көрсетеді. Керісінше ол үзілісті де болуы мүмкін.

Сондықтан тегіс функциялар тізбегінің шектік функцияға өтуін бірқалыпты жинақтылық мағынасында емес, қандайда бір функционалдық кеңістікте нормаланған жинақтылық арқылы орындалатынын естен шығармау керек.

Мысалы, $\|u_n - u\|$ нормасы ретінде квадратымен интегралданатын функциялар кеңістігінің нормасын алуға болады, яғни

$$\|u_n - u\| = \left(\max_t \int_{-\infty}^{\infty} (u_n - u)^2 dx \right)^{1/2}.$$

Осы жағдайда $u_n(x,t)$ функциялар тізбегінің жинақтылығын орташа жинақтылық ретінде түсінеміз.

Сондықтан математикалық физика есептерінің жалпылама шешімдерін анықтағанда біз бұл шешімдер енетін функционалдық кеңістіктерді міндетті түрде көрсетуіміз керек.

Әртүрлі функционалдық кеңістіктерде жалпылама туынды ұғымын пайдалана отырып, С. Л. Соболев дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешімі туралы басқа анықтамасын берді.

Мысалы, ішек тербелісінің қандайда бір $G \subset R^2$ облысында толқындық теңдеуі берілсін делік:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \ \ (x,t) \in G. \tag{4.33}$$

Талқылауға <u>сындық</u> <u>(пробная)</u> функциялар деп аталатын кеңістік енгізейік. Бұл кеңістіктің кез келген $\eta(x,t)$ функциясының G облысында ең болмағанда екінші ретті және оған дейінгі үзіліссіз туындылары бар болсын делік. Сонымен қатар сындық функция G облысының ∂G құрама-тегіс шекарасында нөлге айналсын.

Енді (4.33) теңдеуін $\eta(x,t)$ сындық функциясына көбейтіп, G облысы бойынша интегралдасақ, онда келесі интегралдық теңдікті аламыз:

$$\iint_G \eta \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) dxdt = 0 \Rightarrow$$

$$\iint_G u(x,t) \left(\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \right) dxdt \tag{4.34}$$

Соңғы (4.34) интегралдық теңдігінің дұрыстығы жалпы жағдайдағы <u>бөліктеп интегралдау формуласынан</u> шығады; $f, g \in C^1(\overline{G})$ делік. Сонда

$$\int_G \frac{\partial f}{\partial x_j} g dx = \int_{\partial G} f g \eta_j ds_x - \int_G f \frac{\partial g}{\partial x_j} dx \tag{4.35}$$

мұнда $x \in R^n$; G – құрама-тегіс шекарасымен бірге шенелген облыс; $\eta_j = \cos(\vec{n}, x_j)$ ∂G бетінің сыртқы нормалі мен x_j өсінің арасындағы бұрыштың косинусы.

Сындық функциясының қасиеті бойынша $\eta(x,t)\big|_{\partial G}=0$, $x=(x_1,x_2)=(x,t)$; $g(x_1,x_2)=\eta(x,t)$; $f(x_1,x_2)=u(x,t)$ және (4.35) формуласындағы $\int\limits_G(\ldots)dx=\iint\limits_G(\ldots)dxdt$ білдіреді.

Анықтама (С. Л. Соболев). Дифференциалдық теңдеудің жалпылама шешімі деп, сындық функциялар кеңістігінен алынған кез келген $\eta(x,t)$ функциясы үшін *G* облысында (4.34) интегралдық теңдігін қанағаттандыратын, $u(x,t)$ функциясын айтамыз.

Сонымен дербес туындылы есептерді шығаруда енгізілген дифференциалдық теңдеулердің жалпылама шешімдері математикалық физикада кеңінен қолданылады және функционалдық кеңістіктер өрісі ұлғаяды.

Ескерту. Бакалавр курсында жалпылама шешімдердің тек алғашқы ұғымдарымен шектелеміз. Толық курс магистрлік курста беріледі.

Мембрана тербелістерінің теңдеуі

Мембрана дегеніміз тербеліс кезінде ығысу және иілу деформациялары пайда болатын созылмайтын өте жұқа жазық қабыршық. Тепе-теңдік жағдайында мембрана *XOY* жазықтығының *L* тұйық контурымен шектелген қандайда бір *D* аймағында орналассын делік.

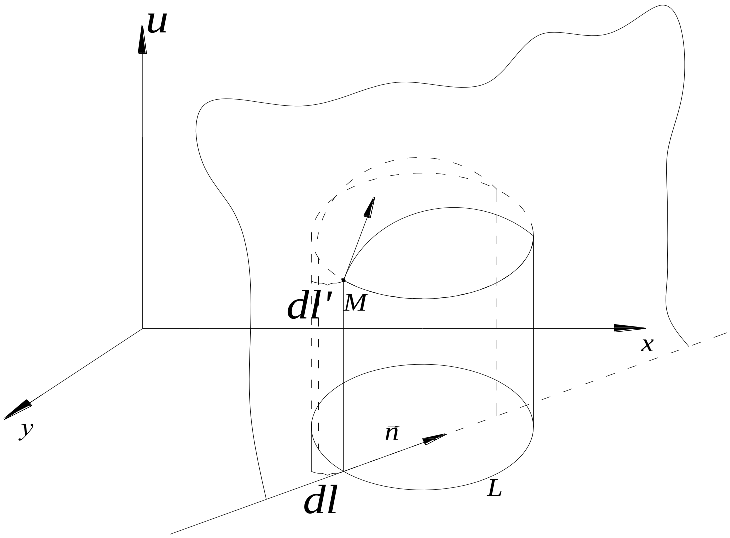
Ығысуы мембрана жазықтығына перпендикуляр мембрананың аз көлденең тербелістерін қарастырайық. Сонда u_x және u_y шамаларының квадраттарын ескермеуге болады. Тербеліс кезінде әрбір *(x,y)* нүктесіндегі мембрананың орны *t* уақыт мезгіліндегі $\vec{u}(x,y,t)$ ығысу векторымен анықталады (21-сур. қара).

ds' - тербеліс кезіндегі мембрана бетінде жатқан қайсыбір контурдың доға элементі, ал *M* сол элементтің ағымдағы нүктесі болсын делік. Бұл элементке $\vec{T}ds'$ керілу күші әсер етеді. Керілу векторы $\vec{T}$ жанасушы жазықтықта жатады және ds' элементіне перпендикуляр. Жанасушы жазықтық *M* нүктесінен жүргізілген жанама мен бас нормаль арқылы өтеді. Керілу күшінің осы нүктедегі шамасы *M* нүктесі бойында жататын ds' элементінің бағытына байланыссыз, өйткені ұйғарым бойынша мембрананың кез келген элементар доғасының ұзындығы созылмайды, яғни $ds'=ds$. Мұнда *ds* тепе-теңдік жағдайындағы ds' элементар доғасының ұзындығы. Мембрананың керілу күші ауырлық күшімен салыстырғанда соншалықты үлкен болғандықтан ауырлық күші ескерілмейді. Сондықтан мембрананың барлық нүктелеріндегі тербеліс *XOY* жазықтығына перпендикуляр бағытта болады. Сонда мембрананың кез келген нүктесінің ығысуы бір скаляр $u(x,y,t)$ функциясымен бейнеленеді. Тербеліс теңдеуін қорытып шығару үшін тыныштық күйінде *l* контурымен шектелген мембрананың σ бөлігінің қозғалысын қарастырайық. Тербеліс кезіндегі σ' бөлігінің ауданы оның тыныштық күйіндегі σ бөлігінің ауданына тең:

$$\sigma' = \iint_{\sigma} \sqrt{1 + u_x^2 + u_y^2}\, dxdy \approx \sigma\,,$$

өйткені ұйғарым бойынша $u_x^2(x, y, t), u_y^2(x, y, t) << 1$.

Мембрананың *σ* бөлігінің қозғалысы Ньютонның екінші заңымен анықталады:



21-сурет. Мембрананың көлденең тербелісі

$$\Delta \vec{P} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}(t) dt \quad (4.36)$$

Осы бөліктің импульсы *t* уақыт мезгілінде *XOY* жазықтығына перпендикуляр бағытталған

$$P(t) = \iint_{\sigma} \rho(x, y) u_t(x, y, t) dxdy$$

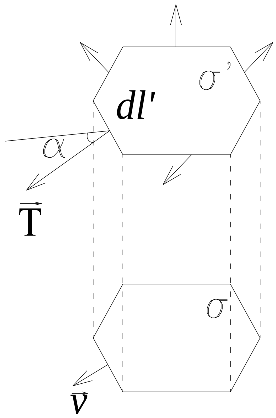
және екі еселі интегралына тең, мұнда $\rho(x, y)$ - массаның беттік тығыздығы, яғни мембрананың бірлік ауданына келетін масса. Сонда *σ* бөлігінің t_1 - ден t_2 - ге дейінгі уақыт аралығындағы импульсының өзгерісі

$$\iint_{\sigma} \rho(x, y)[u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] dxdy \text{ болады.}$$

Енді күш импульсын табайық. Бәрінен бұрын σ' бөлігіне кірмейтін мембрананың қалған жағынан оған әсер ететін керілу күштерінің векторлық қосындысы кіреді. Барлық нүктелер *XOY* жазықтығына перпендикуляр бағытта тербелетін болғандықтан, қосынды күш те *u* осінің бойымен бағытталады.

$\vec{T}dl'$ керілу күшінің *u* бағытына түсірілген проекциясы $Tdl' \sin\alpha$ тең. Мұндағы *α* бұрышы $\vec{T}$ векторы мен *XOY* жазықтығының арасындағы бұрыш (22-сур. қара). Туындының геометриялық мағынасынан және мембрананың аз тербелісінен шығатын теңдіктерді жазайық:

$$\mathrm{tg}\alpha = \frac{\partial u}{\partial \nu}, \ \ \sin\alpha = \frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\alpha}} \approx \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$



22-сурет. Керілу күштерінің векторлық қосындысын анықтау

Сонда бүкіл l' контурындағы керілу күштерінің u бағытына түсірілген проекциясы:

$$F = T\oint_{l'} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl' . \qquad (4.37)$$

Мембрананың аз тербелісін қарастырғандықтан l' контуры бойынша интегралдауды (XOY) жазықтығындағы l контуры бойынша алынған интегралдаумен алмастырамыз.

$u(x, y, t)$ функциясының екінші ретті туындылары бар деп санайық. Сонда Грин формуласы бойынша:

$$\oint_{l} \frac{\partial u}{\partial \nu} dl = \iint_{\sigma} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dxdy . \qquad (4.38)$$

Ньютонның екінші заңының теңдеуіне қайта оралайық. Мембранаға XOY жазықтығына перпендикуляр қандайда бір сыртқы күштер әсер етсін делік. Бірлік ауданға әсер ететін күшті, яғни осы күштің беттік тығыздығын $q(x, y, t)$ арқылы белгілейік. Сонда σ бөлігіне әсер ететін толық сыртқы күш:

$$\iint_{\sigma} q(x, y, t) dxdy .$$

Осы шаманы және (4.37) күшін, (4.38) Грин формуласын есепке ала отырып, (4.36) теңдеуге қояйық:

$$\iint_{\sigma} \rho(x, y)[u_t(x, y, t_2) - u_t(x, y, t_1)] dxdy =$$
$$= \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_{\sigma} [T(u_{xx} + u_{yy}) + q(x, y, t)] dxdy.$$

Сонда сол жақтағы уақыт бойынша алынған бірінші ретті туындылардың айырымын екінші ретті туындының интегралы арқылы, және интегралдау облысының еркіндігін ескере отырып, мембрананың көлденең тербелісінің дифференциалдық теңдеуін аламыз:

$$\rho(x, y) u_{tt} = T(u_{xx} + u_{yy}) + q(x, y, t).$$

$\rho(x, y) = const$ делік. Тығыздыққа бөліп біртекті емес екі өлшемді

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right) + f(x, y, t)$$

толқындық теңдеуін аламыз, мұнда

$$a = \sqrt{T/\rho},\ f(x, y, t) = \frac{1}{\rho} q(x, y, t).$$

$f(x, y, t)$ функциясы мембрананың бірлік массасына әсер ететін күшті, яғни меншікті күшті көрсетеді.

Егер сыртқы күштер жоқ деп санасақ, онда мембрананың еркін тербелісінің теңдеуін аламыз:

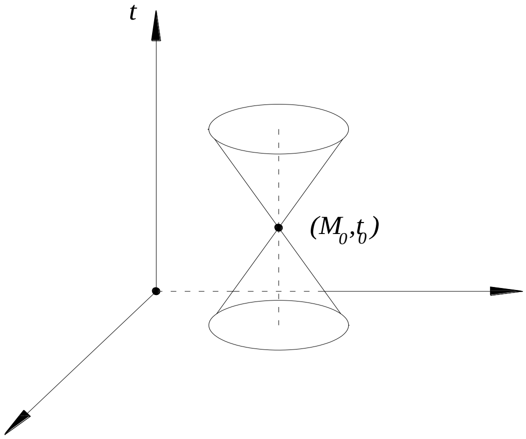
$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx} + u_{yy}\right). \tag{4.39}$$

Бірмәнді шешімін табу үшін

$$u(x, y, 0) = \varphi(x, y),\ u_t(x, y, 0) = \psi(x, y)$$

бастапқы шарттарымен қатар шекаралық шарттар да берілуі қажет. Мысалы мембрана контур бойынша бекітілген болса, онда шекаралық шарт $u|_L = 0, t \geq 0$ түрінде жазылады.

(4.39) теңдеуімен сиптталатын үдерістерде ұйтқу (возмущение) ақырлы жылдамдықпен таралатынын атап өтейік. Кеңістік күйін зерттеу үшін бұл теңдеудің төбесі M_0 нүктесінде жататын характеристикалық конусын қарастырайық (23-сур. қара).



23-сурет. Екі өлшемді теңдеудің характеристикалық конусы

M_0 нүктесінде орналасқан ұйтқу көзінен t_0 уақыт мезгілінде шыққан сигналдың $t > t_0$ уақыт мезгіліндегі фазалық кеңістіктегі нүктелеріне $r_{M_0M} = a(t - t_0), t > t_0$ теңдеуімен анықталатын конустың жоғарғы қуыс беті сәйкес келеді. $r_{M_0M} = a(t - t_0), t > t_0$ конус қуысының төменгі беті t_0 уақыт мезгілінде M_0 нүктесіне келетін сигналдардың кеңістіктегі нүктелерінің геометриялық орнын анықтайды.

Үш өлшемді кеңістікте толқындардың таралуы. Коши есебі. Кирхгоф формуласы

Акустикалық тербелістерде қозғалыс жылдамдығының потенциалы, салыстырмалы қысым және газ тығыздығы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

түріндегі толқындық теңдеуімен сипатталады. Толқындық теңдеуге бастапқы шарттар қойып:

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x, y, z), \;\; u_t\big|_{t=0} = \psi(x, y, z),$$

Коши есебінің $u(x, y, z, t)$ функциясына қатысты шешімінің Кирхгоф формуласын қорытып шығарайық. Қарастырылып отырған есеп сызықтық есеп болғандықтан оның $u(x, y, z, t)$ шешімін төмендегі екі есептің шешімдерінің қосындысы $u(x, y, z, t) = v(x, y, z, t) + w(x, y, z, t)$ ретінде алайық:

$$(1)\;\begin{cases} v_{tt} = a^2\Delta v \\ v\big|_{t=0} = 0, \\ v_t\big|_{t=0} = \psi, \end{cases} \qquad (2)\;\begin{cases} w_{tt} = a^2\Delta w \\ w\big|_{t=0} = \varphi, \\ w_t\big|_{t=0} = 0, \end{cases} \tag{4.40}$$

мұндағы $\Delta = \Delta_{x,y,z} = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial z^2}$ операторы (x,y,z) айнымалылары бойынша Лаплас операторы.

Егер бірінші есептің осы қойылымдағы шешімі табылатын болса, онда $w = \dfrac{\partial P}{\partial t}$ алмастыруын енгізе отырып, екінші есепті бірінші есепке келтіруге болатынын көрсетейік.

Шынында да $p(x, y, z, t)$: $p_{tt} = a^2\Delta p \quad p\big|_{t=0} = 0, p_t\big|_{t=0} = \varphi$ Коши есебінің шешімі болсын делік. Сонда

$$w_{tt} = p_{ttt} = \frac{\partial}{\partial t}\left(a^2\Delta p\right) = a^2\Delta\left(\frac{\partial p}{\partial t}\right) = a^2\Delta w,$$

$$w\big|_{t=0} = p_t\big|_{t=0} = \varphi, \; w_t\big|_{t=0} = p_{tt}\big|_{t=0} = a_2\Delta p\big|_{t=0} = 0,$$

өйткені $p\big|_{t=0} = 0$. Бұдан (1) есептің шешімі табылатын болса, онда міндетті түрде (2) - есептің шешімі табылады.

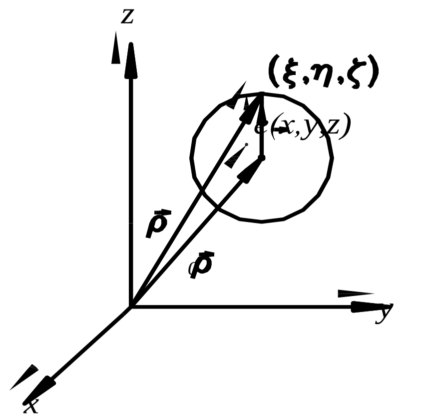
Тікелей (4.40) теңдеуіне қойып (1) - есептің шешімі

$$v(x, y, z, t) = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \psi(\xi, \eta, \zeta)\, dS\,.$$

түрінде болатынына көз жеткізейік. Мұнда $S_{at}^{x,y,z}$ -ортасы (x, y, z) нүктесінде жататын, ал радиусы at - ға тең сфера.

Есептеулерді ықшамдау үшін (at) айнымалы радиусты сфера бойынша алынатын интегралды бірлік радиусты сфера бойынша алынатын интегралға түрлендірейік.

$\vec{\rho}_0$ және $\vec{\rho}$ арқылы (x,y,z) бекітілген және $(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}^{(x,y,z)}$ ағымдық нүктелерінің сәйкес радиус векторларын белгілейік (24-сур. қара).



24-сурет. Центрі (x,y,z) нүктесінде жататын радиусы $|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0| = at$ болатын $S_{at}^{(x,y,z)}$ - сферасы

Және $\vec{\rho}-\vec{\rho}_0$ векторының бірлік векторын $\vec{e}$ арқылы белгілесек, онда $\vec{e} = \dfrac{\vec{\rho}-\bar{\rho}_0}{|\vec{\rho}-\bar{\rho}_0|} = \vec{i}\cos\alpha + \vec{j}\cos\beta + \vec{k}\cos\gamma$. Мұнда $\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}$ - $\vec{e}$ векторының бағыттаушы косинустары. Сонда

$$\xi = x + at\cos\alpha,$$

$$\eta = y + at\cos\beta,$$

$$\zeta = z + at\cos\gamma,$$

өйткені $\vec{\rho}-\vec{\rho}_0 = \{\xi - x; \eta - y; \zeta - z\}$, ал $|\vec{\rho}-\vec{\rho}_0| = at$.

Енді dS_1 центрі бас нүктеде жататын $S_1^{(0,0,0)}$ бірлік сферадағы аудан элементі болсын делік. Сонда $dS = (at)^2 dS_1$ және

$$v(x,y,z,t) =$$

$$= \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} \psi(x + at\cos\alpha, y + at\cos\beta, z + at\cos\gamma)dS_1 \tag{4.41}$$

Негізгі мақсат осы функцияның бірінші есептің шешімін беретінін көрсету. Сондықтан $v_{tt}(x,y,z,t)$ және $\Delta v(x,y,z,t)$ табайық.

$$v_t = \frac{1}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} \psi(x + at\cos\alpha, y + at\cos\beta, z + at\cos\gamma)dS_1 +$$

$$+ \frac{ta}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} \left(\frac{\partial\psi}{\partial\xi}\cos\alpha + \frac{\partial\psi}{\partial\eta}\cos\beta + \frac{\partial\psi}{\partial\zeta}\cos\gamma\right)\Bigg|_{(\xi,\eta,\zeta)} dS_1. \tag{4.42}$$

Соңғы өрнекте $S_{at}^{(x,y,z)}$ сферасы бойынша алынатын интегралға қайта оралайық және беттік интегралды көлемдік интегралмен алмастыруда Остроградский-Гаусс формуласын пайдаланайық. Сонда

$$v_t = \frac{1}{t}v + \frac{1}{4\pi at}\iiint\limits_{V_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi dV = \frac{1}{t}v + \frac{1}{4\pi at}J(t),$$

$J(t) = \iiint\limits_{V_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi dV$, ал $V_{at}^{(x,y,z)}$ - ортасы (x,y,z) нүктесінде жататын радиусы at-ға тең шар; $\Delta_{\xi,\eta,\zeta}$ - (ξ,η,ζ) айнымалылары бойынша Лаплас операторы. Әрі қарай уақыт бойынша екінші ретті дербес туындысын табайық:

$$\begin{aligned}
v_{tt} &= -\frac{1}{t^2}v + \frac{1}{t}v_t - \frac{1}{4\pi at^2}J(t) + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J(t)}{\partial t} = \\
&= -\frac{1}{t^2} + \frac{1}{t}\left[\frac{1}{t}v + \frac{1}{4\pi at}J(t)\right] - \frac{1}{4\pi at^2}J(t) + \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J(t)}{\partial t} = \\
&= \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial J(t)}{\partial t} = \frac{1}{4\pi at}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^{at}\left(\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi dS\right) = \\
&= \frac{1}{4\pi at}\cdot a\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi dS = \frac{1}{4\pi t}\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi dS.
\end{aligned}$$

Енді кеңістік координаттары бойынша $\Delta_{x,y,z}v$ табайық.

$$\begin{aligned}
\Delta_{x,y,z}v &= \Delta_{x,y,z}\frac{1}{4\pi a^2 t}\left(\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \psi(\xi,\eta,\zeta)dS\right) = \Delta_{x,y,z}\left(\frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} \psi dS_1\right) = \\
&= \frac{t}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} \Delta_{x,y,z}\psi dS_1 = \frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \Delta_{x,y,z}\psi dS.
\end{aligned}$$

Түрлендіру формулаларынан $\Delta_{\xi,\eta,\zeta}\psi = \Delta_{x,y,z}\psi$ тең екені шығады. Сонда $v(x,y,z,t)$ бірінші есептің шешімі болады, өйткені $v_{tt} = a^2\Delta v$. Бастапқы шарттардың орындалуын тексерейік: классикалық шешімге сай $\psi \in C^2\left(S_1^{(0,0,0)}\right)$ функциялар кеңістігінен алынғандықтан $M > 0$ тұрақтысы табылып $|\psi|_{S_1^{(0,0,0)}} < M$ және $|\operatorname{grad}\psi|_{S_1^{(0,0,0)}} < M$ теңсіздіктері орындалады. Сонда (4.41) және (4.42) өрнектерінен $at \to 0$ ұмтылғанда $v|_{t=0} = 0$ және

$$v_t = \psi|_{(\xi,\eta,\zeta)\in S_{at}^{(x,y,z)}} + \frac{at}{4\pi}\iint\limits_{S_1^{(0,0,0)}} (\operatorname{grad}\psi, \vec{n})dS$$

бастапқы шарттарының орындалатынын көреміз. Сонымен (1) - есептің шешімі $v(x,y,z,t)$, ал (2) - есептің шешімі:

$$w(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint\limits_{S_{at}^{(x,y,z)}} \varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right).$$

Сонда үш өлшемді біртекті толқындық теңдеудің Коши есебінің шешімі келесі түрде табылады:

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^{(x,y,z)}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^{(x,y,z)}}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS. \tag{4.43}$$

Егер біз үш өлшемді біртекті емес толқындық теңдеудің Коши есебін қарастырсақ:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t),$$
$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y,z).$$

Онда Дюамель әдісіне сүйене отырып, (4.43) біртекті теңдеудің шешімінің оң жағына $\text{Дю.}=\int_0^t\frac{d\tau}{4\pi a^2(t-\tau)}\iint_{S_{a(t-\tau)}^{(x,y,z)}}f(\xi,\eta,\zeta)dS$ интегралын қосамыз.

Дюамель интегралында $a(t-\tau)=r$ алмастыруын енгізіп, оны түрлендірейік:

$$\text{Дю.}=\int_0^{at}\frac{dr}{4\pi a^2 r}\iint_{S_r^{(x,y,z)}}f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)dS=$$
$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{V_{at}^{(x,y,z)}}\frac{1}{r}f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)dV.$$

Сонымен біртекті емес толқындық теңдеудің Коши есебінің қойылымындағы шешімінің табылған интегралдық көрсетілуі:

$$u(x,y,z,t)=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^{(x,y,z)}}\varphi(\xi,\eta,\zeta)dS\right)+\frac{1}{4\pi a^2 t}\iint_{S_{at}^{(x,y,z)}}\psi(\xi,\eta,\zeta)dS+$$
$$+\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{V_{at}^{(x,y,z)}}\frac{1}{r}f\left(\xi,\eta,\zeta,t-\frac{r}{a}\right)dV.$$

Кирхгоф формуласы деп аталады.

Екі өлшемді кеңістікте толқындық теңдеудің $u(x,y,t)$ функциясына қатысты Коши есебі берілсін делік.

$$u_{tt}=a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right)\quad\left\{(x,y)\in R^2,t>0\right\},$$
$$u\big|_{t=0}=\varphi(x,y),\ u_t\big|_{t=0}=\psi(x,y)\ \ \forall(x,y)\in R^2.$$

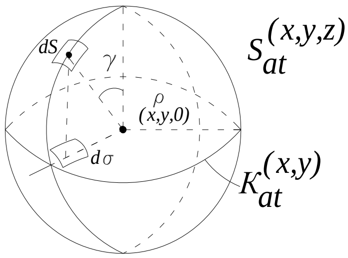
Сонда бастапқы шарттарды қанағаттандыратын шешімін Кирхгоф формуласынан қия түсу (метод спуска) әдісімен табамыз. φ және ψ бастапқы функциялар z айнымалысынан тәуелсіз. Демек (4.43) формуласы анықтайтын $u(x,y,t)$ функциясы да z - тен тәуелсіз.

Сонымен кеңістік есебінің шешімін беретін (4.43) формуласы жазықтық есебінің шешімін табуға мүмкіндік береді.

(4.43) формуласында интегралдау $S_{at}^{(x,y,z)}$ сферасы бойынша жүргізіледі. Бастапқы шарттардың z - тен тәуелсіздігі үстіңгі жарты сфера бойынша интегралдауды $K_{at}^{(x,y)}$ дөңгелегі бойынша интегралдаумен алмастыруға болатынын көрсетеді (25-сур. қара). Бұл жерде $K_{at}^{(x,y)}$ дөңгелегі $S_{at}^{(x,y,z)}$ сферасын (XOY) жазықтығымен қиғаннан пайда болады. Бет элементі dS жазықтық элементі $d\sigma$ - мен $d\sigma = dS\cos\gamma$ арақатынасымен байланысты. Мұндағы

$$\cos\gamma = \frac{\sqrt{(at)^2-\rho^2}}{at} = \frac{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}{at}.$$

Астыңғы жарты сфера бойынша интегралдау тағы да $K_{at}^{(x,y)}$ дөңгелегі бойынша жүргізіледі. Демек, дөңгелек бойынша интегралдау екі рет қайталанады.



25-сурет. $K_{at}^{(x,y)}$ *интегралдау облысы*

Нәтижесінде келесі формуланы аламыз:

$$u(x,y,t) = \frac{1}{2\pi}\Big[\frac{\partial}{\partial t}\iint_{K_{at}^{(x,y)}} \frac{\varphi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} + \\ + \iint_{K_{at}^{(x,y)}} \frac{\psi(\xi,\eta)\,d\xi d\eta}{\sqrt{(at)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}}\Big] \qquad (4.44)$$

Біртекті емес теңдеу жағдайында:

$$u_{tt} = a^2\left(u_{xx}+u_{yy}\right),\ u\big|_{t=0} = \varphi,\ u_t\big|_{t=0} = \psi$$

біртекті (4.44) - теңдеудің шешімінің оң жағына Дюамель

$$Дю. = \frac{1}{2\pi a}\int_0^t d\tau \iint_{K_{a(t-\tau)}^{(x,y)}} \frac{f(\xi,\eta,t)\,d\xi d\eta}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2-(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}} \qquad (4.45)$$

интегралы қосылады.

Толқындық теңдеудің Коши есебіне қатысты (4.44), (4.45) шешімін Пуассон формуласы деп атайды.

Дәл осы сияқты бастапқы функциялар тек бір айнымалы x-ке тәуелді болса, онда (4.44) формуласы бірөлшемді толқындық теңдеудің Коши есебіне қатысты Даламбер шешімін береді (дәлелдеуін өзіндік жұмысқа ұсынамыз).

Мысал. Ұйтқулар (возмущение) аз болған жағдайда сығылған сұйықтың құйынсыз қозғалыс заңын тап. Жылдамдықтың потенциалы үшін бастапқы шарттар берілген $\Phi\big|_{t=0} = 3x^2 + y^2,\ \Phi_t\big|_{t=0} = 0$ (жазықтықтағы толқындық теңдеу үшін Коши есебі).

Шешімі. Бастапқы шарттар тек x пен y-ке тәуелді болғандықтан, сұйықтың қозғалысын жазық деп есептеуге болады. Есептің математикалық қойылымы:

$$\Phi_{tt} = a^2\left(\Phi_{xx} + \Phi_{yy}\right), \quad \Phi\big|_{t=0} = 3x^2 + y^2, \quad \Phi_t\big|_{t=0} = 0,$$

мұнда a – тыныштық ортадағы дыбыс жылдамдығы. Жоғарыда көрсетілгендей гиперболалық теңдеу үшін Коши есебінің шешімін Пуассон формуласы өрнектейді:

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\iint\limits_{(D)} \frac{\Phi_1(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}} +$$

$$+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{(D)} \frac{\Phi_0(\xi,\eta)d\xi d\eta}{\sqrt{a^2t^2 - (x-\xi)^2 - (y-\eta)^2}},$$

мұнда (D) облысы $(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 \le a^2t^2$ дөңгелегі. Бұл жағдайда бастапқы шарттардың әсерінен бірінші қосылғыш нөлге тең. Ал екінші қосылғышта полярлық координаттар жүйесіне көшеміз, яғни $\xi - x = r\cos\varphi,\ \eta - y = r\sin\varphi$ алмастыруын енгіземіз. Сонда

$$\Phi(x,y,t) = \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r<at} \frac{3(x + r\cos\varphi)^2 + (y + r\sin\varphi)^2}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} r dr d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{r<at}\left[\frac{\left(3x^2 + y^2\right)r}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \frac{r^3\left(2\cos^2\varphi + 1\right)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{2r^2(3x\cos\varphi + y\sin\varphi)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}}\right] dr d\varphi =$$

$$= \frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(3x^2 + y^2\right)\iint\limits_{r<at} \frac{r dr d\varphi}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} + \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{at} \frac{r^3\left(2\cos^2\varphi + 1\right)}{\sqrt{a^2t^2 - r^2}} dr\right] =$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\begin{array}{l}\left(3x^2+y^2\right)2\pi\int\limits_0^{at}\frac{-0{,}5d\left(a^2t^2-r^2\right)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}dr-\\-\int\limits_0^{2\pi}(2+\cos 2\varphi)d\varphi\int\limits_0^{at}\frac{\left(r^2-a^2t^2+a^2t^2\right)d\left(a^2t^2-r^2\right)}{2\sqrt{a^2t^2-r^2}}\end{array}\right]=$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[\left(3x^2+y^2\right)2\pi at-4\pi\cdot\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}-\int\limits_0^{at}\sqrt{a^2t^2-r^2}\,d\left(a^2t^2-r^2\right)+\\+a^2t^2\int\limits_0^{at}\frac{d\left(a^2t^2-r^2\right)}{\sqrt{a^2t^2-r^2}}\end{array}\right)\right]=$$

$$=3x^2+y^2+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left[2\pi\frac{\left(a^2t^2-r^2\right)^{3/2}}{3/2}-2\pi a^2t^2\frac{\left(a^2t^2-r^2\right)^{1/2}}{1/2}\right]\Bigg|_0^{at}=$$

$$=3x^2+y^2+\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(4\pi a^3t^3-\frac{4}{3}\pi a^3t^3\right)=$$

$$=3x^2+y^2+4a^2t^2.$$

Сонымен есептің шешімі:

$$\Phi(x,y,t)=3x^2+y^2+4a^2t^2,\ t\geq 0,\ \begin{array}{l}-\infty<x<\infty,\\-\infty<y<\infty.\end{array}$$

Мысал. Ұйтқулар аз болған жағдайда сығылған сұйықтың құйынсыз қозғалыс заңын тап. Жылдамдықтың потенциалы үшін бастапқы шарттар берілген $\Phi\big|_{t=0}=5x^2+3y^2+4z^2$, $\Phi_t\big|_{t=0}=0$ (кеңістіктегі толқындық теңдеу үшін Коши есебі). Тыныштық ортадағы дыбыс жылдамдығын бірге тең деп қабылдаңыз.

Шешімі. Есептің математикалық қойылымы:

$$\Phi_{tt}=a^2\left(\Phi_{xx}+\Phi_{yy}+\Phi_{zz}\right),\ \Phi\big|_{t=0}=5x^2+3y^2+4z^2,\ \Phi_t\big|_{t=0}=0,$$

мұнда a – тыныштық ортадағы дыбыс жылдамдығы. Бастапқы шарттары $\Phi\big|_{t=0}=\Phi_0$, $\Phi_t\big|_{t=0}=\Phi_1$ болатын жоғарыда берілген теңдеудің шешімін Кирхгоф формуласы береді:

$$\Phi(x,y,z,t)=\frac{1}{4\pi a^2t}\int\limits_{|\bar{x}-\bar{\xi}|=at}\Phi_1\left(\bar{\xi}\right)dS_{\bar{\xi}}+\frac{1}{4\pi a^2t}\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{t}\int\limits_{|\bar{x}-\bar{\xi}|=at}\Phi_0\left(\bar{\xi}\right)dS_{\bar{\xi}}\right],$$

мұнда $\bar{x}=(x,y,z),\bar{\xi}\left(\xi_1,\xi_2,\xi_3\right)$, ал интегралдар беттер бойынша алынады. Бұл жағдайда бірінші қосылғыш нөлге тең. Ортасы (x,y,z) нүктесіндегі радиусы t-ға тең $\left(x-\xi_1\right)^2+\left(y-\xi_2\right)^2+\left(z-\xi_3\right)^2=t^2$ сферасының беті бойынша $\Phi_0\left(\bar{\xi}\right)=5\xi_1^2+3\xi_2^2+4\xi_3^2$ функциясынан J беттік интегралын есептейміз. $\xi_1-x=\eta_1,\xi_2-y=\eta_2,\xi_3-z=\eta_3$ айнымалыларын енгізудің нәтижесінде:

$$J = \int\limits_{|\bar{x}-\bar{\xi}|=t} \Phi_0(\bar{\xi}) dS_{\bar{\xi}} = \iint\limits_{|\bar{\eta}|=t} \left[5(x+\eta_1)^2 + 3(y+\eta_2)^2 + 4(z+\eta_3)^2\right] dS_{\bar{\eta}} .$$

Әрі қарай $|\bar{\eta}| = t$ беттік теңдеуінен, яғни $\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2 = t^2$ $\eta_3 = \pm\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}$ болатыны шығады. Бұдан

$$dS_{\bar{\eta}} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial \eta_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \eta_3}{\partial \eta_2}\right)^2} d\eta_1 d\eta_2 = \frac{t d\eta_1 d\eta_2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 \eta_2^2}} .$$

$|\bar{\eta}| = t$ сферасының жоғарғы жарты бөлігі бойынша алынатын интегралды J_+, ал төменгі бөлігі бойынша алынатын интегралды J_- арқылы белгілейік. Сонда

$$J_\pm = \iint\limits_{\eta_1^2+\eta_2^2=t^2} \frac{5(x+\eta_1)^2 + 3(y+\eta_2)^2 + 4\left(z \pm \sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}\right)^2}{\sqrt{t^2 - \eta_1^2 - \eta_2^2}} t d\eta_1 d\eta_2 .$$

Бұл екі еселі интегралды полярлық координаттар жүйесіне көшіп есептейік:

$$J_\pm =$$

$$= \int\limits_0^t dr \int\limits_0^{2\pi} \frac{tr}{\sqrt{t^2 - r^2}} \begin{bmatrix} 5(x + r\cos\varphi)^2 + 3(y + r\sin\varphi)^2 + \\ + 4\left(z \pm \sqrt{t^2 - r^2}\right)^2 \end{bmatrix} d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{(5x^2 + 3y^2 + 4z^2)2\pi + 8\pi^2 t \pm 16\sqrt{t^2 - r^2}}{\sqrt{t^2 - r^2}} rtdr =$$

$$= 2\pi t^2 \left(5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 4t^2 \pm 4zt\right).$$

Нәтижесінде:

$$J = J_+ + J_-,\ \Phi(x,y,z,t) = \frac{1}{4\pi a^2} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{t} J\right) = 5x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 12t^2$$ **Мысал.**

Тербеліс теңдеуі үшін келесі аралас қойылымдағы есепті қарастырайық:

$$u_{tt} = u_{xx} - u + \sin x, 0 < x < \pi, 0 < t < \infty,$$

$$u_x\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=\pi} = 0, u\big|_{t=0} = \cos x, u_t\big|_{t=0} = \sin x.$$

Физикалық интерпретациясын талдамай-ақ, математикалық тұрғыда шешу жолын көрсетейік.

1) Базис құрамыз:

$$\begin{cases} -u''(x) = \lambda u(x), x \in (0,\pi), \\ u'(0) = 0, u'(\pi) = 0, u(x) \neq 0, \|u\| = 1. \end{cases}$$

Бұл жағдайда

$$\lambda_k = k^2,\ k = 0,1,2,\ldots,$$

$$u_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ u_k(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx,\ k = 1,2,\ldots.$$

2) Фурье қатарына жіктейік.

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t)u_k(x).$$

Алдымен $\sin x$ функциясын жіктейік. Ол үшін келесі түрдегі интегралдарды есептейік:

$$f_k=(\sin x,u_k(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\cos kxdx=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\sin(k+1)x-\sin(k-1)x]dx=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{\cos(k+1)x}{k+1}\Big|_0^{\pi}+\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\Big|_0^{\pi}\right]=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[-\frac{(-1)^{k+1}-1}{k+1}+\frac{(-1)^{k-1}-1}{k-1}\right]=\begin{cases}0,\text{егер}\, k=2n+1, n=0,1,2,\ldots,\\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{k^2-1},\text{егер}\, k=2n.\end{cases}$$

Мұнда ерекше жағдайлар $k=0,1$:

$$f_0=(\sin x,u_0(x))=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx=\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

$$f_1=(\sin x,u_1(x))=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\pi}\sin x\cos xdx=0.$$

$\sin x$ үшін ақырғы жіктелуін жазайық:

$$\sin x=\sum_{k=0}^{\infty}f_ku_k(x),$$

мұнда

$$f_k=\begin{cases}\frac{2}{\sqrt{\pi}},k=0,\\ -\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{2}{4m^2-1},k=2m,m=1,2,\ldots,\\ 0,k=2m+1,m=0,1,2,\ldots.\end{cases}$$

$\cos x$-ті жіктерде бұл функцияның $u_1(x)$ функциясымен тұрақты көбейткішке дейінгі дәлдікпен беттесетінін пайдаланамыз. Демек,

$$u_{0k}=(\cos x,u_k(x))=\begin{cases}\sqrt{\frac{\pi}{2}},k=1\\ 0,k=0,2,3,\ldots\end{cases}\Rightarrow u_{0k}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{k,1}.$$

Сонда $\cos x$ үшін Фурье қатары:

$$\cos x=\sum_{k=0}^{\infty}\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{k,1}u_k(x).$$

3) $c_k(t)$ үшін теңдеу:

$$c_k''(t)+(\lambda_k+1)c_k(t)=f_k \Rightarrow c_k''(t)+(k^2+1)c_k(t)=f_k, \forall k .$$

Кез келген k үшін біртекті теңдеудің шешімін жазайық:

$$c_k^0(t)=A_k\cos\sqrt{k^2+1}t+B_k\sin\sqrt{k^2+1}t, \forall k .$$

Біртекті емес теңдеудің дербес шешімін табарда анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданамыз. $\tilde{c}_k(t)=C_k$ делік, мұнда C_k - тұрақты. Демек,

$$(k^2+1)C_k=f_k \Rightarrow C_k=\frac{f_k}{k^2+1}, \forall k.$$

Нәтижесінде біртекті емес теңдеудің жалпы шешімі:

$$c_k(t)=\frac{f_k}{k^2+1}+A_k\cos\sqrt{k^2+1}t+B_k\sin\sqrt{k^2+1}t$$ болады.

4) Бастапқы шарттарды пайдаланайық. Бірінші шарттан

$$c_k(0)=u_{0k} \Rightarrow \frac{f_k}{k^2+1}+A_k=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{k,1} \Rightarrow$$

$$A_k=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{k,1}-\frac{f_k}{k^2+1}, \forall k.$$

Екінші шарт

$$c_k'(0)=u_{0k} \Rightarrow \sqrt{k^2+1}B_k=f_k \Rightarrow B_k=\frac{f_k}{\sqrt{k^2+1}}, \forall k$$

қатынасын береді. Сонда A_k және B_k тұрақтыларын ескеретін болсақ:

$$c_k(t)=\frac{f_k}{k^2+1}+\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta_{k,1}-\frac{f_k}{k^2+1}\right)\cos\sqrt{k^2+1}t+$$

$$+\frac{f_k}{\sqrt{k^2+1}}\sin\sqrt{k^2+1}t.$$

5) Енді ізделінетін $u(t,x)$ функциясы үшін

$$u(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k(t)u_k(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2}}\cos\sqrt{2}tu_1(x)+$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f_k}{k^2+1}\left[1-\cos\sqrt{k^2+1}t+\sqrt{k^2+1}\sin\sqrt{k^2+1}t\right]u_k(x)=$$

$$=\cos\sqrt{2}t\cos x+\frac{2}{\pi}(1-\cos t+\sin t)-$$

$$-\frac{4}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1-\cos\sqrt{4m^2+1}t+\sqrt{4m^2+1}\sin\sqrt{4m^2+1}t}{16m^2-1}\cos 2mx$$

өрнегін аламыз. Бұл жоғарыда қойылған есептің шешімі.

Мысал. Келесі аралас қойылымындағы тербеліс теңдеуінің есебін біртекті шекаралық есепке түрлендірейік:

$$\begin{cases} u_{tt} = u_{xx} - u + t\left(x^2 - 2\right) + \sin x, 0 < x < \pi, 0 < t < \infty, \\ u_x\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t, u\big|_{t=0} = \cos x, u_t\big|_{t=0} = \sin x + x^2. \end{cases}$$

Осы қойылымдағы есепті шығаруда тікелей алдыңғы есептің әдісін қолдануға болмайды, өйткені онда біз меншікті мәндерді табуда тек біртекті шекаралық шарттарды пайдаландық. Бұл принцип меншікті функциялардың сызықты комбинациясы сол теңдеудің шешімі болады деген ережеге негізделген. Алайда, біртекті емес шекаралық шарттарды белгісіз функцияны енгізу арқылы жоюға болады.

$$u(t,x) = \tilde{u}(t,x) + \varphi(t,x) \text{ делік,}$$

мұндағы $\varphi(t,x)$ функциясын $\left.\left(\alpha(x)\varphi + \beta(x)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = v(t,x)$ теңдігі орындалатындай етіп таңдаймыз. Сонда $\tilde{u}(t,x)$ функциясы біртекті шекаралық шарттарды қанағаттандырады:

$$\left.\left(\alpha(x)u + \beta(x)\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} =$$

$$= \left.\left(\alpha(x)\tilde{u} + \beta(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} + \left.\left(\alpha(x)\varphi + \beta(x)\frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} = v(t,x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left.\left(\alpha(x)\tilde{u} + \beta(x)\frac{\partial \tilde{u}}{\partial n}\right)\right|_{\partial G} \equiv 0.$$

G облысының ішкі нүктелерінде $\varphi(t,x)$ функциясына тек тегістіктен (гладкость) басқа шектеулік қойылмағандықтан бұл функцияны таңдау бірмәнді емес. Сондықтан есеп шығарғанда өте қарапайым мүмкіндікті пайдаланған жөн. Демек, кейде $\varphi(t,x)$ функциясының айқын түрін $\varphi(t,x) = a(t)x + b(t)$ немесе $\varphi(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ деп ұйғару жеткілікті болады. Әрине $u = \tilde{u} + \varphi$ алмастыруында теңдеу де және бастапқы шарттар да өзгеретінін естен шығармау керек. Практикалық тұрғыдан қарағанда бұдан не теңдеуді не бастапқы шарттарды қосымша ықшамдауға мүмкіндік туады.

Берілген есепке қайтадан оралатын болсақ, ∂G шекарасында $\varphi(t,x)$ функцисының қанағаттандыратын шарттары төмендегідей:

$$\varphi_x\big|_{x=0} = 0, \varphi_x\big|_{x=\pi} = 2\pi t.$$

$\varphi(t,x) = a(t)x + b(t)$ функциясы жоғарыдағы шарттармен бірмәнді анықталмайтынын тексеру қиындық туғызбайды. Сол себепті $\varphi(t,x)$ функциясын $\varphi(t,x) = a(t)x^2 + b(t)x + c(t)$ түрінде таңдап алайық:

$$\varphi_x = 2a(t)x + b(t) \Rightarrow \begin{cases} b(t) = 0 \\ 2a(t)\pi + b(t) = 2\pi t \end{cases} \Rightarrow \varphi = tx^2,$$

$c(t)$ функциясы нөлге тең дейік. $u = \tilde{u} + \varphi$ алмастыруынан кейін теңдеу $\tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - \tilde{u} + \sin x$ түріне келеді. Сонымен қатар бастапқы шарттар да өзгереді:

$$u\big|_{t=0} = \tilde{u}\big|_{t=0} + tx^2\big|_{t=0} = \tilde{u}\big|_{t=0} \Rightarrow \tilde{u}\big|_{t=0} = \cos x,$$

$$u_t\big|_{t=0} = \tilde{u}_t\big|_{t=0} + x^2 \Rightarrow \tilde{u}_t\big|_{t=0} = \sin x.$$

$\tilde{u}(t,x)$ функциясы үшін аралас есеп

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = \tilde{u}_{xx} - \tilde{u} + \sin x, 0 < x < \pi, 0 < t < \infty, \\ \tilde{u}_x\big|_{x=0} = 0, \tilde{u}_x\big|_{x=\pi} = 0, \tilde{u}\big|_{t=0} = \cos x, \tilde{u}_t\big|_{t=0} = \sin x. \end{cases}$$

түрінде жазылады. Бұл есеп мысал ретінде жоғарыда шешілген.

Жаттығулар

1. Ұштары бекітілген ұзындығы l ішектің x_1 және x_2 нүктелеріне $f_1(t)$ және $f_2(t)$ қадалған күштері түсірілген. Ішек тербелісінің математикалық қойылымын жаз.
2. $\vec{\nu}$ контурдың нормаль векторын $\vec{\tau}$ жанама вектор арқылы, ал бағыт бойынша алынған туындыны градиент арқылы өрнектеп және Стокс формуласын пайдаланып екі өлшемді Грин формуласын қорытып шығар.
3. Ішек тербеліс теңдеуінің үзілісті шешімінің физикалық мағынасы неде және толқындық теңдеулердің үзілісті шешімдері туралы не айтуға болады?
4. Кедергі күші жылдамдықтың бірінші дәрежесіне пропорционал ортада ішектің көлденең тербелісінің теңдеуі

$$v_{tt} = a^2 v_{xx} + h^2 v \left(a = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \right)$$

түріне келетінін дәлелде. Мұнда $v(x,t)$ функциясы $u(x,t)$ ығысу функциясымен $u = e^{-ht} v(h > 0)$ арақатынасымен байланысты.

5. Контур бойымен қозғалмайтын түрде бекітілген $(0 \le x \le 7, 0 \le y \le 2)$ тікбұрышты мембрананың бастапқы уақыт мезгілінде XOY жазықтығына ауытқуы $xy(7-x)(2-y)$, ал бастапқы жылдамдығы нөлге тең болсын делік. Сонда осы мембрананың еркін тербелісінің заңдылығын тап.
6. Контуры жылжымайтын түрде бекітілген радиусы бірге, ал $a^2 = 36$ тең дөңгелек мембрананың еркін тербелісінің заңдылығын тап. Мұнда бастапқы ауытқуы $u_0 = \frac{1}{8}(1 - r^2)$, ал бастапқы жылдамдығы нөлге тең (есепті шығарарда арнайы функциялар қарастырылатын тарауды пайдалан).

Тербеліс теңдеулері үшін аралас есептерді шығар:

1. $u_{tt} = u_{xx}; u\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=1} = 0, u\big|_{t=0} = x^2 - x, u_t\big|_{t=0} = 0.$

2. $u_{tt} = u_{xx} + 4u + 4\sin^2 x; u_x\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=\pi/2} = 0,$

   $u\big|_{t=0} = 0, u_t\big|_{t=0} = 0.$

3. $u_{tt} = u_{xx} + x - \pi; u_x\big|_{x=0} = 0, u\big|_{x=\pi} = 0, u\big|_{t=0} = \cos\frac{x}{2},$

$u_t\big|_{t=0} = 0.$

4. $u_{tt} = u_{xx} - 3u + 4\sin x \sin 2t; u\big|_{x=0} = 0, u_x\big|_{x=\pi/2} = 0, u\big|_{t=0} = 0,$

$u_t\big|_{t=0} = \sin 3x.$

Әдебиеттер тізімі

1. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977 .
2. Кошляков Н.С., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Уравнения в частных производных. М.: Наука, 1970.
3. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1966 .
4. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука, 1988 .
5. Никифоров А.Ф., Уваров В.Б. Специальные функции математической физики. М.: Наука, 1984.
6. Борисенко А.И., Тарапов И.Е. Векторный анализ и начала тензорного исчисления. М.: Высшая школа, 1966.
7. Тоқыбетов Ж. Ә., Хайруллин Е.М. Математикалық физика теңдеулері. Алматы. 1995.
8. Сахаев Ш. Математикалық физика теңдеулері. Алматы. 2008.
9. Касымов Е.Ә. Математиканың арнайы курстары. Алматы. 2005.

Мазмұны