Министерство образования и науки Республики Казахстан
Карагандинский государственный университет им. Е.А.Букетова

Факультет математики и информационных технологий
Кафедра «Математический анализ и дифференциальные уравнения»

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС

по дисциплине

“ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ”

для специальности 5B060100 – «Математика»

курс: второй
семестр: четвертый

Караганда 2013

Составитель: **Есенбаева Гульсима Ахмадиевна**,
доцент, к.ф.-м.н.

Учебно-методический комплекс предназначен для изучения общих сведений по курсу «Интегральные уравнения». Данная программа охватывает следующие разделы: интегральные уравнения Вольтерра, интегральные уравнения Фредгольма, альтернатива Фредгольма, интегральные уравнения с ядрами специального вида, методы исследования, решения и вычислений. Знания по этой дисциплине могут использоваться при математическом моделировании задач прикладного и физического содержания, при изучении других дисциплин математики и физики, а также быть основой при более глубоком изучении отдельных разделов дисциплины «Интегральные уравнения».

Учебно-методический комплекс по дисциплине «Интегральные уравнения» для специальности 5В060100 «Математика» /Сост. Г.А.Есенбаева - Караганда: Изд-во КарГУ, 2013. – 105 с.

1. Типовая учебная программа дисциплины (приложение 1)

2. Рабочая учебная программа дневного отделения

Срок обучения	Курс	Семестр	Кредиты	Лекции	Семинары	СРСП	СРС	Всего	Форма контроля
4	2	4	2	15	15	30	30	90	Экзамен

№№	Наименование темы	Лекции	Семинарские	СРСП	СРС
1	Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.	2	2	4	4
2	Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.	2	2	4	4
3	Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.	2	2	4	4
4	Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.	2	2	4	4
5	Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального	2	2	4	4

	уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.				
6	Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.	2	2	4	4
7	Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.	3	3	6	6
	Всего (часов)	15	15	30	30

2.1 Рабочая учебная программа заочного обучения

Срок обучения	Курс	Семестр	Кредиты	Лекции	Семинары	СРСП	СРС	Всего	Форма контроля
2	2	3	2	18	12	30	30	90	Экзамен

№№	Наименование темы	Лекции	Семинарские	СРСП	СРС
1	Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.	2	1	3	3
2	Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерирован-	2	1	3	3

	ные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.				
3	Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.	3	2	5	5
4	Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.	3	2	5	5
5	Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.	2	2	4	4
6	Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.	3	2	5	5
7	Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.	3	2	5	5
	Всего (часов)	18	12	30	30

3. Программа обучения по дисциплине (SYLLABUS)

3.1 Данные о преподавателях:

Рамазанов Мурат Ибраевич, профессор, д.ф.-м.н.,

Есенбаева Гульсима Ахмадиевна, доцент, к.ф.-м.н.

Контакты с преподавателями на кафедре «Математический анализ и дифференциальные уравнения» по расписанию.

3.2 Пререквизиты:

Математический анализ, Дифференциальное и интегральное исчисление, Аналитическая геометрия, Высшая алгебра, Дифференциальные уравнения, Теория функций комплексного переменного, Функциональный анализ.

3.3 Постреквизиты:

Методы математической физики, Дифференциальная геометрия, Методы вычислений, Теоретическая механика, Теория упругости, Общий курс физики, Численные методы, Теория устойчивости движения, Математическое моделирование.

3.4 Краткое описание дисциплины

Данный курс предназначен для подготовки студентов факультета математики и информационных технологий специальности «Математика» с целью овладения ими математического аппарата теории интегральных уравнений дальнейшего его применения при анализе и решении задач прикладного и физического содержания.

Курс охватывает следующие разделы: Интегральные уравнения Вольтерра, Интегральные уравнения Фредгольма, Интегральные уравнения с ядрами специального вида, основные методы исследования, решения и вычислений.

Преподавание дисциплины «Интегральные уравнения» ведётся исходя из требуемого уровня базовой подготовки математиков высшей квалификации.

Цели курса

Конечные цели изучения студентами данной дисциплины:

- освоение необходимого математического аппарата исследования интегральных уравнений, помогающего моделировать, анализировать и решать задачи прикладного и физического характера;

- овладение практическими методами решения интегральных уравнений и привитие студентам навыков постановки и решения конкретных задач математики;

- освещение общей связи и мотивов отдельных понятий и утверждений теории интегральных уравнений;

- углубление теоретических знаний о проблемах современной математики, исследуемых средствами интегральных уравнений;

- освоение типовых методов и моделей, содержащих интегральные уравнения и используемых в математике, в физическом анализе и прикладной математике;

- подготовка к изучению других математических методов, других математических дисциплин;

- развитие логического и алгоритмического мышления, навыков самостоятельного продумывания, математической культуры и математической интуиции, необходимых в дальнейшей работе при исследовании и решении задач математики, физики, естествознания и техники.

Задачи курса

Основа изучения дисциплины – реализация требований, устанавливаемых в Государственном обязательном стандарте высшего образования, к подготовке бакалавров математиков.

В ходе реализации требований ставятся следующие задачи:

а) обучение студентов использованию в своей практической деятельности современных математических методов и моделей из изучаемого курса;

б) формирование у студентов прочной системы теоретических знаний, развитие навыков решения задач по данной дисциплине, повышение общего уровня математической культуры;

в) формирование творческого подхода будущих специалистов к моделированию и решению задач математического, прикладного и физического содержания;

г) обучение умению самостоятельной работы с учебной и научной литературой.

В результате изучения дисциплины студенты должны

знать:

*существующие математические понятия, методы и модели, применяемые при анализе интегральных уравнений;

*основные принципы исследования и методы решения интегральных уравнений;

*взаимосвязь, взаимозависимость и взаимовлияние понятий и методов курса не только между собой, но и с другими математическими дисциплинами;

уметь:

*исследовать и решать основные виды задач с интегральными уравнениями;

*решать задачи математического, прикладного и физического характера с использованием математического аппарата изучаемого курса;

*анализировать поведение решений интегральных уравнений, опираясь на результаты, полученные путём исследования и изучения теории устойчивости.

3.5 Результаты обучения

Предметные компетенции:

-освоение необходимого математического аппарата, помогающего моделировать, анализировать и решать прикладные задачи механики;

-овладение методологией построения и применения математических моделей задач механики;

-углубление теоретических знаний современного естествознания;

-освоение методов и моделей, используемых в математической физике и механике.

Надпредметные компетенции:

-использование творческого подхода будущих специалистов для моделирования и решения задач прикладного характера и задач механики;

-умение работать самостоятельно с учебной и научной литературой;

-развитие логического и алгоритмического мышления.

3.6 Политика курса

Студент обязан кратко записывать в тетрадь читаемый курс лекций, выполнять практические и домашние задания, не опаздывать на занятия, не разговаривать во время занятий, не читать газеты и журналы, отключить сотовый телефон, активно участвовать в учебном процессе, вовремя сдавать контрольные работы, коллоквиумы, экзамен.

Посещение должно быть обязательным. Пропуски занятий отрабатываются в полном объеме занятия, отраженном в учебно-методическом комплексе. Пропуски занятий без уважительной причины в объеме, превышающем треть курса, ведет к исключению с курса.

4. График выполнения и сдачи заданий по дисциплине

№	Виды работ	Цель и содержание	Ссылка на список рекомендованной литературы	Продолжительность выполнения	Форма контроля (согласно рейтинг-шкале)	Баллы (согласно рейтинг-шкале)	Форма отчетности	Сроки сдачи
1	Решение задач на семинарском занятии	В соответствии с планами семинарских занятии	Использовать литературу, рекомендуемую для подготовки семинарских занятий	В течение изучения курса в соответветствии с расписанием занятий и учебным планом	Текущий контроль (оцен ка работы в тетрадях, у доски и устные ответы)	50-100 баллов за работу по каждой теме семинарского занятия	Письменная работа и отметка устных ответов на семинарском занятии	На семинарском занятии, в соответствии с расписанием занятий .
2	Устный ответ	В соответствии с планами СРСП (коллоквиум)	Использовать литературу, рекомендуемую	В течение изучения курса в соответветствии с	Рубеж бежный контроль (оцен ка уст-	50-100 баллов за устный ответ	Баллы в журнале преподавателя	На СРСП в ответветствии с расписа-

			для подготовки СРСП	расписанием занятий и учебным планом	ного ответа)		за каждый устный ответ	нием занятий и учебным планом
3	Письменная работа	В соответствии с планами СРСП (контрольная работа, самостоятельная работа)	Использовать литературу, рекомендуемую для подготовки СРСП	В течение изучения курса в соответствии с учебным планом	Рубежбежный контроль (оценка каждой работы)	50-100 баллов за каждую контрольную, самостоятельную работу	Письменные контрольные работы, самостоятельные работы	На СРСП в ответветствии с расписанием занятий и учебным планом

5. Карта учебно-методической обеспеченности дисциплины

№№ п/п	Наименование учебников, пособий, используемых по курсу	Кол-во учебников, пособий в Научной библиотеке КарГУ
	1. Основная литература	
1	Васильева А. Б., Тихонов Н.А. Интегральные уравнения. - М.: Изд-во МГУ, 1989. – 157 с.	11
2	Краснов М. Л. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1975. - 303 с.	9
3	Петровский, И.Г. Лекции по теории интегральных уравнений. - М.: Изд-во МГУ, 1984. – 136 с.	1
4	Антоневич А. Б. Функциональный анализ и интегральные уравнения. - Минск: Университетское, 1984. – 352 с.	1
5	Краснов М. Л. , Киселев А.И., Макаренко Г.И. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1976. - 216 с.	2
6	Абдыманапов С.А., Есенбаева Г.А.. Космакова М.Т. Интегральные уравнения Вольтерра. - Алматы: Рауан, 2001. – 59 с.	5
7	Абдыманапов С.А., Есенбаева Г.А.. Космакова М.Т. Ин-	5

	тегральные уравнения Фредгольма. - Алматы: Рауан, 2001. – 139 с.	
2. Дополнительная литература		
8	Михлин С.Г. Лекции по линейным интегральным уравнениям. - М.: ФМ, 1959.	2
9	Владимиров В. С. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1981. - 512 с.	50
10	Бицадзе, А. В. Уравнения математической физики. - М.: Наука, 1982. – 336 с.	60
11	Абдыманапов С.А. , Есенбаева Г.А.. Космакова М.Т. Интегральные уравнения типа свертки. - Алматы: Рауан, 2001. – 79 с.	5
12	Ефимов А.В. Сборник задач по математике для втузов. - М.: Наука, 1984. - 607 с.	7
2.1 Список периодических изданий		
13	Журнал «Успехи математических наук» - М.: Наука, 1936.	
2.2 Список источников на электронных носителях		
14	Бугров Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного. - Ростов: Феникс, 1997. - 511 с.	
15	Есенбаева Г.А. Курс лекций по дисциплине «Интегральные уравнения» для специальности 5В060100 - «Математика», 2012.	
2.3 Интернет-источники		
16 17	http://ru.wikibooks/org/wiki http://eqworld.ipmnet.ru/ru/library/mathematics/calculus.htm	

6. Лекционный комплекс (тезисы лекций)

Тема лекции № 1. ***Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.***

Определение. *Интегральными уравнениями* принято называть уравнения, в которых неизвестная функция входит под знак интеграла.

Замечание. Это определение не совсем корректно, хотя бы потому, что оно не указывает, какие еще действия, кроме интегрирования, можно производить над неизвестной функцией.

§ 1. Основные классы интегральных уравнений

п.1. Линейные интегральные уравнения

Определение. Интегральное уравнение называется ***линейным***, если в него неизвестная функция входит линейно.

А). Уравнение Фредгольма

Определение. *Линейным интегральным уравнением Фредгольма 2-го рода* называется уравнение вида

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad (1)$$

где $\varphi(x)$ - неизвестная функция, *K(x,t) и f(t)* – известные функции, *x, t* - действительные переменные, изменяющиеся в интервале *(a,b)*, λ - численный множитель.

Определение. Функция *K(x ,t)* называется *ядром интегрального уравнения* (1).

Предполагается, что ядро *K(x,t)* определено в квадрате $\Omega(a \le x \le b, a \le t \le b)$ на плоскости *(x,t)* и непрерывно в Ω, либо его разрывы таковы, что двойной интеграл

$$\iint_a |K(x,t)|^2 dxdt \qquad (2)$$

имеет конечное значение.

Определение. Ядра, удовлетворяющие условию (2), называют *фредгольмовыми ядрами.*

Определение. Если *f(x)*$\neq 0$, то уравнение (1) называется *неоднородным;* если же *f(x)*$\equiv 0$, то уравнение (1) принимает вид

$$\varphi(x) - \lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = 0$$

и называется *однородным.*

Определение. *Уравнение Фредгольма 1-го рода* характеризуется отсутствием члена, содержащего неизвестную функцию вне интеграла. В простейшем случае оно имеет вид

$$\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

где $f(x), K(x,t)$ – функция и ядро, удовлетворяющие сформулированным выше условиям.

Пределы интегрирования a и b в уравнениях (1) и (2) могут быть как конечными, так и бесконечными.

В). Уравнение Вольтерра

Определение. Уравнение

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt, \tag{3}$$

где $f(x), K(x,t)$ – известные функции, λ – числовой параметр, называется *линейным интегральным уравнением Вольтерра 2-го рода*. Функция $K(x,t)$ называется *ядром уравнения Вольтерра.*

Определение. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение (3) принимает вид

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt$$

и называется *однородным уравнением Вольтерра 2-го рода.*

Определение. Уравнение

$$\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x),$$

где $\varphi(x)$ – искомая функция, называют *интегральным уравнением Вольтерра 1-го рода.*

Определение. *Решением* интегрального уравнения называется любая функция $\varphi(x)$, которая, будучи подставлена в это уравнение, обращает его в тождество по $x \in (a,b)$.

Замечание. Уравнение Вольтерра можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, если допустить к рассмотрению ядра с разрывом по диагонали

$$K(t,\tau) = \begin{cases} k(t,\tau), a \le \tau \le t; \\ 0, t \prec \tau \le b; \end{cases}$$

где $k(t,\tau) \in C(q), q = \{(t,\tau); a \le \tau \le t, a \le t \le b\}$. Это простое замечание позволяет переносить результаты, полученные для уравнений Фредгольма, на уравнения Вольтерра, как на частный случай фредгольмовых уравнений. Однако уравнения Вольтерра обладают некоторыми свойствами, характерными именно для них.

п. 2. Нелинейные интегральные уравнения

Нелинейные интегральные уравнения настолько разнообразны, что даже их классификация затруднительна. Укажем некоторые типы таких уравнений, имеющие большое теоретическое и прикладное значение

А). Уравнение Урысона

$$\varphi(x) = \int_a^b K(t,s,\varphi(s))ds$$

Функция $K(t,s,\varphi)$ обычно предполагается непрерывной при $a \le t,s \le b,\ |\varphi| \le M, M > 0$ - достаточно большая постоянная.

В). Важным частным случаем уравнения Урысона является ***уравнение Гаммерштейна***

$$\varphi(x) = \int_a^b K(t,s)F(s,\varphi(s))ds,$$

где $K(t,s)$ - фредгольмово ядро.

С). Уравнение Ляпунова-Лихтенштейна, содержащее существенно нелинейные операторы, например, уравнение вида

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K_1(t,s)\varphi(s)ds + \mu\int_a^b\int_a^b K_2(t,s,z)\varphi(s)\varphi(z)dsdz$$

В уравнение могут также входить аналогичные члены с более высокой нелинейностью.

Д). Нелинейное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \int_a^t F(t,s,\varphi(s))ds\ ,$$

где функция $F(t,s,\varphi)$, например, непрерывна по совокупности аргументов в области $a \le t,s \le b,\ |\varphi| \le M, M > 0$ - достаточно большая постоянная.

§ 2. Метод последовательных приближений

п. 1. Метод последовательных приближений для уравнений Фредгольма

Альтернатива Фредгольма утверждает разрешимость (и притом однозначную) уравнения

$$y(t) = \mu \int_a^b K(t,\tau) y(\tau) d\tau + f(t) \qquad (1)$$

при регулярных значениях μ. Но в ней ничего не говорится о том, когда μ регулярно. Из нижеследующей теоремы следует, что достаточно малые значения μ являются регулярными.

Введем обозначение

$$L = \max_Q |K(t,\tau)|.$$

Напомним, что ядро $K(t,\tau)$ мы считаем непрерывным, $f \in C[a,b]$ и что решение ищется в пространстве $C[a,b]$.

Теорема 1. *Интегральное уравнение (1) имеет и притом единственное решение при* $|\mu| < \dfrac{1}{(b-a)L}$.

Это решение определяется методом последовательных приближений по формулам

$$y_0(t) = f(t), \qquad (2)$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu \int_a^b K(t,\tau) y_{n-1}(\tau) d\tau, \quad n = 1,2,... \qquad (3)$$

п. 2. Метод последовательных приближений для уравнений Вольтерра

Доказанная выше теорема распространяется на случай уравнения Вольтерра второго рода

$$y(t) = \mu \int_a^t k(t,\tau) y(\tau) d\tau + f(t). \qquad (4)$$

Мы уже говорили, что это уравнение можно рассматривать как частный случай уравнения Фредгольма, поэтому для (4) подходит проведенное выше доказательство. Однако можно получить существенное усиление теоремы, если учесть специфику ядра $k(t,\tau)$ уравнения (4). Пусть $L = \max_{q} |k(t,\tau)|$. Отметим новые моменты в доказательстве и получающееся при этом усиление теоремы.

Теорема 2. *Интегральное уравнение Вольтера (4) с непрерывным ядром* $k(t,\tau)$ *имеет непрерывное на отрезке [a,b] решение, и притом единственное, при любом свободном члене* $f(t) \in C[a,b]$ *и любом* μ.

Последовательные приближения определяются, естественно, теми же формулами

$$y_0(t) = f(t),$$

$$y_n(t) = f(t) + \mu \int_a^t k(t,\tau) y(\tau) d\tau, \quad n = 1,2,...$$

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 2. ***Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.***

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s) ds + f(t.) \qquad (1)$$

К уравнению (1) как частному случаю уравнения Фредгольма с «треугольным» ядром приложима вся развитая выше теория. Однако, учитывая специфику ядра, мы получаем для итерированных ядер следующие выражения *(K_1 (t, s) ≡ K(t,s)):*

$$K_n(t,s) = \int_s^t K(t,\tau) K_{n-1}(\tau,s) d\tau$$

Будем предполагать, что ядро *K (t, s)* непрерывно в замкнутом треугольнике Δ, ограниченном прямыми *s = a, s = t, t=b, b > a,* и что $f(t) \in C[a.b]$. Рассмотрим формальный ряд

$$K(t,s) + \lambda K_2(t,s) + \lambda^2 K_3(t,s) + ... + \lambda^{n-1} K_n(t,s) + ... \qquad (2)$$

Пусть $M = \max | K(t, s) |$ в указанном треугольнике Δ.

Тогда будем иметь $| K_n(t,s) | \leq \dfrac{M^n (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}$.

Отсюда видно, что ряд (2) сходится равномерно при любом значении λ и сумма его есть непрерывная функция от t, s.

Обозначим сумму ряда (2) через $R(t, s; \lambda)$:

$$R(t,s;\lambda) = K(t,s) + \lambda K_2(t,s) + \ldots + \lambda^{n-1} K_n(t,s) + \ldots \tag{3}$$

Функция $R(t, s; \lambda)$ есть целая функция от λ. Ее также называют ***разрешающим ядром или резольвентой для ядра K(t,s).***

Как и в случае уравнения Фредгольма, получаем формулу

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^t R(t,s;\lambda) f(s) ds \tag{4}$$

дающую решение уравнения (1) для любой непрерывной функции $f(t)$ и при любом значении параметра λ. Это решение $\varphi(t)$ есть непрерывная функция аргумента t.

Уравнение (1) с непрерывным ядром $K(t, s)$ и правой частью $f(t)$ имеет единственное непрерывное решение $\varphi(t)$.

Замечание 1. Оператор Вольтерра

$$A\varphi(t) = \int_a^t K(t,s)\varphi(s) ds$$

характерен тем, что значение функции $A\varphi(t)$ в любой момент t определяется значениями функции $\varphi(t)$ только при значениях $s \leq t$, т. е. этот оператор учитывает «предысторию» процесса.

Естественно, что и решение (4) уравнения Вольтерра (1) в каждый момент времени t определяется величиной внешнего воздействия $f(t)$ только в предшествующие моменты $s \leq t$.

Замечание 2. Для уравнения Вольтерра 2-го рода характерна возможность продолжения решения.

Мы установили однозначную разрешимость уравнения Вольтерра (1) в предположении, что ядро $K(t,s)$ и свободный член $f(t)$ непрерывны. Эти условия можно значительно ослабить. Именно, будем предполагать, что ядро $K(t,s)$ интегрируется с квадратом по прямоугольнику

$$Q\{a \le t, s \le b\}, \text{ т. е. } \int_a^b \int_a^b |K(t,s)|^2 \, dtds = B^2 < +\infty$$

(такое ядро будем называть L_2 - ядром). Предположим также, что $f(t) \in L_2[a,b]$.

Рассуждениями, аналогичными приведенным выше, получаем следующую теорему.

Теорема. Интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds + f(t), a \le t \le b$$

у которого ядро *K (t, s)* $\in L_2$ *(Q),* а функция $f(t) \in L_2[a,b]$, имеет единственное решение $\varphi(t) \in L_2[a,b]$.

Это решение определяется формулой (4), где резольвента $R(t,s,\lambda)$ есть целая функция параметра λ, и определяется, как сумма ряда, составленного из итерированных ядер

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n K_{n+1}(t,s)$$

Таким образом, интегральное уравнение Вольтерра с ядром $K(t,s) \in L_2(Q)$ однозначно разрешимо при любом свободном члене $f(t) \in L_2[a,b]$ для любых значений параметра λ.

Замечание 3.Соответствующее однородное интегральное уравнение имеет при любом λ только тривиальное решение, так что интегральное уравнение Вольтерра с L_2-ядром не имеет характеристических чисел.

Замечание 4. В вопросах единственности решения интегрального уравнения существенную роль играет класс функций, в котором ищется решение (класс суммируемых функций, квадратично суммируемых, непрерывных и т. д.).

Так, если ядро *K (t, s)* уравнения Вольтерра ограничено, когда *t* меняется в некотором конечном интервале *(a, b):*

$$| K(t,s) | \le M = const \qquad \forall t \in (a,b)$$

и свободный член *f(t)* суммируем в интервале *(a, b),* то уравнение Вольтерра при любом значении к имеет в интервале *(a, b)* единственное суммируемое решение $\varphi(t)$.

Однако если отказаться от требования суммируемости решения, то теорема единственности перестает быть верной в том смысле, что уравнение может иметь, наряду с суммируемым решением, еще и несуммируемые решения.

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 3. *Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.*

1. Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода

$$\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x);\ f(x)=0, \tag{1}$$

где $\varphi(x)$ - искомая функция.

Пусть *K(x,t),* $\dfrac{\partial K(x,t)}{\partial x}$, $f(x)$, $f'(x)$ непрерывны при $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$.

Схема решения

1) Дифференцируем обе части (1) по x, получим

$$K(x,x)\varphi(x) + \int_0^x \frac{\partial K(x,t)}{\partial x}\varphi(t)dt = f'(x) \tag{2}$$

Всякое непрерывное при $0 \le x \le a$ решение $\varphi(x)$ уравнения (1) удовлетворяет и уравнению (2) и наоборот.

2) Пусть $K(x,x) \ne 0$ ни в одной точке $[0,a]$. Деля обе части (2) на $K(x,x)$, получить

$$\varphi(x) = \frac{f'(x)}{K(x,x)} + \int_0^x \frac{K'_x(x,t)}{K(x,x)}\varphi(t)dt \tag{3}$$

(3) - интегральное уравнение Вольтера 2-го рода. Решить его.

3) Если $K(x,x)=0$, то уравнение (2) – уравнение 1-го рода.

Если $K(x,t)$ имеет непрерывную производную $\dfrac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2}$, то (2) дифференцируют еще раз. При этом необходимо, чтобы $f'(0)=0$, $f''(x)$ была непрерывна.

4) Процесс продолжать до тех пор, пока не придем к производной $\dfrac{\partial^{n-1} K(x,t)}{\partial x^{n-1}}$, которая при $x=t$ не обращается тождественно в 0. При этом чтобы уравнение (1) имело решение $\varphi(x)$, непрерывное в $[0,a]$, необходимо, чтобы $f(x)$ имела непрерывные производные до $(n-1)$-го порядка включительно, причем все они должны обращаться в 0 при $x=0$.

Замечание 1. Если $K(x,x)=0$ в некоторой точке $x\in[0,a]$, например, в точке $x=0$, то уравнение (3) приобретает свойство, совершенно отличные от свойств уравнений 2-го рода. Такие уравнения Пикар назвал уравнениями 3-го рода. Здесь возникают трудности, подобные трудностям при обращении в 0 коэффициента при старшей производной в линейном дифференциальном уравнении.

Замечание 2. Уравнение (1) при $K(x,x)\neq 0$ может быть сведено к уравнению 2-го рода с помощью интегрирования по частям. Положив при этом

$$\varPhi(x)=\int_0^x \varphi(t)dt\,,$$

получают

$$\varPhi(x)-\int_0^x \frac{K_t'(x,t)}{K(x,x)}\varPhi(t)dt=\frac{f(x)}{K(x,x)} \qquad (4)$$

2. Интегральные уравнения типа свертки

1). Пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ - две непрерывные функции, определённые при $x\geq 0$. Свёрткой этих двух непрерывных функций называется функция $\varphi_3(x)$, определяемая равенством

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \varphi_1(x-t)\varphi_2(t)dt.$$

Эта функция, определённая при $x \ge 0.$ будет также непрерывной функцией. Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ являются функциями-оригиналами для преобразования Лапласа, то

$$\varphi_3 = \varphi_1 * \varphi_2,$$

изображение свёртки равно произведению изображений свёртываемых функций (*теорема умножения*).

Рассмотрим интегральное уравнение Вольтера 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt, \qquad (5)$$

ядро которого зависит лишь от разности *x-t.* Будем называть уравнение (5) *интегральным уравнением типа свёртки.*

Пусть *f (x)* и *K (x)* – достаточно гладкие функции, растущие при $x \to \infty$ не быстрее показательной функции, так что

$$\left| f(x) \le M_1 e^{S_1 x}, |K(x)| \right| \le M_2 e^{S_2 x}. \qquad (6)$$

Применяя метод последовательных приближений, можно показать, что в этом случае и функция $\varphi(x)$ будет удовлетворять оценке типа (6)

$$|\varphi(x)| \le M_3 e^{S_3 x}.$$

Следовательно, может быть найдено изображение по Лапласу функций *f (x), K (x)* и $\varphi(x)$, оно будет определено в полуплоскости $Re\ p = s > max\ (s_1, s_2, s_3)).$

Пусть $f(x) = F(p), \varphi(x) = \Phi(p), K(x) = \tilde{K}(p).$

Применяя к обеим частям уравнения (5) преобразование Лапласа и используя теорему умножения, найдём

$$\Phi(p) = F(p) + \tilde{K}(p)\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p)=\frac{F(p)}{1-\tilde{K}(p)},(\tilde{K}(p)\neq 1).$$

Оригинал $\varphi(x)$ для $\Phi(p)$ будет решением интегрального уравнения (5).

3. Системы интегральных уравнений типа свертки

Преобразование Лапласа может быть использовано при решении ***систем интегральных уравнений Вольтера вида***

$$\varphi_i(x)=f_i(x)+\sum_{i=1}^{S}\int_0^x K_{ij}(x-t)\varphi_i(t)dt,(i=1,2,...,s), \tag{7}$$

где K_{ij}, $f_i(x)$ - известные непрерывные функции, имеющие изображение по Лапласу.

Применив к обеим частям (7) преобразование Лапласа, получим

$$\Phi_i(p)=F_i(p)+\sum_{i=1}^{S}\tilde{K}_{ij}(p)\Phi_j(p),(i=1,2,...,s).$$

Это система линейных алгебраических уравнений относительно $\Phi_j(p)$. Решая её, найдём $\Phi_j(p)$, оригиналы для которых и будут решением исходной системы интегральных уравнений (7).

4. Решение интегро-дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

Линейным интегро-дифференциальным уравнением называется уравнение вида

$$a_0(x)\varphi^{(n)}(x)+a_1(x)\varphi^{(n-1)}(x)+...+a_n(x)\varphi(x)+ \\ +\sum_{m=0}^{S}\int_0^x K_m(x,t)\varphi^{(m)}(t)dt=f(x). \tag{8}$$

Здесь $a_0(x),...,a_n(x), f(x), K_m(x,t)(m=0,1,...,s)$ - известные функции, $\varphi(x)$ - искомая функция.

При решении интегро-дифференциальных уравнений (8), в отличие от случая интегральных уравнений, для искомой функции $\varphi(x)$ становятся начальные условия вида

$$\varphi(0)=\varphi_0,\varphi'(0)=\varphi_0',...,\varphi^{(n-1)}(0)=\varphi_0^{(n-1)}. \qquad (9)$$

Пусть в (8) коэффициенты $a_k(x)=const(k=0,1,...,n),$ и пусть $K_m(x,t)=K_m(x-t)(m=0,1,...,s),$ т.е. все K_m зависят лишь от разности аргументов *x-t*. Не нарушая общности можно считать $a_0=1$. Тогда уравнение (8) примет вид

$$\begin{aligned}&\varphi^{(n)}(x)+a_1\varphi^{(n-1)}(x)+...+a_n\varphi(x)+\\&+\sum_{m=0}^{S}\int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)dt=f(x),(a_1,...,a_n-const).\end{aligned} \qquad (10)$$

Пусть, далее, функции *f(x)* и $K_m(x)$ являются функциями-оригиналами

$$f(x)=F(p),K_m(x)=\tilde{K}_m(p),(m=0,1,...,s).$$

Тогда и функция $\varphi(x)$ будет иметь изображение по Лапласу

$$\varphi(x)=\Phi(p).$$

Применив к обеим частям (10) преобразование Лапласа. В силу теоремы об изображении производной

$$\varphi^{(k)}(x)=p^k\Phi(p)-p^{k-1}\varphi_0-p^{k-2}\varphi_0-...-\varphi_0^{(k-1)},$$
$$(k=0,1,...,n).$$

По теореме умножения

$$\int_0^x K_m(x-t)\varphi^{(m)}(t)dt=\tilde{K}_m(p)[p^m\Phi(p)-p^{m-1}\varphi_0-$$
$$-...-\varphi_0^{(m-1)}],(m=0,1,...,s).$$

Поэтому уравнение (15) перейдёт в следующее:

$$\Phi(p)[p^n+a_1p^{n-1}+...+a_n+\sum_{m=0}^{S}\tilde{K}(p)p^m]=A(p). \qquad (11)$$

где *A(p)* – некоторая известная функция от *p*.

Из равенства (11) находим $\Phi(p)$- операторное решение задачи (10)-(9). Находя оригинал $\Phi(p)$, получим решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (10), удовлетворяющее начальным условиям (9).

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 4. *Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.*

Полное исследование вопроса о разрешимости вопроса уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \tag{1}$$

с непрерывным рядом $K(t,s)$ и свободным членом $f(t)$ при всевозможных значениях параметра λ было проведено Фредгольмом в 1904 г.

Идея Фредгольма, замечательная по своей простоте и плодотворности, заключалась в следующем. Задача решения интегрального уравнения (1) рассматривалась как аналитический аналог алгебраической проблемы решения системы n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными. Именно, интеграл в уравнении (1) заменяется интегральной суммой, отвечающей разбиению отрезка $[a,b]$ изменения переменной s на n равных частей длины $\delta = \dfrac{b-a}{n}$.

Точное уравнение (1) заменяется приближенным

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} K(t,s_j)\varphi(s_j)\delta + f(t), \tag{2}$$

где в качестве s_j можно взять, например, абсциссы середин интегралов разбиения.

Полагая в формуле (2) $t = s_1, s_2, \ldots, s_n$, получаем линейную алгебраическую систему относительно n неизвестных $\varphi(s_j)$:

$$\varphi(t) = \lambda \sum_{i=1}^{n} K(t,s_j)\varphi(s_j)\delta + f(s_j), (i = 1,2,\ldots,n). \tag{3}$$

Будем считать, что $\varphi(s)$ и $f(s)$ сохраняются в i-м интервале постоянные значения, равные соответственно $\varphi(s_i)$ и $f(s_i)$, а ядро $K(t,s)$ сохраняет в каждом частичном квадрате с индексами i и j постоянное значение, $K(s_i, s_j)$.

Определитель системы (3)

$$D_n(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda K(s_1, s_2)\delta & -\lambda K(s_1, s_2)\delta\ldots & \ldots & -\lambda K(s_1, s_n)\delta \\ -\lambda K(s_2, s_1)\delta & 1-\lambda K(s_2, s_2)\delta\ldots & \ldots & -\lambda K(s_2, s_n)\delta \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ -\lambda K(s_n, s_1)\delta & -\lambda K(s_n, s_2)\delta & \ldots & 1-\lambda K(s_n, s_n)\delta \end{vmatrix}$$

есть многочлен относительно λ .

Если λ отлично от корня многочлена $D_n(\lambda)$, то система (3) имеет естественное решение при любых правых частях, и это решение может быть найдено по известным формулам Крамера. Решая её, мы найдем все $\varphi(s_i)$ и, таким образом, получим приближенное выражение искомой функции $\varphi(t)$ в виде кусочно-постоянной функции $\varphi_n(t)$. Метод замены интегрального уравнения системой линейных алгебраических уравнений до сих пор широко используется в практике инженерных расчетов.

Чем больше n , тем точнее функция $\varphi_n(t)$ аппроксимирует искомую функцию.

В пределе при $n\to\infty$ линейная система (3) переходит в интегральное уравнение (1), а $\varphi_n(t)$ переходит в искомое решение $\varphi(t)$ интегрального уравнения (1).

Ясно, что эти соображения носят наводящий характер и нуждаются в обосновании.

Можно поступить несколько иначе. Решив систему (3) и подставив полученные значения $\varphi(s_j)$ в формулу (2), получим приближенное аналитическое представления решения уравнения (1)

$$\varphi(t) \approx f(t) + \lambda \frac{Q(t, s_1, s_2, \ldots, s_n; \lambda)}{D_n(\lambda)}. \tag{4}$$

Можно показать, что если $K(t,s)$ и $f(t)$ непрерывны, то числитель и знаменатель второго слагаемого в (4) при $\delta = \dfrac{b-a}{n} \to 0$ стремится соответственно к пределам

$$\lambda \int_a^b D(t,s;\lambda) f(s) ds, u D(\lambda),$$

где функции $D(\lambda)$ и $D(t,s;\lambda)$ — некоторые целые функции от λ. Полагая

$$R(t,s;\lambda) = \frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

(резольвента Фредгольма), получим изящную формулу

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s;\lambda) f(s) ds. \tag{5}$$

определяющую решение уравнения (1) для всех значений λ, при которых $D(\lambda) \neq 0$.

Фредгольм построил функции $D(\lambda)$ и $D(t,s;\lambda)$ и виде рядов по степеням λ, полученных чисто формальным предельным переходом:

$$D(t,s;\lambda) = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \frac{\lambda^m}{m!} B_m(t,s), \tag{6}$$

где

$$B_m(t,s) = \int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(t,s) & K(t,\alpha_1) & \ldots & K(t,\alpha_m) \\ K(\alpha_1,s) & K(\alpha_1,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ \ldots. & \ldots. & . & \ldots. \\ K(\alpha_m,s) & K(\alpha_m,\alpha_1) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m$$

$$D\{\lambda\} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} C_m \lambda^m, \tag{7}$$

где

$$C_m=\int_a^b \ldots \int_a^b \begin{vmatrix} K(\alpha_1,\alpha_1) & K(\alpha_1,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_1,\alpha_m) \\ K(\alpha_2,\alpha_1) & K(\alpha_2,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_2,\alpha_m) \\ \ldots. & \ldots. & . & \ldots.. \\ K(\alpha_m,\alpha_1) & K(\alpha_m,\alpha_2) & \ldots & K(\alpha_m,\alpha_m) \end{vmatrix} d\alpha_1 \ldots d\alpha_m$$

причем $C_0=1$, и показал что при $D(\lambda)\neq 0$ формула (5) определяет единственное решение уравнения (1).

Ряд (7) сходится всюду, т. е. $D(\lambda)$ является целой функцией λ. Функцию $D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма.*

Ряд (6) также сходится при всех значениях λ и, следовательно, $D(t,s;\lambda)$ есть целая аналитическая функция от λ. Ее называют *минором определителя Фредгольма.*

Таким образом, *резольвента Фредгольма*

$$R(t,s;\lambda)=\frac{D(t,s;\lambda)}{D(\lambda)}$$

не зависит от $f(t)$ и представляет собой частное двух целых аналитических функций, т. е. является мероморфной функцией от λ.

Определение. Значения λ, для которых существует резольвента уравнения Фредгольма, будем называть *регулярными*, а значения λ, для которых резольвента не существует, - *характеристическими.*

Характеристические числа совпадают с полюсами резольвенты или, что то же, с нулями $D(\lambda)$.

Фундаментальный результат Фредгольма мы можем теперь сформулировать так:

Если значение λ регулярно, то интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds+f(t)$$

с непрерывным ядром $K(t,s)$ и правой частью $f(t)$ имеет единственное непрерывное решение, которое дается формулой

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b R(t,s;\lambda) f(s) ds .$$

Как ***следствие*** получаем: если λ регулярное, то однородное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda\int_a^b K(t,s)\varphi(s) ds$$

имеет только тривиальное решение $\varphi(t) \equiv 0$.

Следовательно, если однородное уравнение имеет нетривиальные решения, то это возможно только тогда, когда значение λ - характеристическое.

Определение. Нетривиальные решения однородного интегрального уравнения называются *собственными или фундаментальными функциями ядра* $K(t,s)$, соответствующими данному характеристическому числу.

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 5. *Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.*

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(t) = \lambda\int_b^a K(t,s)\varphi(s) ds + f(t) \qquad (1)$$

с непрерывным в прямоугольнике $Q\{a \le t, s \le b\}$ ядром $K\{t,s)$ и $f(t) \in C\,[a, b]$. Положим

$$A\varphi = \int_b^a K(t,s)\varphi(s) ds .$$

Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\varphi = \lambda A\varphi + f \text{ или } (\mathrm{I} - \lambda A)\varphi = f \qquad (2)$$

Воспользовавшись теоремой о существовании обратного оператора, получаем, что если $\lambda\|A\| < 1$, то уравнение (1) имеет единственное решение, которое определяется равенством

$$\varphi = (\mathrm{I} - \lambda A)^{-1} f = f + \lambda A f + \lambda^2 A^2 f^2 + \ldots + \lambda^n A^n f^n + \ldots \quad (3)$$

Ряд в правой части равенства (3) называют ***рядом Неймана.***

Изучим подробнее это решение. Пусть

$$M = \max_{a \le t, s \le b} |K(t,s)|$$

Как известно, $\|A\| \le M(b-a)$, так что условие $\lambda\|A\| < 1$ будет заведомо выполнено, если $|\lambda| < 1/M(b-a)$. Будем считать, что λ, удовлетворяет этому условию.

Выясним, что представляют в рассматриваемом случае степени оператора А. Имеем

$$A^2 f = A(Af) = \int_a^b K(t,s)\left\{\int_a^b K(s,\tau) f(\tau) d\tau\right\} ds =$$

$$= \int_a^b \left(\int_a^b K(t,s) K(s,\tau) ds\right) f(\tau) d\tau$$

Положим

$$\int_a^b K(t,s) K(s,\tau) ds = K_2(t,\tau).$$

Функция $K_2(t,s)$ называется *повторным ядром или* ***второй итерацией ядра*** $K(t,s)$ (считаем $K_1(t,s) \equiv K(t,s)$).

Итак,

$$A^2 f = \int_a^b K_2(t,\tau) f(\tau) d\tau.$$

Аналогичным образом получаем

$$A^n f = \int_a^b K_n(t,s) f(s) ds,$$

где $K_n(t,s)$ —***n-я итерация ядра*** $K(t,s)$, определяемая формулой

$$K_n(t,s)=\int_b^a K(t,\tau)K_{n-1}(\tau,s)d\tau$$

Отметим, что все итерированные (повторные) ядра непрерывного ядра *K (t,s)* непрерывны в *Q*.

С помощью итерированных ядер решение (3) интегрального уравнения (1) может быть записано так

$$\varphi(t)= f(t)+$$

$$+\lambda\int_a^b K_1(t,s)f(s)ds+...+\lambda^n\int_a^b K_n(t,s)f(s)ds+... \tag{4}$$

где ряд, стоящий в правой части, при

$$|\lambda|<1/M(b-a)$$

сходится равномерно.

Преобразуем выражение для решения интегрального уравнения. Рассмотрим ряд

$$K_1(t,s)+\lambda K_2(t,s)+...+\lambda^{n-1}K_n(t,s)+...$$

Этот ряд равномерно сходится при $a\le t,s\le b$,если $|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}$.

Обозначим сумму этого ряда *R (t, s; λ)*:

$$R(t,s;\lambda)=K(t,s)+\lambda K_2(t,s)+...+\lambda^{n-1}K_n(t,s)+... \tag{5}$$

Функция *R (r, s; λ)* есть непрерывная функция аргументов *t, s* и аналитическая функция λ при | *λ* | < *1/M (b - a).* Умножая обе части (5) на *f (s)* и интегрируя ряд почленно, затем после сравнения полученного выражения с выражением (4) решение интегрального уравнения (1) можем написать

$$\varphi(t)= f(t)+\lambda\int_a^b R(t,s;\lambda)f(s)ds \tag{6}$$

Функция *R (t, s; λ)* называется ***разрешающим ядром или резольвентой ядра К (t, s).***

Формула (6) верна только для значений параметра λ, достаточно малых по абсолютной величине, так как ряд (5), вообще говоря, не сходится при любых значениях λ (последнее имеет место для уравнений Вольтерра, см. ниже).

Свойства резольвенты R (t, s; λ)

1. Резольвента *R (t, s; λ)* удовлетворяет функциональным уравнениям

$$R(t,s;\lambda) = K(t,s+\lambda\int_a^b K(t,\tau)R(\tau,s;\lambda)d\tau \qquad (7)$$

$$R(t,s;\lambda) = K(t,s)+\lambda\int_a^b K(\tau,s)R(t,\tau;\lambda)d\tau \qquad (8)$$

2. Если рассматривать *R (t, s; μ)* при определенном значении *μ* как ядро уравнения Фредгольма, то соответствующим разрешающим ядром будет *R (t, s; λ+μ).*

3. Нетрудно видеть, что соотношения (7), (8) являются частными случаями общего функционального соотношения

$$R(t,s;\lambda+\mu) = R(t,s;\mu)+\lambda\int_a^b R(t,\tau,\mu)R(\tau,s;\lambda+\mu)d\tau \quad (9)$$

4. Интегро-дифференциальное уравнение, полученное из (9),

$$\frac{\partial R(t,s;\lambda)}{\partial\lambda} = \int_a^b R(t,\tau;\lambda;)R(\tau,s;\lambda)d\tau$$

вместе с условием *R (t, s; 0) = K (t, s)* также определяет резольвенту.

5. Формулы (1) и (6) можно рассматривать как обратные одна относительно другой. Если в соотношении (6) рассматривать функцию *φ (t)* как данную, а *f (t)* — как неизвестную, то формула, дающая решение уравнения (6), совпадаете уравнением (1).

6. Резольвента *R (t, s; λ),* определенная как сумма ряда (5), является аналитической функцией *λ* в круге

$$|\lambda| < 1/M\,(b - a)$$

комплексной плоскости.

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 6. ***Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.***

§ 1. Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Определение. *Ядро* $K(t,s)$ интегрального уравнения называется *вырожденным,* если его можно представить в виде конечной суммы произведений двух функций, из которых одна зависит только от t, а другая только от s:

$$K(t,s)=\sum_{i=1}^{n} a_i(t)b_i(s). \qquad (1)$$

Будем считать, что функции $a_i(t)$, так же как и функции $b_i(s)$, между собой линейно независимы (в противном случае можно было бы уменьшить число слагаемых в сумме (1)).

Предположим, что функции $a_i(t)$ и $b_i(t)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ изменения их аргументов; тогда ядро $K(t,s)$ будет непрерывным в прямоугольнике $Q\{a \le t, s \le b\}$.

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2- го рода с вырожденным ядром $K(t,s)$:

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds+f(t), \qquad (2)$$

где $f(t)$- непрерывная на отрезке $[a,b]$ функция.

Пусть уравнение (2) имеет решение $\varphi=\varphi(t)$. Положим

$$c_i=\int_a^b \varphi(s)b_i(s)ds \qquad (i=1,2,...,n).$$

Тогда из (2) получим

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\sum_{i=1}^{n} c_i a_i(t), \qquad (3)$$

откуда видно, что решение интегрального уравнения (2) сводится к определению постоянных $c_i \, (i=1,2,...,n)$.

Вводя обозначения

$$\int_a^b a_j(t)b_i(t)dt = k_{ij}, \ \int_a^b f(t)b_i(t)dt = f_i \quad (i, j = 1,2,...,n),$$

получим систему линейных алгебраических уравнений, которой должны удовлетворять коэффициенты c_i:

$$c_i - \lambda\sum_{i=1}^{n} k_{ij}c_j = f_i \quad (i = 1,2,...,n) \tag{4}$$

Интегральное уравнение (2) и система линейных алгебраических уравнений (4) эквивалентны в том смысле, что разрешимость системы (4) влечет за собой разрешимость уравнения (2) и наоборот. Определитель системы (4) $D(\lambda)$ равен

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & ... & -\lambda k_{1n} \\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & ... & -\lambda k_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & ... & 1-\lambda k_{nn} \end{vmatrix}.$$

$D(\lambda)$ называют *определителем Фредгольма* для интегрального уравнения (2), а его нули, т. е. корни уравнения $D(\lambda) = 0$, называют *характеристическими числами ядра* $K(t,s)$ или уравнения (2).

Частный случай 1. Если λ не совпадает ни с одним из нулей $D(\lambda)$, т. е. $D(\lambda) \neq 0$, то система линейных уравнений (4) однозначно разрешима при любых правых частях $f_i (i = 1,2,...,n)$.

Значит, если λ не является характеристическим числом, то интегральное уравнение (2) имеет единственное решение $\varphi(t)$, определяемое формулой (3), при любом свободном члене $f(t)$.

Это - ***первая теорема Фредгольма.***

В случае $D(\lambda) \neq 0$ соответствующее однородное интегральное уравнение

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds,$$

отвечающее случаю $f(t)\equiv 0$ на $[a,b]$, имеет только тривиальное решение $\varphi(t)\equiv 0$. Поэтому ***первую теорему Фредгольма*** формулируют так:

Для того чтобы уравнение (2) имело единственное решение при любой функции $f(t)$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующее однородное уравнение имело только тривиальное решение $\varphi(t)\equiv 0$.

Частный случай 2. Пусть теперь λ совпадает с одним из нулей определителя Фредгольма $D(\lambda)$, т. е. является характеристическим числом ядра $K(t,s)$. Тогда определитель системы (4) будет равен нулю. Соответствующая однородная система

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n}k_{ij}c_j=0 \qquad (5)$$

имеет при этом некоторое число $p(1\le p<n)$ линейно независимых нулевых вектор-решений $\{c_1^{(l)},c_2^{(l)},\ldots,c_n^{l}\}$ $(l=1,2,\ldots,p)$.

Функции $\varphi_l(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i^{(l)}a_i(t)$ $(l=1,2,\ldots,p)$ будут нетривиальными решениями соответствующего однородного интегрального уравнения

$$\varphi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n}a_i(t)\int_a^b b_i(s)\varphi(s)ds. \qquad (6)$$

Как и в общем случае уравнения с невырожденным ядром, нетривиальные решения однородного уравнения называются *собственными или фундаментальными функциями этого уравнения (или ядра $K(t,s)$), отвечающими данному характеристическому числу.* Число линейно независимых собственных функций, соответствующее данному характеристическому числу, называется его *рангом* или *кратностью.*

Общим решением однородного уравнения (6), отвечающим данному характеристическому числу, будет функция

$$\varphi(t) = \sum_{l=1}^{p} \alpha_l \varphi_l(t),$$

где α_l - произвольные постоянные.

Введем следующие понятия. Пусть имеем интегральное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t). \qquad (8)$$

Определение. Ядро $K^*(t,s)$, получаемое из ядра $K(t,s)$ заменой t на s и наоборот, называется *сопряженным с ядром* $K(t,s)$: $$K^*(t,s) = K(t,s).$$

Определение. Уравнение

$$\psi(t) = \lambda \int_a^d K^*(t,s)\psi(s)ds + g(t)$$

называется *сопряженным (союзным)* с уравнением (8).

Для интегрального уравнения (2) с вырожденным ядром сопряженное с ним уравнение имеет вид

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b \sum_{i=1}^{n} a_i(s) b_i(t) \psi(s)ds + g(t). \qquad (9)$$

Для него $\psi(t) = g(t) + \lambda \sum_{i=1}^{n} c_i b_i(t)$, где $c_i^* = \int_a^b \psi(s) a_i(s) ds$ $(i = 1,2,...,n)$. Если $g(t) \equiv 0$, т. е. уравнение (9) однородное, то для определения c_i получаем однородную систему

$$c_i^* - \lambda \sum_{j=1}^{n} k_{ji} c_j = 0, \qquad (10)$$

сопряженной с системой (5).

В силу теоремы 1 обе эти системы имеют одинаковое число p линейно независимых вектор-решений.

Если $\left\{c_1^{*(l)},...,c_n^{*(l)}\right\}$ $(l=1,2,..., p)$ суть ненулевые вектор-решения системы (10), то функции

$$\psi_l(t)=\sum_{i=1}^{n} c_i^{*(l)} b_i(t) \quad (l=1,2,..., p)$$

будут собственными функциями однородного уравнения

$$\psi(t)=\lambda\sum_{i=1}^{n} b_i\,(t)\int_a^b a_i(s)\psi(s)ds\,, \tag{11}$$

сопряженного с уравнением (6).

Итак, *если* λ *есть характеристическое число ядра* $K(t,s)$, *то однородное интегральное уравнение (6) и сопряженное с ним уравнение (11) имеют одно и то же конечное число линейно независимых собственных функций.*

Это - ***вторая теорема Фредгольма.***

Частный случай 3. Рассмотрим, наконец, неоднородное уравнение (2) в случае, когда λ - характеристическое число.

Как мы отмечали, его разрешимость эквивалентна разрешимости неоднородной системы (4) линейных алгебраических уравнений

$$c_i-\lambda\sum_{j=1}^{n} k_{ij}c_j = f_i \qquad (i=1,2,...,n). \tag{4}$$

Воспользуемся следующей теоремой.

Теорема 2. Для того чтобы неоднородная система линейных алгебраических уравнений была разрешима, необходимо и достаточно, чтобы вектор свободных членов этой системы был ортогонален ко всем вектор-решениям сопряженной однородной системы.

Согласно этой теореме, неоднородная система (4) будет разрешима тогда и только тогда, когда вектор $\{f_1, f_2,..., f_n\}$ будет ортогонален каждому из векторов $\left\{c^{*(l)}, c_2^{*(l)},..., c_n^{*(l)}\right\}$ $(l=1,2,..., p)$, т. е. когда

$$\sum_{i=1}^{n} f_i c_i^{*(l)}=0 \quad (l=1,2,..., p) \tag{12}$$

Но $f_i = \int_a^b f(t) b_i(t) dt$, и, следовательно, условие (12) можно записать так:

$$\int_a^b f(t) \sum_{i=1}^n c_i^{*(l)} b_i(t) dt = \int_a^b f(t) \psi_l(t) dt = 0 \quad (l = 1,2,\ldots, p)$$

Таким образом, *неоднородное интегральное уравнение (2) с вырожденным ядром при характеристическом значении* λ *будет разрешимо тогда и только тогда, когда свободный член* $f(t)$ *будет ортогонален ко всем решениям сопряженного однородного интегрального уравнения (11).*

Это - ***третья теорема Фредгольма.***

Как следствие из доказанных теорем вытекает следующая важная теорема.

Теорема об альтернативе. *Если однородное интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром имеет только тривиальное решение, то соответствующее неоднородное уравнение всегда имеет одно и только одно решение. Если же однородное уравнение имеет нетривиальное решение, то неоднородное интегральное уравнение в зависимости от свободного члена* $f(t)$ *либо вовсе не имеет решения, либо имеет бесконечное число решений.*

§ 2. Теоремы Фредгольма для общего случая уравнения Фредгольма

Теорема 1. *Если значение λ не является характеристическим, то как данное интегральное уравнение, так и сопряженное с ним однозначно разрешимы при любом свободном члене f(t). Соответствующие однородные уравнения имеют при этом только тривиальные решения.*

Теорема 2. *Если значение λ характеристическое, то однородное интегральное уравнение, так же как и сопряженное с ним однородное уравнение, имеет нетривиальные решения. Число линейно независимых решений однородного интегрального уравнения конечно и равно числу линейно независимых решений однородного сопряженного уравнения.*

Теорема 3. *Для того чтобы неоднородное интегральное уравнение было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы его свободный член f(t) был ортогонален ко всем решениям соответствующего однородного сопряженного уравнения.*

Из теорем Фредгольма вытекает так называемая ***альтернатива Фредгольма:***

Либо неоднородное уравнение разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение имеет нетривиальные решения.

Первый случай альтернативы имеет место при нехарактеристическом значении λ, второй — если λ является характеристическим числом.

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

Тема лекции № 7. *Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.*

§ 1. Интегральные уравнения с симметричным ядром

В пространстве $L_2[a,b]$ рассмотрим интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t) \qquad (1)$$

с симметричным ядром *K (t, s)*. Оператор

$$A\varphi = \int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds + f(t)$$

есть, как мы знаем, вполне непрерывный симметричный оператор в гильбертовом пространстве $L_2[a,b]$.

Для симметричного ядра имеем:

1) ядро *K(t, s)* имеет по крайней мере одно характеристическое число, причем все характеристические числа действительные;

2) собственные функции, отвечающие различным характеристическим числам, ортогональны между собой;

3) каждому характеристическому числу может отвечать лишь конечное число линейно независимых собственных функций.

Применяя *процесс ортогонализации,* линейно независимые собственные функции, отвечающие данному характеристическому числу, можно сделать попарно ортогональными.

Деля обе части уравнения (1) на $\lambda \neq 0$ и обозначая $\frac{1}{\lambda}$ через μ, а $-\frac{1}{\lambda} f(t)$ через $g(t)$, придем к уравнению

$$\int_a^b K(t,s)\varphi(s)ds - \mu\varphi(t) = g(t) \qquad (2)$$

или, в операторной форме,

$$A\varphi - \mu\varphi = g\,, \qquad (3)$$

где A — вполне непрерывный симметричный оператор.

К уравнению (3) мы можем применить все выводы, полученные для вполне непрерывных симметричных операторов.

Именно, спектр оператора A состоит из конечного или счетного множества значений $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots$, и если μ не совпадает ни с одним из них, то уравнение (3) имеет единственное решение $\varphi(t)$ для любой функции $g(t) \in L_2[a, b]$. Это решение дается формулой

$$\varphi(t) = \frac{1}{\mu}\sum_i \frac{\mu_j g_j}{\mu_i - \mu}\varphi_j(t) - \frac{1}{\mu}g(t), \qquad (4)$$

где $\varphi_j(t)$ — нормированные собственные функции ядра $K(t, s)$ и

$$g = \int_a^b g(t)\varphi_j(t)dt.\text{a}$$

При этом однородное уравнение $(g(t) = 0)$ будет иметь лишь тривиальное решение $\varphi(t) = 0$.

Если μ совпадает с собственным значением оператора A кратности p, т. е. $\mu = \mu_m = \mu_{m+1} = \ldots = \mu_{m+p-1}$ и свободный член *g(t)* ортогонален собственным функциям ядра *K (t, s),* отвечающим этому собственному значению:

$$\int_a^b g(t)\varphi_k(t)dt. \qquad (k=m,\ m+1,\ \ldots,\ m+p-1), \qquad (5)$$

то уравнение (3) разрешимо, но неоднозначно. Это полностью согласуется с теоремой Фредгольма, так как в данном случае однородные сопряженные интегральные уравнения совпадают.

Решение $\varphi(t)$ в этом случае дается формулой

$$\begin{aligned}\varphi(t) = \frac{1}{\mu}\sum_i \frac{\mu_i g_i}{\mu_i - \mu}\varphi_i(t) - \frac{1}{\mu}g(t) + \\ + C_m\varphi_m(t) + \ldots + C_{m+p-1}\varphi_{m+p-1}(t),\end{aligned} \qquad (6)$$

где C_m, C_{m+1}, ..., C_{m+p-1} — произвольные постоянные.

Из формулы (4) получаем, что решение уравнения (1) для значений λ, не являющихся характеристическими, имеет вид

$$\varphi(t) = \lambda\sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\varphi_j(t) + f(t)(i = 1,2,\ldots), \qquad (7)$$

$$f(t) = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt.$$

Формула (6) соответственно дает

$$\varphi(t) = \lambda\sum_{i\neq m,m+1,\ldots,m=p-1} \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\varphi_j(t) + f(t) + \sum C_k\varphi_k(t), \qquad (8)$$

где C_k *(k = m, m + 1,... , m + p — 1)* — произвольные постоянные.

Формулы (7) и (8) называют *формулами Шмидта для решения интегрального уравнения с симметричным ядром.*

Если в правых частях формул (7), (8) стоят бесконечные ряды, то они, как можно показать, сходятся в среднем.

Если дополнительно предположить, что ядро *K(t,s)* удовлетворяет условию (А):

$$\int_a^b K^2(t,s)ds \leq A = const \quad \forall t \in [a,b]$$

то ряд (7) будет сходиться абсолютно и равномерно.

Формулу (7) можно переписать в виде

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\int_a^b f(s)\varphi_i(s)\varphi_i(t)ds}{\lambda_i - \lambda}$$

или

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda \int_a^b R(t,s,\lambda) f(s)ds,$$

где

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i - \lambda}$$

является разрешающим ядром.

Разложение

$$R(t,s,\lambda) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_i(t)\varphi_i(s)}{\lambda_i - \lambda}$$

показывает, *что резольвента симметричного* L_2 *- ядра имеет лишь простые полюсы, отвечающие характеристическим числам этого ядра.*

§ 2. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным уравнениям.

В приложениях часто встречаются уравнения вида

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s) p(s)\varphi(s)ds + f(t) \qquad (1)$$

где *K (t, s)* — действительное симметричное ядро и *p(t) >0* на *[a,b]*. Умножая обе части (1) на $\sqrt{p(t)}$ и вводя новую искомую функцию $\psi(t) = \sqrt{p(t)}\varphi(t)$, приходим к интегральному уравнению

$$\psi(t) = \lambda \int_a^b L(t,s)\psi(s)ds + \sqrt{p(t)} f(t) \qquad (2)$$

с симметричным ядром

$$\int_a^b L(t,s) = K(t,s)\sqrt{p(t)p(s)}$$

Пусть λ_k и $\psi_k(t)$ — характеристические числа и собственные функции однородного уравнения, соответствующего уравнению (2). Будем считать функции $\varphi_k(t)$ ортонормированными:

$$\int_a^b \varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

Учитывая соотношение $\psi_k(t) = \sqrt{p(t)}\varphi_k(t)$, получим, что собственные функции однородного уравнения

$$\varphi(t) = \lambda \int_a^b K(t,s)p(s)\varphi(s)ds$$

Ортонормированны с весом *p(t):*

$$\int_a^b p(t)\varphi_i(t)\varphi_j(t)dt = \begin{cases} 1, i = j; \\ 0, i \neq j. \end{cases}$$

§ 3. Классификация симметричных ядер

Пусть *К (t, s)* — симметричное ядро и *p(t)*,*q(t)* — функции из L_2*[a, b1*. Рассмотрим билинейный функционал

$$\int_a^b \int_a^b K(t,s)p(t)q(s)dtds \qquad (1)$$

аналогичный билинейной форме

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}x_i y_k \quad (a_{ik} = a_{ki},\ a_{ik} \text{ - вещественные}).$$

Применяя теорему Гильберта—Шмидта, получим

$$\int_a^b K(t,s)p(t)dt = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k}{\lambda_k}\varphi_k(s),$$

где
$$p_r = \int_a^b p(t)\varphi_k(t)dt,$$

— коэффициенты Фурье функции *p(t)* по ортонормированной системе $\{\varphi_i(t)\}$ собственных функций ядра *K(t,s).* Умножая обе части последнего равенства на *q(s),* интегрируя по *s* и обозначая через q_k коэффициенты Фурье функции *q(s),* получим

$$\int_a^b \int_a^b K(t,s)p(t)q(s)dsdt = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k q_k}{\lambda_k},$$

При $q(t) \equiv p(t)$ получаем аналог квадратичной формы

$$J\{p\}\int_a^b \int_a^b K(t,s)p(t)p(s)dsdt = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k^2}{\lambda_k}. \qquad (2)$$

Эта формула лежит в основе классификации симметричных ядер. В силу (2) необходимым и достаточным условием положительности всех характеристических чисел является неравенство

$$J\{p\} \geq 0 \quad \forall p(t) \in L_2[a,b].$$

Определения. 1. Функционал *J{p}* и ядро *К (t, s),* обладающие свойством

$$J\{p\} \geq 0 \quad \forall p(t) \in L_2[a,b],$$

называются *неотрицательно определенными.*

2. Если это неравенство является строгим для всех $p(t) \neq 0$, функционал *J{p}* и ядро *К (t, s)* называются *положительно определенными.*

Можно показать, что *для положительной определенности ядра K(t, s) необходимо и достаточно, чтобы все λ_k были положительны и система функций $\{\varphi_k(t)\}$ была полной.*

3. Аналогичным образом, функционал *J{p}* и ядро *K(t, s)* называются *неположительными,* если

$$J\{p\} \leq 0 \quad \forall p(t) \in L_2[a,b].$$

Можно показать, что условие $J\{p\} \leq 0$ равносильно тому, что все $\lambda_k < 0$. При этом

$$\frac{1}{\lambda_1} \leq J\{p\} \leq 0$$

где λ_1 — наименьшее по абсолютному значению характеристическое число.

Литература: [1] - [4], [8] - [10], [13] - [17].

7. Планы семинарских и практических занятий

Тема № 1. ***Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.***

Вопросник

1. Каковы основные классы интегральных уравнений? Перечислите некоторые виды нелинейных интегральных уравнений.

2. Какие интегральные уравнения называются уравнениями Вольтерра I рода (II рода)?

3. При каких значениях параметра интегральное уравнение Вольтера II рода с непрерывным ядром и непрерывной правой частью имеет единственное непрерывное решение?

4. Какова связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра?

5. В чем заключается задача о таутохроне? К какому типу интегральных уравнений относится уравнение Абеля?

6. В чем заключается метод последовательных приближений для интегрального уравнения Вольтерра?

Задания

1. Проверить является ли данная функция решением заданного интегрального уравнения: [5] № 2.

2. Привести данную задачу Коши для линейного дифференциального уравнения к интегральному уравнению Вольтерра: [5] № 12.

3. Методом последовательных приближений найти решение интегрального уравнения Вольтерра: [5] № 50.

4. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{t\varphi(t)}{1+t+\varphi(t)}\,dt.$$

5. Методом последовательных приближений найти второе приближение $\varphi_2(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = 1 + \int_0^x [\varphi^2(t) + t\varphi(t) + t^2]dt.$$

6. Методом последовательных приближений найти третье приближение $\varphi_3(x)$ решения интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_0^x [t\varphi^2(t) - 1]dt.$$

Тема № 2. ***Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.***

Вопросник

1. Определите понятие итерированных ядер интегрального уравнения Вольтерра II рода. Как они вычисляются?

2. Дайте определение резольвенты интегрального уравнения Вольтерра. Каковы свойства резольвенты?

3. Как найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра в случае, когда ядро интегрального уравнения - многочлен?

4. Какова схема решения интегрального уравнения Вольтерра II рода с помощью резольвенты?

Задания

1. Вычислить итерированные ядра для заданного интегрального уравнения Вольтерра: [5] № 23.

2. Определить резольвенту интегрального уравнения Вольтерра: [5] № 25.

3. Вычислить резольвенту в случае, когда ядро интегрального уравнения Вольтерра – многочлен: [5] № 27.

4. Найти решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты: [5] № 44.

Тема № 3. ***Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.***

Вопросник

1. Какие интегральные уравнения называются уравнениями Вольтерра I рода?

2. Какова схема решения интегральных уравнений Вольтерра I рода?

3. Почему правая часть $f(x)$ в интегральном уравнении Вольтерра 1 рода не может быть произвольной функцией?

4. Свести уравнение 1 рода к уравнению 2-го рода интегрированием по частям.

5. Какие интегральные уравнения называются уравнениями типа свертки?

6. Всегда ли интегральные уравнения типа свертки допускают применение метода интегральных преобразований Лапласа?

7. Дайте определение функции-оригинала. Сформулируйте теорему о свертке при преобразовании Лапласа.

Задания

1. Решить интегральное уравнение Вольтерра I рода: [5] №92.

2. Самостоятельно решить интегральные уравнения Вольтера 1-го рода

1. $\int_0^x 3^{x-1}\varphi(t)dt = x$. Ответ: $\varphi(x) = 1 - x\ln 3$.

2. $\int_0^x \sin(x-t)\varphi(t)dt = e^{\frac{x^2}{2}} - 1$.

Ответ: $\varphi(x) = e^{\frac{x^2}{2}}((x^2+2)-1)$.

3. Решить следующие системы интегральных уравнений

$$\begin{cases} \varphi_1(x) = \sin x + \int_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \cos x - \int_0^x \varphi_1(t)dt. \end{cases} \qquad \begin{cases} \varphi_1(x) = e^{2x} + \int_0^x \varphi_2(t)dt, \\ \varphi_2(x) = 1 - \int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt. \end{cases}$$

4. Решить следующие интегро-дифференциальные уравнения:

$$\varphi''(x)+\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)dt=e^{2x};\varphi(0)=0,\varphi'(0)=1.$$

$$\varphi'(x)-\varphi(x)+\int_0^x (x-t)\varphi'(t)dt-\int_0^x \varphi(t)dt=x;\varphi(0)=-1.$$

Тема № 4. ***Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.***

Вопросник

1. Какие интегральные уравнения называются уравнениями Фредгольма I рода (II рода)?

2. Какие ядра интегрального уравнения называются фредгольмовыми?

3. Какова основная идея метода определителей Фредгольма?

4. Как вычисляются миноры Фредгольма, определитель Фредгольма? Как определяется резольвента Фредгольма?

5. Каковы реккурентные соотношения для коэффициентов минора и определителя Фредгольма?

Задания

1. Проверить, является ли данная функция решением интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром: [5] № 144.

2.Методом определителей Фредгольма найти резольвенту заданного ядра интегрального уравнения: [5] № 147.

3. Используя реккурентные соотношения для коэффициентов минора и определителя Фредгольма, найти резольвенту ядра интегрального уравнения: [5] № 154.

Тема № 5. ***Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.***

Вопросник

1. Как определяются функции, называемые итерированными ядрами интегрального уравнения Фредгольма? Перечислите свойства итерированных ядер.

2. Какая функция называется разрешающим ядром или резольвентой интегрального уравнения Фредгольма? Как резольвента соотносится с суммой ряда Неймана исходного ядра интегрального уравнения?

3. Определите резольвенту и решение интегрального уравнения Фредгольма в случае ядра, ортогонального самому себе.

4. Перечислите свойства резольвенты интегрального уравнения Фредгольма. Как определяется решение интегрального уравнения Фредгольма через разрешающее ядро?

5. Приведите схему решения интегрального уравнения Фредгольма через резольвенту, построенную с помощью итерированных ядер.

Задания

1. Найти итерированные ядра указанного ниже ядра при заданных a и b.

$$K(x,t) = x - t; \qquad a = -1,\ b = 1$$

2. Построить резольвенту для следующего ядра:

$$K(x,t) = 1 + 3xt; \qquad 0 \le x,t \le t$$

Ответ: $R(x,t;\lambda) = \dfrac{1 + 3xt + (\frac{3}{2}(x+t) - 3xt - 1)\lambda}{1 - 2\lambda + \dfrac{\lambda^2}{4}}$.

3. С помощью резольвенты решить следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 xe^t\varphi(t)dt = e^{-x} \qquad (\lambda \ne 1).$$

Ответ: $\varphi(t) = e^{-x} + \dfrac{\lambda}{\lambda - 1}x.$

4. С помощью резольвенты решить интегральное уравнение: [5] № 158.

5. Пусть $R(x,t;\lambda)$ есть резольвента ядра $K(x,t)$.

Показать, что резольвента уравнения

$$\varphi(x) - \mu\int_a^b R(x,t;\lambda)\varphi(t)dt = f(x).$$

равна $R(x,t;\lambda+\mu)$.

6. Пусть

$$\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt = B^2,$$

$$\int_a^b\int_a^b K_n^{\,2}(x,t)dxdt = B_n^{\,2},$$

где $K_n(x,t)$ - n-е итерированное ядро для ядра $K(x,t)$. Доказать, что если $B_2 = B^2$, то для любого n будет $B_n = B^n$.

Тема № 6. *Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.*

Вопросник

1. Какие уравнения Фредгольма называются уравнениями с вырожденным ядром? Каков алгоритм их решения?

2. Определите интегральные уравнения типа Гаммерштейна.

3. Какие числа называются характеристическими значениями интегрального уравнения?

4. Какие функции называются собственными (фундаментальными) функциями интегрального уравнения, соответствующими данному характеристическому числу? Каковы их свойства? Что называется рангом характеристического числа интегрального уравнения?

5. Какова схема нахождения характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения с вырожденным ядром?

6. Сформулируйте теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром.

7. Определите схему решения однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром.

Задания

1. Решить интегральное уравнение с вырожденным ядром: [5] № 186.

2. Решить интегральное уравнение типа Гаммерштейна: [5] № 194.

3. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром: [5] №202.

4. Решить однородное интегральное уравнение с вырожденным ядром: [5] № 231.

5. Решить следующие однородные интегральные уравнения

№1. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{\pi}(\cos^2 x\cos 2t+\cos^3 t\cos 3x)\varphi(t)dt=0.$

Ответ:

$$\begin{cases} \varphi(x)=C\cos^2 x, & \text{если } \lambda=\dfrac{4}{\pi} \\ \varphi(x)=C\cos 3x, & \text{если } \lambda=-\dfrac{8}{\pi} \\ \varphi(x)\equiv 0, & \text{если } \lambda\neq\dfrac{4}{\pi};\ \lambda\neq\dfrac{8}{\pi} \end{cases}$$

№2. $\varphi(x)-\lambda\int\limits_0^{1}\arccos x\varphi(t)dt=0.$

Ответ:

$$\varphi(x)=C\arccos x,\ \text{если } \lambda=1;$$
$$\varphi(x)\equiv 0,\qquad \text{если } \lambda\neq 1.$$

Тема № 7. ***Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.***

Вопросник

1. Дайте определение симметричного ядра интегрального уравнения.

2. Перечислите свойства характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения с симметричным ядром.

3. В каком случае нахождение характеристических чисел и собственных функций интегрального уравнения с симметричным ядром сводится к решению некоторой однородной задачи Штурма-Лиувилля?

4. Определите решение неоднородного симметричного уравнения Фредгольма, если параметр уравнения не совпадает с характеристическими числами уравнения?

5. При каких значениях числового параметра интегрального уравнения и какой правой части однородное интегральное уравнение имеет бесконечное число решений?

6. Какова схема решения неоднородных интегральных уравнений Фредгольма с симметричным ядром?

Задания

1. Проверить, является ли данная функция решением интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром: [5] № 140, 145.

2. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром: [5] № 212, 214.

3. Решить интегральные уравнения с симметричным ядром: [5] № 242, 243, 244, 245.

8. Методические рекомендации по изучению дисциплины

Прежде чем приступить к выполнению заданий, рекомендуется использовать лекционный материал по одноименной теме и рекомендуемую к лекциям литературу, содержащую теоретический материал.

Изучение теоретического материала необходимо для развития умения самостоятельной работы с учебной и научной литературой, а также для освоения ключевых фундаментальных понятий и методов, необходимых для исследования, анализа и решения задач, представленных в пункте «Задания».

После усвоения и повторения теоретического материала следует приступить к изучению практических положений, представленных в изложенных методах, алгоритмах и типовых примерах. Здесь рекомендуется использовать материал методических рекомендаций к СРСП по одноименной теме и рекомендуемую к ним литературу, содержащую практический материал.

9. Методические рекомендации и указания по типовым расчетам, выполнению расчетно-графических, лабораторных работ, курсовых проектов (работ).

Не предусмотрено.

10.1 Планы занятий в рамках самостоятельной работы студентов под руководством преподавателя

Форма проведения всех СРСП - аудиторная

Решение данных заданий студентами самостоятельно на местах и при необходимости у доски.

Рекомендуемая литература: [5] - [7], [11] - [13], [16], [17].

Тема № 1. ***Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.***

Задания

1. Составить интегральные уравнения, соответствующие следующим дифференциальным уравнениям с заданными начальными условиями: [5] №№ 14, 17.

2. Проверить, что данные функции являются решениями следующих интегральных уравнений Вольтерра: [5] № 2, 7.

3. Методом последовательных приближений решить следующие уравнения Вольтерра: [5] №№ 319, 325, 326.

4. Методом последовательных приближений найти третье приближение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра специального вида: [5] № 330.

5. Методом последовательных приближений решить следующее интегральное уравнение Фредгольма 2 рода: [5] № 32.

6. Методом последовательных приближений решить следующее интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с симметричным ядром: [5] № 335.

Методические рекомендации по выполнению заданий

1. Интегральные уравнения Вольтерра

Пример 1. Показать, что функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

является решением интегрального уравнения Вольтерра

$$\varphi(x) = \frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\varphi(t)dt. \qquad (1)$$

Решение. Подставляя вместо $\varphi(x)$ в правую часть (1) функцию $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$, будем иметь

$$\frac{1}{1+x^2} - \int_0^x \frac{t}{1+x^2}\frac{1}{(1+t^2)^{3/2}}dt = \frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{1+x^2}\left(-\frac{1}{(1+t^2)^{1/2}}\right)\Bigg|_{t=0}^{t=x} =$$

$$= \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} - \frac{1}{1+x^2} = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} = \varphi(x),$$

Таким образом, подстановка $\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$ в обе части уравнения (1) обращает последнее в тождество по x:

$$\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} \equiv \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}.$$

Это означает, согласно определению, что функция

$$\varphi(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

есть решение интегрального уравнения (4).

2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра

Решение линейного дифференциального уравнения

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = F(x)$$

с непрерывными коэффициентами $a_i(x)$ $(i = 1,2,\ldots,n)$ при начальных условиях

$$y(0) = C_0,\ \ y'(0) = C_1,\ \ldots,\ y^{(n-1)}(0) = C_{n-1}$$

может быть сведено к решению некоторого интегрального уравнения Вольтерра 2-го рода.

Покажем это на примере дифференциального уравнения 2-го порядка

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x) \qquad (2)$$

$$y(0) = C_0, \quad y'(0) = C_1. \qquad (3)$$

Полагаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x). \qquad (4)$$

Отсюда, принимая во внимание начальные условия (3), последовательно находим:

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + C_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + C_1 x + C_0. \qquad (5)$$

При этом мы использовали формулу

$$\int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} f(x)dx = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-z)^{n-1} f(z)dz.$$

Учитывая (4) и (5), дифференциальное уравнение (2) запишем так

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t)dt + C_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t)dt +$$
$$+ C_1 x a_2(x) + C_0 a_2(x).$$

или

$$\varphi(x) + \int_0^x \left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right]\varphi(t)dt =$$
$$= F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x). \qquad (6)$$

Полагая

$$K(x,t) = -\left[a_1(x) + a_2(x)(x-t)\right],$$
$$f(x) = F(x) - C_1 a_1(x) - C_1 x a_2(x) - C_0 a_2(x),$$

приведем (6) к виду

$$\varphi(x) = \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + f(x),$$

т. е. придем к интегральному уравнению Вольтерра 2-го рода.

Пример 2. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению $y'' + xy' + y = 0$ и начальным условиям $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$

Решение. Полагаем

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x), \qquad (7)$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t)dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t)dt, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1. \qquad (8)$$

Подставляя (7) и (8) в данное дифференциальное уравнение, найдем

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t)dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt + 1 = 0 \quad \text{или}$$

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x - t)\varphi(t)dt.$$

3. Метод последовательных приближений для интегральных уравнений Вольтерра

Пример 3. Методом последовательных приближений решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi^2(t)}{1+t^2}dt,$$

взяв в качестве нулевого приближения:

$$1).\ \varphi_0(x) = 0; 2)\varphi_0(x) = x.$$

Решение.

1) Пусть $\varphi_0(x)$=0. Тогда

$$\varphi_1(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = arctgx,$$

$$\varphi_2(x) = \int_0^x \frac{1+arctg^2 t}{1+t^2}dt = arctx + \frac{1}{3}arctg^3 x,$$

$$\varphi_3(x) = \int_0^x \frac{1+(arctgt + \frac{1}{3}arctg^3 t)^2}{1+t^2}dt = arctgx + \frac{1}{3}arctg^3 x +$$
$$+ \frac{2}{3*5}arctg^5 x + \frac{1}{7*9}arctg^7 x,$$

$$\varphi_4(x) = \int_0^x \frac{1+\varphi_3^2(t)}{1+t^2}dt = arctgx + \frac{1}{3}arctg^3 x + \frac{2}{3*5}arctg^5 x +$$
$$+ \frac{17}{5*7*9}arctg^7 x + \frac{38}{5*7*9^2}arctg^9 x +$$

$$+\frac{134}{9*11*21*25}arctg^{11}x+\frac{4}{3*5*7*9*13}arctg^{13}x+$$
$$+\frac{1}{7^2*9^2*15}arctg^{15}x,...$$

Обозначая *arctg x=u* и сравнивая выражения для $\varphi_n(x)$ с разложением

$$tgu=\sum_{\nu=1}^{\infty}(-1)^{\nu-1}\frac{2^{2\nu}(2^{2\nu}-1)}{(2\nu)!}B_{2\nu}u^{2\nu-1}, |u|<\frac{\pi}{2},$$

где B_ν – числа Бернулли, замечаем, что

$$\varphi_n(x)\xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{}tg(arctgx)=x.$$

Нетрудно проверить, что функция $\varphi(x)=x,$ есть решение данного интегрального уравнения.

2) Пусть $\varphi_0(x)$ = *x*. Тогда

$$\varphi_0(x)=\int_0^x\frac{1+t^2}{1+t^2}dt=x.$$

Аналогично находим $\varphi_n(x)$ = *x (n=2, 3, ...).*

Таким образом, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ есть стационарная последовательность *{x},* предел которой $\varphi(x)$ = *x*. Решение данного интегрального уравнения получается сразу:

$$\varphi(x)=x.$$

Тема № 2. ***Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.***

Задания

1. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами: [5] № 26, 28,30.

2. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра с ядрами, имеющими вид многочлена: [5] № 32, 34.

3. Найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений Вольтерра: [5] № 36, 38, 40, 42.

Методические рекомендации по выполнению заданий

Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты

Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра 2-го рода

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt\,, \tag{1}$$

где $K(x,t)$ есть непрерывная функция при $0 \le x \le a$, $0 \le t \le x$, а $f(x)$ непрерывна при $0 \le x \le a$.

Определение. Функции $K_n(x,t)$ называются *повторными* или *итерированными ядрами.* Они определяются при помощи рекуррентных формул

$$K_1(x,t) = K(x,t),$$

$$K_{n+1}(x,t) = \int_t^x K(x,z)K_n(z,t)dz \quad (n = 1,2,\ldots). \tag{2}$$

Определение. Функция $R(x,t;\lambda)$, определяемая при помощи ряда

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^{\nu} K_{\nu+1}(x,t), \tag{3}$$

называется *резольвентой* (или *разрешающим ядром*) интегрального уравнения (1).

Ряд (3) в случае непрерывного ядра $K(x,t)$ сходится абсолютно и равномерно. Повторные ядра, а также резольвента не зависят от нижнего предела в интегральном уравнении.

Решение интегрального уравнения (1)* с *помощью резольвенты запишется в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda) f(t)dt \tag{4}$$

Пример 1. Найти резольвенту интегрального уравнения Вольтерра с ядром $K(x,t) \equiv 1$.

Решение. Имеем $K_1(x,t) = K(x,t) = 1$.

Далее, согласно формулам (2)

$$K_2(x,t)=\int_t^x K(x,z)K_1(z,t)dz=\int_t^x dz=x-t,$$

$$K_3(x,t)=\int_t^x 1*(z-t)dz=\frac{(x-t)^2}{2},$$

$$K_4(x,t)=\int_t^x 1*\frac{(z-t)^2}{2}dz=\frac{(x-t)^3}{3!},$$

……………………………………………

$$K_n(x,t)=\int_t^x 1*K_{n-1}(z,t)dz=\int_t^x 1*\frac{(z-t)^{n-2}}{(n-2)!}dz=\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Таким образом, согласно определению резольвента

$$R(x,t;\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n K_{n+1}(x,t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\lambda^n(x-t)^n}{n!}=e^{\lambda(x-t)}.$$

Пример 2. С помощью резольвенты найти решение интегрального уравнения

$$\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x^2-t^2}\varphi(t)dt.$$

Решение. Резольвента ядра $K(x,t)=e^{x^2-t^2}$ при $\lambda=1$ есть $R(x,t;1)=e^{x-t}e^{x^2-t^2}$.

Согласно формуле (4) решение данного интегрального уравнения имеет вид: $\varphi(x)=e^{x^2}+\int_0^x e^{x-t}e^{x^2-t^2}e^{t^2}dt=e^{x+x^2}$.

Частные случаи

1). Предположим, что ядро $K(x,t)$ есть многочлен $(n-1)-$й степени относительно t, так что его можно представить в виде

$$K(x,t)=a_0(x)+a_1(x)(x-t)+\ldots+\frac{a_{n-1}(x)}{(n-1)!}(x-t)^{n-1}, \quad (5)$$

причем коэффициенты $a_k(x)$ непрерывны в $[0,a]$. Если определить функцию $g(x,t;\lambda)$ как решение дифференциального уравнения

$$\frac{d^n g}{dx^n}-\lambda\left[a_0(x)\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}+a_1(x)\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}+\ldots+a_{n-1}(x)g\right]=0, \qquad (6)$$

удовлетворяющее условиям

$$g_{x=t}=\left.\frac{dg}{dx}\right|_{x=t}=\ldots=\left.\frac{d^{n-2}g}{dx^{n-2}}\right|_{x=t}=0; \quad \left.\frac{d^{n-1}g}{dx^{n-1}}\right|_{x=t}=1, \qquad (7)$$

то резольвента $R(x,t;\lambda)$ будет определяться равенством

$$R(x,t;\lambda)=\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(x,t;\lambda)}{dx^n}. \qquad (8)$$

2). Аналогично в случае, когда

$$K(x,t)=b_0(t)+b_1(t)(t-x)+\ldots+\frac{b_{n-1}(t)}{(n-1)!}(t-x)^{n-1},$$

резольвента

$$R(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\lambda}\frac{d^n g(t,x;\lambda)}{dt^n} \quad ,$$

где $g(x,t;\lambda)$ есть решение уравнения

$$\frac{d^n g}{dt^n}+\lambda\left[b_0(t)\frac{d^{n-1}g}{dt^{n-1}+\ldots+b_{n-1}(t)g}=0\right] \quad ,$$

удовлетворяющее условиям (7).

Пример 3. Найти резольвенту интегрального уравнения

$$\varphi(x)=f(x)+\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt.$$

Решение. В данном случае $K(x,t)=x-t;\ \ \lambda=1;$ следовательно, согласно (5) $a_1(x)=1,$ все остальные $a_k(x)=0.$

Уравнение (6) в этом случае имеет вид

$$\frac{d^2 g(x,t;1)}{dx^2}-g(x,t;1)=0,$$

откуда $g(x,t;1)=g(x,t)=C_1(t)e^x+C_2(t)e^{-x}.$

Условия (7) дают

$$\begin{cases} C_1(t)e^{t} + C_2(t)e^{-t} = 0, \\ C_1(t)e^{t} - C_2(t)e^{-t} = 1. \end{cases} \tag{9}$$

Решая систему (9), находим

$$C_1(t) = \frac{1}{2}e^{-t}, \quad C_2(t) = -\frac{1}{2}e^{t},$$

и, следовательно,

$$g(x,t) = \frac{1}{2}(e^{x-t} - e^{-(x-t)}) = sh(x-t).$$

Согласно (8)

$$R(x,t;1) = \left[sh(x-t)\right]''_{x} = sh(x-t).$$

Тема № 3. ***Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.***

Задания.

1. Применяя интегральное преобразование Лапласа решить следующие интегральные уравнения Вольтерра 2 рода типа свёртки: [5] № 235, 237, 239; [13] № 5.12(2).

2. Используя теорему о свертке интегрального преобразования Лапласа решить нелинейное интегральное уравнение Вольтерра специального вида: [5] № 248.

3. Решить следующие интегральные Вольтерра 1 рода типа свертки, предварительно сведя их к интегральным уравнениям 2 рода: [5] № 278, 280, 282.

4. Решить следующие системы интегральных уравнений Вольтерра типа свертки: [5] № 252, 254, 256.

5. Решить следующие интегро-дифференциальные уравнения: [5] № 258, 260, 262.

Методические рекомендации по выполнению заданий

1. Интегральные уравнения Вольтерра I рода

Пример 1. Решить интегральное уравнение Вольтера 1-го рода, предварительно сведя его к интегральному уравнению 2-го рода:

$$\int_0^x (1 - x^2 + t^2)\varphi(t)dt = \frac{x^2}{2}\,. \tag{1}$$

Решение.

1) Здесь $f(x) = \frac{x^2}{2}$; $K(x,t) = 1 - x^2 + t^2$; $f'(x) = x$; $\frac{\partial K(x,t)}{\partial x} = -2x$ - непрерывные функции в $[0,a]$. Заметим, что $f(0) = 0$. Поэтому, дифференцируя уравнение (1) по x, получим:

$$\varphi(x) = 2\int_0^x x\varphi(t)dt + x\,. \tag{2}$$

2) (2) – интегральное уравнение Вольтера 2-го рода, $\lambda = 2$; $\tilde{f}(x) = x$. Ядро $\tilde{K}(x,t) = x$ - многочлен относительно степеней $x - t$: $a_0(x) = x$, $a_1(x) = \ldots = a_n(x) = \ldots = 0$. Тогда введем функцию $g(x,t;2)$ - решение дифференциального уравнения

$$\frac{dg}{dx} - 2a_0(x)g = 0\,, \tag{3}$$

$g(x,t;2)$ удовлетворяет условию

$$g\big|_{x=t} = 1. \tag{4}$$

3) Решив (3), найдем $g = Ce^{x^2}$. Из условия (4) получим

$$g(x,t;2) = g_0 e^{x^2 - t^2}\,,$$

тогда резольвента уравнения (2) имеет вид:

$$R(x,t;2) = \frac{1}{\lambda} g'_x = 2xe^{x^2 - t^2}\,.$$

Известно, что решение $\varphi(x)$ интегрального уравнения (2) можно найти по формуле

$$\varphi(x) = \tilde{f}(x) + \lambda \int_0^x R(x,t;\lambda)\,\tilde{f}(t)dt\ .$$

Тогда

$$\varphi(x) = x + 2\int_0^x x e^{x^2 - t^2}\, t dt = x - x e^{x^2 - t^2}\Big|_{t=0}^{t=x} = x e^{x^2}\ .$$

Таким образом, решение уравнения (1) имеет вид

$$\varphi(x) = x e^{x^2}\ .$$

В этом можно убедиться непосредственной проверкой.

2. Интегральные уравнения типа свертки

Если ядро зависит от разности аргументов, то возможно применение интегрального преобразования Лапласа. Рассмотрим это на примере.

Пример 4. Пусть имеем интегральное уравнение Вольтерра, ядро которого зависит лишь от разности своих аргументов

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x K(x-t)\varphi(t)dt \qquad (\lambda = 1). \qquad (5)$$

Решение. Пусть функции $f(x)$ и $K(x)$ в уравнении (5) есть функции-оригиналы.

Применим к обеим частям уравнения (5) преобразование Лапласа и, используя теорему умножения (преобразование свертки), найдем

$$\Phi(p) = F(p) + K(p)\Phi(p),$$

где $\qquad \varphi(x) \cong \Phi(p), \quad f(x) \cong F(p), \quad K(x) \cong K(p).$

Отсюда

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{1 - K(p)}, \quad K(p) \neq 1. \qquad (6)$$

Используя результаты примера, мы можем написать решение интегрального уравнения (5) в виде

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x R(x-t)\,f(t)dt\,, \qquad (7)$$

где $R(x-t)$ – резольвента интегрального уравнения (5).

Применив к обеим частям уравнения (7) преобразование Лапласа, найдем

$$\Phi(p) = F(p) + R(p)F(p), \quad \text{где} \quad R(x) \cong R(p).$$

Отсюда

$$R(p) = \frac{\Phi(p) - F(p)}{F(p)}. \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражение для $\Phi(p)$ из (6), получим

$$R(p) = \frac{K(p)}{1 - K(p)}.$$

Оригинал для $R(p)$ будет резольвентой интегрального уравнения (5).

Пример 2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x) = \sin x + 2\int_0^x \cos(x-t)\varphi(t)dt.$$

Решение. Известно, что

$$\sin x = \frac{1}{p^2+1}, \cos x = \frac{p}{p^2+1}.$$

Пусть $\varphi(x) = \Phi(p)$. Применяя преобразование Лапласа к обеим частям уравнения и учитывая при этом теорему умножения (изображение свёртки), получим

$$\Phi(p) = \frac{1}{p^2+1} + \frac{2p}{p^2+1}\Phi(p).$$

Отсюда

$$\Phi(p)[1 - \frac{2p}{p^2+1}] = \frac{1}{p^2+1}$$

или

$$\Phi(p) = \frac{1}{(p-1)^2} = xe^x.$$

Следовательно, решение данного интегрального уравнения есть $\varphi(x) = xe^x$.

3. Системы интегральных уравнений типа свертки

Пример 3. Решить систему интегральных уравнений

$$\varphi_1(x) = 1 - 2\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi_1(t)dt + \int_0^x \varphi_2 dt,$$

$$\varphi_2(x) = 4x - \int_0^x \varphi_1(t)dt + 4\int_0^x (x-t)\varphi_2(t)dt.$$

Решение. Переходя к изображениям и используя теорему об изображении свёртки, получим

$$\begin{cases} \Phi_1(p) = \dfrac{1}{p} - \dfrac{2}{p-2}\Phi_1(p) + \dfrac{1}{p}\Phi_2(p), \\ \Phi_2(p) = \dfrac{4}{p^2} - \dfrac{1}{p}\Phi_1(p) + \dfrac{4}{p^2}\Phi_2(p). \end{cases}$$

Решая полученную систему относительно $\Phi_1(p), \Phi_2(p),$ найдём

$$\Phi_1(p) = \frac{p}{(p+1)^2} = \frac{1}{p+1} - \frac{1}{(p+1)^2},$$

$$\Phi_2(p) = \frac{3p+2}{(p-2)(p+1)^2} = \frac{8}{9} * \frac{1}{p-2} + \frac{1}{3} * \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{8}{9} * \frac{1}{p+1}.$$

Оригиналы $\Phi_1(p), \Phi_2(p),$ равны соответственно

$$\varphi_1(x) = e^{-x} - xe^{-x},$$

$$\varphi_2(x) = \frac{8}{9}e^{2x} + \frac{1}{3}xe^{-x} - \frac{8}{9}e^{-x},$$

Функции $\varphi_1(x), \varphi_2(x)$ суть решения исходной системы интегральных уравнений.

4. Решение интегро-дифференциальных уравнений с помощью преобразования Лапласа

Пример 4. Решить интегро-дифференциальное уравнение

$$\varphi''(x)+\varphi(x)+\int_0^x e^{2(x-t)}\varphi'(t)dt-\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt=e^{2x}, \quad (9)$$

$$\varphi(0)=\varphi'(0)=0. \quad (10)$$

Решение. Пусть $\varphi(x)=\Phi(p)$. В силу (10)

$$\varphi'(x)=p\Phi(p),$$

$$\varphi''(x)=p^2\Phi(p).$$

Поэтому после применения преобразования Лапласа уравнение (9) примет вид

$$p^2\Phi(p)+\frac{p}{p-2}\Phi(p)=\frac{1}{p-2}$$

$$\Phi(p)\frac{p(p-1)^2}{p-2}=\frac{1}{p-2} \qquad \text{или}$$

$$\Phi(p)=\frac{1}{p(p-1)^2} * xe^x-e^x+1.$$

Следовательно, решение $\varphi(x)$ интегро-дифференциального уравнения (9), удовлетворяющее начальным условиям (10), определяется равенством: $\varphi(x)=xe^x-e^x+1.$

Тема № 4. *Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.*

Задания.

1.Вычислить для данного интегрального уравнения определитель и минор Фредгольма: [6] № 74.

2. Пользуясь определителями Фредгольма найти резольвенты следующих ядер: [5] № 79, 80.

3. Используя рекуррентные формулы для определителя и минора Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер: [5] № 84, 86.

4. Методом определителей Фредгольма решить следующие интегральные уравнения: [5] № 89, 91.

Методические рекомендации по выполнению заданий

1. Метод определителей Фредгольма

Рассмотрим интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt = f(x), \qquad (1)$$

Схема решения методом определителей Фредгольма

1. Определить *D(x, t; λ)* и *D(λ)* – степенные ряды по *λ*:

$$D(x,t;\lambda)=K(x,t)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n B_n(x,t)\frac{\lambda^n}{n!}, \qquad (2)$$

$$D(\lambda)=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n C_n\frac{\lambda^n}{n!}, \qquad (3)$$

коэффициенты которых вычисляются по формулам

$$B_n(x,t)=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} K(x,t) & K(x,t_1) & \ldots & K(x,t_n)\\ K(t_1,t) & K(t_1,t_1) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n,t) & K(t_n,t_1) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n, \quad (4)$$

где $B_0(x,t)=K(x,t)$.

$$C_n=\int_a^b\ldots\int_a^b\begin{vmatrix} K(t_1,t_1) & K(t_1,t_2) & \ldots & K(t_1,t_n)\\ K(t_2,t_1) & K(t_2,t_2) & \ldots & K(t_2,t_n)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ K(t_n,t_1) & K(t_n,t_2) & \ldots & K(t_n,t_n)\end{vmatrix} dt_1\ldots dt_n, \quad (5)$$

где $C_0=1$.

Функция *D(x, t; λ)* называется *минором Фредгольма,* а *D(λ) – определителем Фредгольма.*

2. Вычислить функцию $R(x,t;\lambda)$, называемую *резольвентой Фредгольма,* по формуле

$$R(x,t;\lambda)=\frac{D(x,t;\lambda)}{D(\lambda)}$$

при условии, что $D(\lambda)\neq 0$.

Резольвента Фредгольма есть аналитическая функция от λ, кроме тех значений λ, которые являются нулями функции $D(\lambda)$. Последние суть полюсы резольвенты $R(x,t;\lambda)$.

3. Решение исходного уравнения вычисляется по формуле:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^b R(x,t;\lambda) f(t)dt .$$

Пример 1. Пользуясь методом определителей Фредгольма, найти резольвенту следующего ядра:

$$K(x,t) = \sin x\cos t\,,\ 0 \le x,t \le 2\pi .$$

Решение:

1) $B_0(x,t) = \sin x\cos t$,

$$B_1(x,t) = \int_0^{2\pi}\begin{vmatrix}\sin x\cos t & \sin x\cos t_1\\ \sin t_1\cos t & \sin t_1\cos t_1\end{vmatrix}dt_1 =$$

$$= \sin x\cos t\int_0^{2\pi}\sin t_1\cos t_1\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}dt_1 = 0,$$

$$B_2(x,t) = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\begin{vmatrix}\sin x\cos t & \sin x\cos t_1 & \sin x\cos t_2\\ \sin t_1\cos t & \sin t_1\cos t_1 & \sin t_1\cos t_2\\ \sin t_2\cos t & \sin t_2\cos t_1 & \sin t_2\cos t_2\end{vmatrix}dt_1dt_2 =$$

$$= \sin x\cos t\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin t_1\sin t_2\cos t_1\cos t_2\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{vmatrix}dt_1dt_2 = 0 .$$

Аналогично все последующие коэффициенты равны нулю:

$$B_3(x,t) = \ldots = B_n(x,t) = \ldots = 0 .$$

$$\Rightarrow D(x,t;\lambda) = \sin x\cos t .$$

2) $C_0 = 1,\ C_1 = \int_0^{2\pi}\sin t_1\cos t_1 dt_1 = \left.\frac{\sin^2 t_1}{2}\right|_0^{2\pi}$,

$$C_2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \begin{vmatrix} \sin t_1 \cos t_1 & \sin t_1 \cos t_2 \\ \sin t_2 \cos t_1 & \sin t_2 \cos t_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 =$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} \sin t_1 \sin t_2 \cos t_1 \cos t_2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 = 0,$$

Очевидно, что и все последующие коэффициенты равны нулю:

$$C_2 = ... = C_n = ... = 0. \quad \Rightarrow D(\lambda) = 1.$$

3) $R(x,t;\lambda) = \sin x \cos t$.

Пример 2. С помощью резольвенты решить следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = \cos 2x .$$

Решение: $R(x,t;\lambda) = \sin x \cos t$ (резольвента вычислена в примере 2.)

$$\Rightarrow \varphi(x) = \cos 2x + \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \cos 2t dt =$$

$$= \cos 2x + \frac{\sin x}{2} \int_0^{2\pi} (\cos 3t + \cos t) dt =$$

$$= \cos 2x + \frac{\sin x}{2} \cdot 0 = \cos 2x, \; \varphi(x) = \cos 2x .$$

2. Рекуррентные соотношения для вычисления коэффициентов $B_n(x,t)$ и C_n

Вычисление по формулам (5) и (6) коэффициентов $B_n(x, t)$ и C_n рядов (3) и (4) практически возможно лишь в очень редких случаях, но из этих формул получаются следующие рекуррентные соотношения:

$$B_n(x,t) = C_n K(x,t) - n\int_a^b K(x,s) B_{n-1}(s,t) ds \qquad (6)$$

$$C_n = \int_a^b B_{n-1}(s,s)ds \qquad (7)$$

Зная, что коэффициент $C_0 = 1$ и $B_0(x,t) = K(x,t)$, по формулам (7) и (6) найдем последовательно C_1, $B_1(x,t)$, C_2, $B_2(x,t)$, C_3 и т. д.

Пример 3. Пользуясь формулами (7) и (8), найти резольвенту ядра

$$K(x,t) = x - 2t,$$

где $0 < x < t, \quad 0 < t < 1$.

Решение. Имеем $C_0 = 1$ и $B_0(x,t) = K(x,t) = x - 2t$.

Пользуясь формулой (7), найдем

$$C_1 = \int_0^1 (s - 2s)ds = -\frac{1}{2}$$

По формуле (6) получим

$$B_1(x,t) = -\frac{x-2t}{2} - \int_0^1 (x-2s)(s-2t)ds = -x - t + 2xt + \frac{2}{3}$$

$$C_2 = \int_0^1 \left(-s - s + 2s^2 + \frac{2}{3} \right) ds = \frac{1}{3}$$

$$B_2(x,t) = \frac{x-2t}{3} - 2\int_0^1 (x-2s)\left(-s - t + 2st + \frac{2}{3} \right) ds = 0$$

$$\Rightarrow C_3 = C_4 = ... = 0; \quad B_3(x,t) = B_4(x,t) = ... = 0.$$

Следовательно,

$$D(\lambda) = 1 + \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda^2}{6};$$

$$D(x,t;\lambda) = x - 2t + \left(x + t - 2xt - \frac{2}{3} \right)\lambda.$$

Резольвента данного ядра будет

$$R(x,t;\lambda)=\frac{x-2t+\left(x+t-2xt-\frac{2}{3}\right)\lambda}{1+\frac{\lambda}{2}+\frac{\lambda^2}{6}}.$$

Тема № 5. *Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.*

Задания.

1. Определите ряд Неймана для интегрального уравнения Фредгольма 2 рода.
2. Запишите решение интегрального уравнения Фредгольма 2 рода через итерированные ядра.
3. Вычислите резольвенту в случае ядра, ортогонального самому себе.
4. Сформулируйте и докажите теорему о существовании решения интегрального уравнения Вольтерра 2 рода в случае суммируемого ядра и суммируемой правой части уравнения.
5. Найти итерированные ядра интегрального уравнения Фредгольма для указанных ядер: [5] № 93, 95, 97.
6. Построить резольвенты интегральных уравнений Фредгольма для следующих ядер: [5] № 101, 103, 105.
7. Найти резольвенту для интегрального уравнения Фредгольма с ядром специального вида: [5] № 107.

Методические рекомендации по выполнению заданий

Схема решения интегральных уравнений с помощью резольвенты

Имеем

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\varphi(t)dt=f(x).$$

1. Вычислить итерированные ядра исходного ядра $K(x,t)$:

$$K_1(x,t)=K(x,t);\ K_n(x,t)=\int_a^b K(x,z)K_{n-1}(z,t)dz\ ,\ n=2,3...$$

2. Определить резольвенту ядра $K(x,t)$:

$$R_K(x,t;\lambda)=\sum_{n-1}^{\infty} K_n(x,t)\lambda^{n-1}\ ,|\lambda|<\frac{1}{B}\ ,$$

$$B^2=\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt\ .$$

3. Найти решение данного уравнения:

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b R(x,t;\lambda)f(t)dt\ .$$

Пример 1. Найти резольвенту ядра

$$K(x,t)=\sin x\cos t,\ \ 0\le x,t\le\pi.$$

Решение. $K_2(x,t)=\int_0^{\pi}\sin x\cos z\cos tdt=0,\Rightarrow$ Исходное ядро ортогонально самому себе. $\Rightarrow$ $R(x,t;\lambda)=\sin x\cos t.$

Замечание. Если ядра $M^{(1)}(x,t),M^{(2)}(x,t),...,M^{(n)}(x,t)$ $(n<\infty)$ попарно ортогональны, то резольвента, соответствующая их сумме $K(x,t)=\sum_{m-1}^{n} M^{(m)}(x,t)$, равна сумма резольвент, соответствующих каждому из слагаемых.

Пример 2. Найти резольвенту ядра

$$K(x,t)=x,t+x^2t^2\ ,\ \ a=-1,\ b=1\ .$$

Решение. Обозначим $M(x,t)=xt$; $N(x,t)=x^2t^2$. Ядра $M(x,t)$ и $N(x,t)$ ортогональны на $[-1;1]$, так как

$$\int_{-1}^{1} xz^3tdz=0\ \text{ и }\int_{-1}^{1} x^2z^3tdz=0\ .$$

Поэтому $R_K(x,t;\lambda)=R_M(x,t;\lambda)+R_N(x,t;\lambda)$.

В результате получим

$$R_K(x,t;\lambda)=\frac{3xt}{3-2\lambda}+\frac{5x^2t^2}{5-2\lambda},\text{ где } |\lambda|<3.$$

Пример 3. Найти итерированные ядра для ядра

$$K(x,t)=x-t,\text{ если } a=0,\ b=1.$$

Решение. Пользуясь формулами (3.3), найдём последовательно

$$K_1(x,t)=x-t$$

$$K_2(x,t)=\int_0^1 (x-z)(z-t)dz=\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3};$$

$$K_3(x,t)=\int_0^1 (x-z)\left(\frac{z+t}{2}-zt-\frac{1}{3}\right)dz=-\frac{x-t}{12};$$

$$K_4(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-z)(z-t)dz=$$

$$=-\frac{1}{12}K_2(x,t)=-\frac{1}{12}\left(\frac{x+t}{2}\right)-xt-\frac{1}{3}$$

$$K_5(x,t)=-\frac{1}{12}\int_0^1 (x-z)\left(\frac{z+t}{2}-zt-\frac{1}{3}\right)dz=$$

$$=-\frac{1}{12}K_3(x,t)=\frac{x-t}{12^2}$$

$$K_6(x,t)\frac{1}{12^2}\int_0^1 (x-z)(z-t)dz=\frac{1}{12^2}K_2(x,t)=$$

$$=\frac{1}{12^2}\left(\frac{x+t}{2}-xt-\frac{1}{3}\right)$$

$\Rightarrow$ Итерированные ядра имеют вид

$$\begin{cases} K_{2k-1}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}(x-t) \\ K_{2k}=\dfrac{(-1)^{k-1}}{12^{k-1}}\left(\dfrac{x+t}{2}-xt-\dfrac{1}{3}\right), k=1,2,3,... \end{cases}$$

Пример 4. Решить интегральное уравнение с помощью резольвенты, построенной через итерированные ядра:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 xt\varphi(t)dt = x.$$

Решение. 1. Следуя схеме решения, представленной выше, вычислим итерированные ядра для исходного ядра

$$K(x.t) = xt; \qquad a = 0, \quad b = 1.$$

Последовательно находим:

$$K_1(x.t) = xt;$$

$$K_2(x.t) = \int_0^1 xz * ztdz = \frac{xt}{3};$$

$$K_3(x.t) = \frac{1}{3}\int_0^1 xz * ztdz = \frac{xt}{3^2};....; K_n(x,t) = \frac{xt}{3^{n-1}}.$$

2. Вычислим резольвенту ядра $K(x,t) = xt$.

$$R(x,t;\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} K_n(x.t)\lambda^{n-1} = xt\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\lambda}{3})^{n-1} = \frac{xt}{1-\frac{\lambda}{3}} = \frac{3xt}{3-\lambda},$$

если $|\lambda| < 3$.

3. Найдем решение интегрального уравнения:

$$\varphi(x) = x + \lambda\int_0^1 \frac{3xt}{x-\lambda} * tdt = x + \frac{3xt}{x-\lambda} * \frac{1}{3} = \frac{3x}{3-\lambda}, \quad \lambda \neq 3. \Rightarrow$$

Решение исходного уравнения имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{3x}{x-\lambda}, \qquad \lambda \neq 3.$$

Тема № 6. *Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.*

Задания

1. Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами: [5] № 113, 115.

2. Используя теоремы Фредгольма и альтернативу Фредгольма, исследовать на разрешимость при различных значениях параметра следующие интегральные уравнения: [5] № 177, 179, 181.

3. При каких значениях параметра разрешимы следующие интегральные уравнения: [5] № 183, 184.

4. Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром: [5] № 127, 129.

5. Решить следующие однородные интегральные уравнения с вырожденным ядром: [5] № 160, 162, 164.

6.Вывести теоремы Фредгольма для интегрального уравнения Фредгольма 2 рода с непрерывным ядром.

Методические рекомендации по выполнению заданий

1. Интегральные уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

Пример 1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\left(x\cos t+t^2\sin x+\cos x\sin t\right)\varphi(t)dt=x. \quad (1)$$

Решение.

1). Запишем уравнение в следующем виде:

$$\varphi(x)=\lambda x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos tdt+\lambda\sin x\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt+\lambda\cos x\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin tdt+x.$$

Введём обозначения

$$C_1\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\cos tdt;\quad C_2=\int_{-\pi}^{\pi}t^2\varphi(t)dt;\quad C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(t)\sin dt, \quad (2)$$

где C_1, C_2, C_3 - неизвестные постоянные. Тогда уравнение (1) примет вид

$$\varphi(x)=C_1\lambda x+C_2\lambda\sin x+C_3\lambda\cos x+x. \quad (3)$$

2). Подставляя выражение (3) в равенства (2) , получим

$$C_1=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)\cos t dt,$$

$$C_2=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)t^2 dt,$$

$$C_3=\int_{-\pi}^{\pi}\left(C_1\lambda t+C_2\lambda\sin t+C_3\lambda\cos t+t\right)\sin t dt,$$

или

$$C_1\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt\right)-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin t\cos t dt-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos^2 t dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}t\cos t dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt+C_2\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\sin t dt\right)-C_3\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t^2\cos t dt=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}t^3 dt,$$

$$-C_1\lambda\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt-C_2\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\sin^2 t dt+C_3\left(1-\lambda\int_{-\pi}^{\pi}\cos t\sin t dt\right)=$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}t\sin t dt.$$

Вычисляя входящие в эти уравнения интегралы, мы получим систему алгебраических уравнений для нахождения неизвестных C_1, C_2, C_3:

$$\left.\begin{aligned}&C_1-\lambda\pi C_3=0,\\&C_2+4\lambda\pi C_3=0,\\&-2\lambda\pi C_1-\lambda\pi C_2+C_3=2\pi\end{aligned}\right\}. \qquad (4)$$

Определитель этой системы

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -\lambda\pi \\ 0 & 1 & 4\lambda\pi \\ -2\lambda\pi & -\lambda\pi & 1 \end{vmatrix}=1+2\lambda^2\pi^2\neq 0.$$

Система (4) имеет единственное решение

$$C_1=\frac{2\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2}; \quad C_2=-\frac{8\lambda\pi^2}{1+2\lambda^2\pi^2};$$

$$C_3=\frac{2\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}.$$

3). Подставляя найденные значения C_1, C_2, C_3 в (3) , получим решение данного интегрального уравнения

$$\varphi(x)=\frac{2\lambda\pi}{1+2\lambda^2\pi^2}\left(\lambda\pi x-4\lambda\pi\sin x+\cos x\right)+x.$$

2. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения Фредгольма

Пример 2. Найти характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения:

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^1(2xt-4x^2)\varphi(t)dt=0.$$

Решение:

1) Имеем:

$$\varphi(x)=2\lambda x\int_0^1 t\varphi(t)dt-4\lambda x^2\int_0^1\varphi(t)dt. \qquad (5)$$

2). Введем обозначения

$$c_1=\int_0^1 t\varphi(t)dt; \quad c_2=\int_0^1\varphi(t)dt; \qquad (6)$$

Тогда (5) примет вид:

$$\varphi(x)=2c_1\lambda x-4c_2\lambda x^2 \qquad (7)$$

3). Функцию (7) подставим в равенство(6)

$$\begin{cases} c_1 = 2c_1\lambda\int\limits_0^1 t^2dt - 4c_2\lambda\int\limits_0^1 t^3dt \\ c_2 = 2c_1\lambda\int\limits_0^1 tdt - 4c_2\lambda\int\limits_0^1 tdt \end{cases} \tag{8}$$

Тогда, вычислив интегралы в правых частях системы (8), будем меть систему для нахождения постоянных, c_1 и c_2:

$$\begin{cases} c_1 = \dfrac{2c_1\lambda}{3} - c_2\lambda \\ c_2 = c_1\lambda - \dfrac{4c_2\lambda}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1\left(1 - \dfrac{2\lambda}{3}\right) + c_2\lambda = 0 \\ -c_1\lambda + c_2\left(1 + \dfrac{4\lambda}{3}\right) = 0 \end{cases} \tag{9}$$

4) Определитель этой системы является уравнением для нахождения характеристических чисел:

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \dfrac{2\lambda}{3} & \lambda \\ -\lambda & 1 + \dfrac{4\lambda}{3} \end{vmatrix} = \frac{\lambda^2}{9} + \frac{2\lambda}{3} + 1$$

$\Delta(\lambda)=0$, если $\lambda_1=\lambda_2=-3$-характеристическое число.

5) Из системы (9) при $\lambda=-3$ имеем $c_1=c_2=c$ тогда функция (7) примет вид:

$$\varphi(x) = -6cx + 12cx^2 = -6c\left(x - 2x^2\right)$$

В силу замечания имеем: $\varphi(x) = x - 2x^2$ - собственная функция соответствующая характеристическому числу $\lambda_1=\lambda_2=-3$.

3. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром

Пример 3: Решить уравнение

$$\varphi(x)-\lambda\int_0^{\pi}\cos(x+t)\varphi(t)dt=0. \qquad (10)$$

Решение:

1) Определим характеристические числа данного уравнения

$$\varphi(x)=\lambda C_1\cos x-\lambda C_2\sin x, \qquad (11)$$

$$\begin{cases} C_1\int_0^{\pi}\cos t\varphi(t)dt=\lambda\int_0^{\pi}\cos t(C_1\cos t-C_2\sin t)dt, \\ C_2\int_0^{\pi}\sin t\varphi(t)dt=\lambda\int_0^{\pi}\sin t(C_1\cos t-C_2\sin t)dt, \end{cases}$$

$$\int_0^{\pi}\cos^2 tdt=\frac{\pi}{2}; \quad \int_0^{\pi}\cos t\,\sin tdt=0; \quad \int_0^{\pi}\sin^2 tdt=\frac{\pi}{2};$$

$$\begin{cases} C_1=\frac{\lambda\pi}{2}C_1, \\ C_2=-\frac{\lambda\pi}{2}C_2, \end{cases} \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1(1-\frac{\lambda\pi}{2})=0, \\ C_2(1+\frac{\lambda\pi}{2})=0, \end{cases} \qquad (12)$$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} 1-\frac{\lambda\pi}{2} & 0 \\ 0 & 1+\frac{\lambda\pi}{2} \end{vmatrix}=0$$

$$=> \quad \lambda_1=\frac{2}{\pi}, \quad \lambda_2=-\frac{2}{\pi}$$

- характеристические числа искомого уравнения.

2) Найдем собственные функции интегрального уравнения.

а) $\lambda_1=\frac{2}{\pi}$.

Подставив $\lambda_1=\frac{2}{\pi}$ в (11), получим

$$\begin{cases} C_1 = C \\ C_2 = 0 \cdot \end{cases}$$

.

Тогда по (11) определим собственную функцию, соответствующую $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}$, учитывая, что собственные функции определяются с точностью до константы

$$\varphi_1(x) = \cos x.$$

3) $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi.}$

Тогда из системы (12)

$$\begin{cases} C_1 = 0, \\ C_2 = C. \end{cases}$$

Из (11) найдем соответствующую функцию для $\lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi.}$

$$\varphi_2(x) = \sin x.$$

3) Общим решением уравнения (10) будет

$$\begin{cases} \varphi(x) = C\cos x, \quad \text{если } \lambda = \dfrac{2}{\pi}; \\ \varphi(x) = C\sin x, \quad \text{если } \lambda = -\dfrac{2}{\pi}; \\ \varphi(x) \equiv 0, \quad \text{если } \lambda \neq \pm\dfrac{2}{\pi}. \end{cases}$$

Тема № 7. *Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.*

Задания.

1. Найти характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений с симметричными ядрами: [9] № 135, 137, 139, 141, 143.

2. Показать, что если ядро интегрального уравнения симметричное, то второе итерированное ядро имеет только положительные характеристические числа.

3. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения: [5] № 166, 168, 170, 172, 174.

4. Выпишите формулу, определяющую единственное непрерывное решение неоднородного симметричного уравнения с непрерывной правой частью в случае, если параметр интегрального уравнения не совпадает с характеристическими числами этого уравнения.

Методические рекомендации по выполнению заданий

1. Нахождение характеристических чисел и собственных функций однородного интегрального уравнения Фредгольма 2 рода с симметричным ядром

Пример 1. Найти характеристические числа и собственные функции однородного уравнения:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = 0,$$

где

$$K(x,t) = \begin{cases} t(x+1); & 0 \le x \le t \\ x(t+1); & t \le x \le l \end{cases}$$

Решение.

1) Уравнение представим в виде:

$$\varphi(x) = \lambda\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt + \lambda\int_x^1 K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (1)$$

или

$$\varphi(x) = \lambda x\int_0^x (t+1)\varphi(t)dt + \lambda(x+1)\int_x^1 t\varphi(t)dt \qquad (2)$$

2). Дифференцируя обе части (2), находим:

$$\varphi'(x)=$$
$$=\lambda\int_0^x(t+1)\varphi(t)dt+\lambda(x+1)\varphi(x)+\lambda\int_x^1 t\varphi(t)dt-\lambda(x+1)\,x\varphi(x)$$

или

$$\varphi'(x)=\lambda\int_0^x(t+1)\varphi(t)dt+\lambda\int_x^1 t\varphi(t)dt. \qquad (3)$$

3) Повторное дифференцирование дает:

$$\varphi''(x)=\lambda(x+1)\varphi(x)-\lambda x\varphi(x)=\lambda\varphi(x).$$

4) Из равенства (2) и (3):

$$\varphi(0)-\varphi'(0)=\lambda\int_0^1 t\varphi(t)dt-\lambda\int_0^1 t\varphi(t)dt=0,$$

$$\varphi(1)-\varphi'(1)=\lambda\int_0^1(t+1)\varphi(t)dt-\lambda\int_0^1(t+1)\varphi(t)dt=0,$$

$$\varphi(0)-\varphi'(0)=0;\varphi(1)-\varphi'(1)=0.$$

5) Итак, данное интегральное уравнение сводится к следующей краевой задаче:

$$\begin{cases}\varphi''(x)-\lambda\varphi'(x)=0 \underline{\qquad\qquad\qquad} (4)\\ \varphi(0)-\varphi'(0)=0;\varphi(1)-\varphi'(1)=0 \underline{\quad\;} (5)\end{cases}$$

6). (4) – линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами. Здесь возможны три случая:

А). $\lambda=0$. Уравнение (4) примет вид: $\varphi''(x)=0$.

Его общее решение будет:

$$\varphi(x)=c_1x+c_2.$$

Используя краевые условия (5), получим для нахождения неизвестных c_1 и c_2 систему:

$$\begin{cases}c_2-c_1=0\\ c_2=0\end{cases},$$

которая имеет единственное решение: $c_1=c_2=0$. Тогда интегральное уравнение имеет только тривиальное решение

$$\varphi(x)=0.$$

Б). $\lambda > 0$. Характеристическое уравнение для (4): $p^2 - \lambda = 0$. Его корни: $p_{1,2} = \pm\sqrt{\lambda}$. Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид:

$$\varphi(x) = c_1 ch(\sqrt{\lambda}x) + c_2 sh(\sqrt{\lambda}x).$$

Откуда

$$\varphi'(x) = c_1\sqrt{\lambda} sh(\sqrt{\lambda}x) + c_2\sqrt{\lambda} ch(\sqrt{\lambda}x).$$

Для нахождения постоянных c_1 и c_2 краевые условия дают систему

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\lambda}c_2 = 0, \\ c_1 ch\sqrt{\lambda} + c_2 sh\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda}c_1 sh\sqrt{\lambda} - c_2\sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Отсюда:

$$\begin{cases} c_1 - \sqrt{\lambda}c_2 = 0, \\ c_2(\sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} + sh\sqrt{\lambda} - \lambda sh\sqrt{\lambda} - \sqrt{\lambda} ch\sqrt{\lambda} = 0 \end{cases}$$

Если $\lambda = 0$, то c_2 - любое; $c_1 = c_2 = c$. Тогда $\varphi(x) = c(chx + shx) = ce^x$. Пусть $c = 1$, тогда $\varphi_1(x) = e^x$. Если $\lambda \neq 1$, то $c_2 = 0$. Поэтому $c_1 = 0$. Тогда интегральное уравнение имеет тривиальное решение: $\varphi(x) = 0$. Итак, при $\lambda \geq 1; \lambda \neq 1$ интегральное уравнение не имеет характеристических чисел, а значит, и собственных функций. Характеристическому числу $\lambda = 1$ соответствует собственная функция $\varphi(x) = e^x$.

В). $\lambda < 0$. Корни характеристического уравнения для уравнения (4): $p_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}i$. Тогда общее решение уравнения (4) имеет вид

$$\varphi(x) = c_1 \cos(\sqrt{-\lambda}x) + c_2 \sin(\sqrt{-\lambda}x).$$

Отсюда находим, что

$$\varphi'(x) = -c_1\sqrt{-\lambda}\sin(\sqrt{-\lambda x}) + c_2\sqrt{-\lambda}\cos(\sqrt{-\lambda x}$$

Краевые условия (5) для нахождения c_1 и c_2 дают систему

$$
\begin{cases}
c_1 - c_2\sqrt{-\lambda} = 0; \\
c_1 \cos\sqrt{-\lambda} + c_2 \sin\sqrt{-\lambda} + c_1\sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda} - \\
\quad - c_2\sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} = 0
\end{cases} \qquad (6)
$$

Определитель это системы

$$
\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{-\lambda} \\ \cos\sqrt{-\lambda} + \sqrt{-\lambda}\sin\sqrt{-\lambda} & \sin\sqrt{-\lambda} - \sqrt{-\lambda}\cos\sqrt{-\lambda} \end{vmatrix}
$$

Полагая его равным 0, получим уравнение для нахождения характеристических чисел

$(1\text{-}\lambda)\sin\sqrt{-\lambda} = 0$. По предложению $1\text{-}\lambda \neq 0$. Поэтому $\sqrt{-\lambda} = \pi n; \lambda_n = -\pi^2 n^2$ - характеристические числа, $n \in N$.

При значениях $\lambda = \lambda_n = -\pi^2 n^2$ система (6) примет вид:

$$
\begin{cases}
c_1 - c_2\pi n = 0 \\
c_1(-1)^n - c_2\pi n(-1)^n = 0
\end{cases}.
$$

Она имеет бесконечное множество решений: $c_1 = c_2\pi n$. Пусть $c_2 = c$, тогда $c_1 = c\pi n$. Значит, и исходное уравнение имеет бесконечное множество решений вида:

$$
\varphi_n(x) = c(\pi n\cos(\pi nx) + \sin(\pi nx)),
$$

которые являются собственными функциями этого уравнения.

2. Неоднородные симметричные интегральные уравнения Фредгольма

Схема решения

1. Неоднородное интегральное уравнение переписать в виде:

$$
\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_a^x K(x,t)\varphi(t)dt + \lambda\int_x^b K(x,t)\varphi(t)dt \qquad (7)
$$

Последнее равенство продифференцируем по x:

$$\varphi'(x) = f'(x) + \lambda K(x,x)\varphi(x) + \lambda\int_a^x K'_x(x,t)\varphi(t)dt -$$
$$- \lambda K(x,x)\varphi(x) + \lambda\int_x^b K'_x(x,t)\varphi(t)dt \tag{8}$$

2. Продифференцировав (7) по x и, при необходимости использовав равенство (8), составив дифференциальное уравнение второго порядка.

3. Из равенства (7) и (8) вывести краевые условия и составить краевую задачу.

4. Решить полученную краевую задачу.

Пример 2. Решить уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt = x, \tag{9}$$

где
$$K(x,t) = \begin{cases} (x+1)(t-3), \textit{ если } 0 \le x \le t, \\ (t+1)(x-3), \textit{ если } t \le x \le 1. \end{cases}$$

Решение. Уравнение (9) перепишем в виде:

$$\varphi(x) = \lambda(x-3)\int_0^x (t+1)\varphi(t)dt + \lambda(x+1)\int_x^1 (t-3)\varphi(t)dt + x \tag{10}$$

1. Продифференцируем равенство (10)

$$\varphi'(x) = \lambda\int_0^x (t+1)\varphi(t)dt + \lambda\int_x^1 (t-3)\varphi(t)dt + 1 \tag{11}$$

2. Продифференцировав еще раз, получим:

$$\varphi''(x) - 4\lambda\varphi(x) = 0.$$

Из равенств (20) и (21) выведем краевые условия:

$$\varphi(0) - \varphi'(0) = -1; \quad \varphi(1) + 2\varphi'(1) = 3.$$

3. Таким образом, для нахождения функции $\varphi(x)$ получили краевую задачу:

$$\begin{cases} \varphi''(x) - 4\lambda\varphi(x) = 0; \\ \varphi(0) - \varphi'(0) = -1; \varphi(1) + 2\varphi'(1) = 3. \end{cases} \tag{12}$$

Решим её. Возможны три случая:

а). $\lambda = 0$. Тогда $\varphi(x) = c_1 x + c_2$. Из краевых условий (22) получим:

$$\begin{cases} \varphi(0) - \varphi'(0) = c_2 - c_1 = -1 \\ \varphi(1) + 2\varphi'(1) = c_1 + c_2 + 2c_1 = 3 \end{cases}$$

Отсюда $c_1=1$; $c_2=0$. Поэтому $\varphi(x) = x$ - решение уравнения (9) при $\lambda = 0$.

б). $\lambda > 0$. Тогда общее решение уравнения (12) имеет вид:

$$\varphi(x) = c_1 ch(2\sqrt{\lambda}x) + c_2 sh(2\sqrt{\lambda}x).$$

$$\varphi'(x) = 2\sqrt{\lambda}c_1 sh(2\sqrt{\lambda}x) + 2\sqrt{\lambda}c_2 ch(2\sqrt{\lambda}x).$$

Из условия (10) имеем:

$$\begin{cases} \varphi(0) - \varphi'(0) = c_1 - 2\sqrt{\lambda}c_2 = -1; \\ \varphi(1) - 2\varphi'(1) = \\ = c_1 ch2\sqrt{\lambda} + c_2 sh\sqrt{\lambda} + 4\sqrt{\lambda}c_1 sh2\sqrt{\lambda} + 4\sqrt{\lambda}c_2 ch2\sqrt{\lambda} = 3. \end{cases}$$

Решив, получим:

$$c_1 = \frac{3 + ch\mu + 2\mu sh\mu}{3\mu ch\mu + (1+2\mu^2)sh\mu}; \quad c_1 = \frac{3\mu - 2\mu ch\mu - sh\mu}{3\mu ch\mu + (1+2\mu^2)sh\mu},$$

где $\mu = 2\sqrt{\lambda}$ и μ - не корень уравнения:

$$3\mu ch\mu + (1+2\mu^2)sh\mu = 0.$$

Тогда решение задачи (22) имеет вид:

$$\varphi(x) = \frac{3(sh\mu x + \mu ch\mu x) + sh\mu(x-1) - 2\mu ch\mu(x-1)}{3\mu ch\mu + (1+2\mu^2)sh\mu}$$

в). λ <0. Тогда

$$\varphi(x) = c_1\cos(2\sqrt{-\lambda}x) + c_2\sin(2\sqrt{-\lambda}x)$$

Пусть $\mu = 2\sqrt{-\lambda}$;

$$\varphi'(x) = -\mu c_1 \sin\mu x + \mu c_2 \cos\mu x.$$

Из краевых условий имеем

$$\begin{cases} \varphi(0) - \varphi'(0) = c_1 - \mu c_2 = -1; \\ \varphi(1) + 2\varphi'(1) = c_1\cos\mu + c_2\sin\mu - 2\mu c_1\sin\mu + 2\mu c_2\cos\mu = 3. \end{cases} \tag{13}$$

Решив последнюю систему, получим:

$$c_1 = \frac{3\mu - 2\mu\cos\mu - \sin\mu}{3\mu\cos\mu + (1-2\mu^2)\sin\mu}, \quad c_2 = \frac{3+\cos\mu - 2\mu\sin\mu}{3\mu\cos\mu + (1-2\mu^2)\sin\mu}$$

Тогда решение уравнения (7) примет вид:

$$\varphi(x) = \frac{3(\mu\cos\mu x + \sin\mu x) - 2\mu\cos\mu(x-1) + \sin\mu(x-1)}{3\mu\cos\mu + (1-2\mu^2)\sin\mu};$$

если μ - не корень уравнения:

$$3\mu\cos\mu + (1-2\mu^2)\sin\mu = 0; \quad \mu = 2\sqrt{-\lambda}.$$

Если же μ_n - корни последнего уравнения, то система (13) несовместна и решение уравнения (9) не существует. Тогда однородное уравнение

$$\varphi(x) = -\frac{\mu_n^2}{4}\int_0^1 K(x,t)\varphi(t)dt$$

имеет бесконечно много нетривиальных решений $\varphi_n(x)$, где $\varphi_n(x)$ - собственные функции, соответствующие этим корням если μ_n.

10.2 Планы занятий в рамках самостоятельной работы студентов

Рекомендуемая литература: [5] - [7], [11] - [13], [16], [17].

Тема № 1. ***Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра. Метод последовательных приближений.***

Задания

1. Проверить, что данные функции являются решениями следующих интегральных уравнений Вольтерра: [5] № 3, 6.
2. Методом последовательных приближений решить следующие интегральные уравнения Вольтерра: [5] № 322, 323, 324.

3. Методом последовательных приближений найти третье приближение нелинейного интегрального уравнения Вольтерра специального вида: [5] № 331.

4. Методом последовательных приближений решить следующее интегральное уравнение Фредгольма 2 рода: [5] №333.

5. Методом последовательных приближений решить следующее интегральное уравнение Фредгольма 1 рода с симметричным ядром: [5] № 336.

Тема № 2. ***Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтерра с помощью резольвенты.***

Задания

1. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра со следующими ядрами: [5] № 25, 27, 29.

2. Найти резольвенты для интегральных уравнений Вольтерра с ядрами, имеющими вид многочлена: [5] № 31, 33.

3. Найти с помощью резольвент решения следующих интегральных уравнений Вольтерра: [5] № 37, 39, 41.

Тема № 3. ***Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Интегральные уравнения типа свертки. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.***

Задания

1. Применяя интегральное преобразование Лапласа решить следующие интегральные уравнения Вольтерра 2 рода типа свёртки: [5] № 234, 236, 238, 239, 241; [13] № 5.12(1).

2. Используя теорему о свертке интегрального преобразования Лапласа решить нелинейное интегральное уравнение Вольтерра специального вида: [5] № 248.

3. Решить следующие интегральные Вольтерра 1 рода типа свертки, предварительно сведя их к интегральным уравнениям 2 рода: [5] № 277, 279, 281.

4. Решить следующие системы интегральных уравнений Вольтерра типа свертки: [5] № 251, 253, 255.

5. Решить следующие интегро-дифференциальные уравнения: [5] № 257, 259, 261.

Тема № 4. ***Интегральные уравнения Фредгольма. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма.***

Задания

1.Вычислить для данного интегрального уравнения определитель и минор Фредгольма: [5] № 75.

2. Пользуясь определителями Фредгольма найти резольвенты следующих ядер: [5] № 77, 78.

3. Используя рекуррентные формулы для определителя и минора Фредгольма, найти резольвенты следующих ядер: [5] № 83, 85.

4. Методом определителей Фредгольма решить следующие интегральные уравнения: [5] № 88, 90.

Тема № 5. ***Резольвента интегрального уравнения Фредгольма. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Фредгольма с помощью резольвенты.***

Задания

1. Найти итерированные ядра интегрального уравнения Фредгольма для указанных ядер: [5] № 92, 94, 96.

2. Построить резольвенты интегральных уравнений Фредгольма для следующих ядер: [5] № 100, 102, 104.

3. Найти резольвенту для интегрального уравнения Фредгольма с ядром специального вида: [5] № 106.

Тема № 6. ***Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Теоремы Фредгольма.***

Задания

1. Решить следующие интегральные уравнения с вырожденными ядрами: [5] № 119, 121.

2. При каких значениях параметра разрешимы следующие интегральные уравнения: [5] № 182, 184.

3. Найти характеристические числа и собственные функции для следующих однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром: [5] № 123, 125, 126.

4. Решить следующие однородные интегральные уравнения с вырожденным ядром: [5] № 161, 163.

Тема № 7. *Интегральные уравнения с симметричным ядром. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с симметричным ядром. Неоднородные интегральные уравнения с симметричным ядром.*

Задания

1.Найти характеристические числа и собственные функции однородных интегральных уравнений с симметричными ядрами: [5] № 134, 136, 138, 140, 142.

2. Показать, что если ядро интегрального уравнения кососимметричное, то все его характеристические числа чисто мнимые.

3. Решить следующие неоднородные интегральные симметричные уравнения: [5] № 165, 167, 169, 171, 173.

4. Выпишите формулу, определяющую решения неоднородного симметричного уравнения с правой частью, ортогональной ко всем собственным функциям данного характеристического числа, в случае, если параметр интегрального уравнения совпадает с этим характеристическим числом.

10.3 Тематика письменных работ по курсу

Темы рефератов

1. Уравнения Рисса-Шаудера. Вполне непрерывные операторы. Компактность множества. Критерий компактности.

2. Разложение истокообразной функции (теорема Гильберта-Шмидта).

4. Нефредгольмовы интегральные уравнения. Сингулярные интегральные уравнения. Преобразования Гильберта.

5. Применение преобразования Меллина к решению некоторых интегральных уравнений. Условия существования преобразования Меллина.

Тематика контрольных работ

Контрольная работа № 1. Интегральные уравнения Вольтерра.

1. Уравнение Вольтерра. Основные понятия.

2. Связь между линейными дифференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра.

3. Метод последовательных приближений к решению интегральных уравнений Вольтерра.

4. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты.

5. Интегральное уравнение Абеля и его обобщения.

6. Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода.

7. Метод интегральных преобразований Лапласа. Интегральные уравнения типа свертки.

8. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Интегро-дифференциальные уравнения.

Контрольная работа № 2. Интегральные уравнения Фредгольма.

1. Уравнение Фредгольма. Основные понятия.

2. Метод определителей Фредгольма.

3. Метод последовательных приближений к решению интегральных уравнений Фредгольма.

4. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер.

5. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром.

6. Характеристические числа и собственные функции.

7. Неоднородные симметричные уравнения.

8. Альтернатива Фредгольма.

Рекомендуемая литература

1. Лизоркин П.И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. – М.: Наука, 1981.

2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 4. Часть 1. - М.: Наука, 1974.

3. Забрейко П.П. Интегральные уравнения. - М.: Наука, 1968.

4. Ловитт У.В. Линейные интегральные уравнения. - М.: Гостехиздат, 1957.

5. Привалов И.И. Интегральные уравнения. - М.: ФМ, 1937.

6. Трикоми Ф. Интегральные уравнения. – М.: ИЛ, 1960.

10.4 Тематика курсовых работ

Не предусмотрено.

11. Методические указания по прохождению учебной, производственной и преддипломной практик, формы отчетной документации (приложение 2)

Не предусмотрено.

12.1 Информация по оценке

Основным критерием является способность самостоятельно работать с литературой; изучаемыми методами; умение применять свои знания на практике. Дополнительным критерием является четкость и глубина понимания изложенного материала и его практическое применение.

Рейтинговая шкала оценки знаний студентов

Рейтинг	Баллы
Текущий	50-100
Рубежный	50-100
Итоговый	50-100
Всего:	**50-100**

«Отлично» ставится в том случае, если обучаемый глубоко изучил учебный материал и литературу по проблеме, последовательно и исчерпывающе отвечает на поставленные вопросы, а при выполнении практической работы – если задание выполнено правильно и в установленное нормативом время (при отсутствии нормативов – уверенно и быстро).

«Хорошо» ставится тогда, когда обучаемый твердо знает материал и отвечает без наводящих вопросов, разбирается в литературе по проблеме, а при выполнении практической работы – если задание выполнено правильно.

«Удовлетворительно» ставится при условии, если обучаемый знает лишь основной материал, путается в литературе по проблеме, а на заданные вопросы отвечает недостаточно четко и полно, а при выполнении практической работы – если задание выполнено, но допускались ошибки, не отразившиеся на качестве выполненной работы.

«Неудовлетворительно» ставится в том случае, когда обучаемый не смог достаточно полно и правильно ответить на поставленные вопросы, не знает литературы по проблеме, а при выполнении практической работы – если задание не сделано или допущены ошибки, влияющие на качество выполненной работы.

12.2 Тестовые задания для самоконтроля

1. Решить интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = 2x^2 + 2 - \int_0^x x\varphi(t)dt\ ,\ \varphi_0(x) = 2x\ .$$

A) $\varphi(x) = 2x - 1$.

B) $\varphi(x) = 2x + 2$;

C) $\varphi(x) = 2x$;

D) $\varphi(x) = 2x - 2$;

E) $\varphi(x) = 2$;

2. Методом определителей Фредгольма решить следующее интегральное уравнение:

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin(x+t)\varphi(t)dt = 1\ .$$

A) $\varphi(x) \equiv 1$;

B) $\varphi(x) = x + 1$;

C) $\varphi(x) \equiv -1$;

D) $\varphi(x) = x - 1$;

E) $\varphi(x) = x - 2$.

3. Решить интегральное уравнение Фредгольма с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} tg\, t\varphi(t)dt = ctg\, t\,.$$

A) $\varphi(x) = tg\, x + \frac{\lambda\pi}{2}$;

B) $\varphi(x) = tg\, x - \frac{\lambda\pi}{2}$;

C) $\varphi(x) = ctg\, x\frac{\lambda\pi}{2}$;

Д) $\varphi(x) = ctg\, x + \frac{\lambda\pi}{2}$;

E) $\varphi(x) = tg\, x$.

4. При каких ограничениях можно рассматривать уравнения Вольтерра как частный случай уравнения Фредгольма?

A) Если ядро интегрального уравнения Вольтерра непрерывно.

B) Если интегральное уравнение Вольтерра линейно.

C) Если допустить разрыв ядра *K(x,t)* вдоль диагонали *x=t*.

D) Ограничений нет.

E) Если числовой параметр интегрального уравнения достаточно мал.

5. Интегральному уравнению какого вида эквивалентна следующая задача Коши для обыкновенного дифференциального уравнения?

$$\begin{cases} \dot{x} = F(t, x(t)), \\ x(a) = x_0 \end{cases}$$

A) $x(t) = x_0 + \int_a^b F(s,(x(s))ds$.

B) $x(t) = \int_a^t F(s,(x(s))ds.$

C) $x(t)=\int_a^t F(s,(x(s))ds+x.$

D) $x(t)=x_0+\int_a^t F(s,(x(s))ds$.

E) Такого интегрального уравнения нет.

6. К какому интегральному уравнению пришел в 1823 году Абель, занимаясь обобщением задачи о таутохроне?

A) $f(x)=\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{x-\eta}}d\eta$.

B) $\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{2g}(x-\eta)} = f(x)$.

C) $\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{(x-\eta)^\alpha} = f(x),\ \ \frac{1}{2}<\alpha<1.$

D) $\int_0^x \frac{\varphi(\eta)}{(x-\eta)^\alpha} = f(x),\ \ 0<\alpha<1.$

E) $\int \frac{\varphi(y)dy}{y^\alpha(1-y)^{1-\alpha}} = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},\ 0<\alpha<1$

7. При каких значениях параметра λ к интегральным уравнениям Вольтерра 2 рода применим метод последовательных приближений?

A) Для $|\lambda|<\frac{1}{B},\ \ где B^2=\int_a^b\int_a^b K^2(x,t)dxdt$.

B) Для

$$|\lambda|<\frac{1}{M(b-a)}, где\quad M=\max|K(x,t)|$$

$$(x,t)\in Q,\quad Q=\{(x,t):a\le x\le b, a\le t\le x\ \}$$

C) Для любых значений параметра λ .

D) Для $|\lambda| \succ \frac{1}{B}, \quad где B^2 = \int_a^b \int_a^b K^2(x,t)dxdt$.

E) Для $\lambda > 0$.

8. Интегральное уравнение Вольтера

$$\int_a^t K(t,s)\varphi(s)ds = f(t), \qquad K(t,t) \neq 0$$

сведите к уравнению 2-го рода с помощью интегрирования по частям, положив $\Phi(t) = \int_a^t \varphi(s)ds$.

A) $\Phi(t) - \int_a^t \frac{K_s^{'}(t,s)}{K(t,t)}\Phi(s)ds = f(t).$

B) $K(t,t)\Phi(t) + \int_a^t K(t,s)\Phi(s)ds = f(t)$.

C) $\Phi(t) - \int_a^t K_s^{'}(t,s)\Phi(s)ds = \frac{f(t)}{K(t,t)}$.

D) $K(t,t)\Phi(t) - \int_a^t K(t,s)\Phi(s)ds = f(t)$.

E) $\Phi(t) - \int_a^t \frac{K_s^{'}(t,s)}{K(t,t)}\Phi(s)ds = \frac{f(t)}{K(t,t)}$.

9. При каких значениях параметра λ резольвента интегрального уравнения Вольтерра, выраженная через итерированные ядра, существует?

A) При отрицательных значениях параметра λ.

B) При любых значениях параметра λ.

C) При λ >0.

D) При $|\lambda| < \frac{1}{\text{B}}$.

E) При $\lambda \neq 0$.

10. Составить интегральное уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению с заданными начальными условиями

$$y'' + (x^3 + 2\sin x)y = tgx\,;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1.$$

A) $\varphi(x) = tgx - x^3 - 2\sin x - \int_0^x (x-t)(x+2t)\varphi(t)dt.$

B) $\varphi(x) = tgx - x^3 - 2\sin x + x^4 + 2x\sin x +$
$+ (x^3 + 2\sin x)\int_0^x (x-t)\varphi(t)dt$

C) $\varphi(x) = tgx - x^3 - 2\sin x - \int_0^x (x-t)\varphi(t)dt\,.$

D) $\varphi(x) = tgx - (x^3 + 2\sin x)(1-x) - \int_0^x (x^3 + 2\sin x)\varphi(t)dt$

E) $\varphi(x) = tgx + (x^3 + 2\sin x)(x-1) -$
$-\int_0^x (x^3 + 2\sin x)(x-t)\varphi(t)dt$

11. Определить тип следующего интегрального уравнения

$$\varphi(x) = \int_a^b K(t, s, \varphi(s))ds$$

Функция $K(t, s, \varphi)$ обычно предполагается непрерывной при $a \le t, s \le b,\ |\varphi| \le M, M > 0$ - достаточно большая постоянная.

A) Уравнение Урысона.
B) Уравнение Гаммерштейна.
C) Уравнение типа свертки.
Д) Нелинейное уравнение Вольтерра.
E) Уравнение Ляпунова-Лихтенштейна.

12. Найти с помощью резольвенты решение следующего интегрального уравнения

$$\varphi(x) = e^x \sin x + \int_0^x \frac{2+\cos x}{2+\cos t}\varphi(t)dt$$

A) $\varphi(x) = e^x \sin x + \dfrac{2+\cos x}{2+\cos^2 x} e^x + x\sin x.$

B) $\varphi(x) = e^x \sin x + e^x(2+\cos x)\ln \dfrac{3}{2+\cos x}$.

C) $\varphi(x) = e^x \sin x + \dfrac{2+\cos x}{2+\cos^2 x} e^x \sin x$.

D) $\varphi(x) = e^x \sin x + e^x(2+\cos x)/(\cos x - \sin x)$.

E) $\varphi(x) = e^x \sin x + (2+\cos x)(\cos x - 2\sin x)e^x \ln^3 x$.

13. Определите вид ядра интегрального уравнения

$$K(t,s) = \frac{H(t,s)}{(t-s)^{\alpha}}, \qquad 0 < \alpha < 1,$$

где $H(t, s)$ — некоторая непрерывная функция.

A) Вырожденное ядро.
B) Симметричное ядро.
C) Полярное ядро.
Д) Ядро, близкое к вырожденным.
E) Ядро Абеля.

14. Методом последовательных приближений решить следующее интегральное уравнение Вольтерра

$$\varphi(x) = \frac{x^3}{3} - 2x - \int_0^x \varphi(t)dt\,, \quad \varphi_0(x) = x^2.$$

A) $\varphi(x) = x^2 + 2x$.

B) $\varphi(x) = x^2 + 2x - 1$.

C) $\varphi(x) = x^2 - 2x + 1$.

D) $\varphi(x) = x^2 - 2x$.

E) $\varphi(x) = x^2 - 2x + \dfrac{x^3}{3}$.

15. Решить следующее интегральное уравнение Вольтерра 1-го рода, предварительно сведя его к интегральному уравнению 2-рода

$$\int_0^x (2+x^2-t^2)\varphi(t)dt = x^2 .$$

A) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{2}$.

B) $\varphi(x) = x - \dfrac{x^3}{2} + \dfrac{x^5}{8} + \dfrac{x^2}{e^2}$.

C) $\varphi(x) = \dfrac{1}{2} x e^{\frac{x^2}{2}}$.

D) $\varphi(x) = e^{-x^2} * x$.

E) $\varphi(x) = x e^{\frac{-x^2}{2}}$.

16. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с вырожденным ядром

$$\varphi(x) - \lambda \int_0^{2\pi} \sin x \cos t \varphi(t) dt = 0.$$

A) $\lambda = \dfrac{8}{\pi - 2}; \varphi(x) = C\sin^2 x.$

B) Нет характеристических чисел и собственных функций.

C) $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}, \varphi_1(x) = \cos x; \lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}, \varphi_2 = \sin x.$

Д) $\lambda_1 = \dfrac{2}{\pi}, \varphi_1(x) = \sin x; \lambda_2 = -\dfrac{2}{\pi}, \varphi_2 = \cos x.$

E) $\lambda = \dfrac{8}{\pi - 2}; \varphi(x) = C\cos^2 x.$

17. Найти характеристические числа и собственные функции однородного интегрального уравнения Фредгольма с симметричным ядром

$$K(x,t)=\begin{cases} t(x+1), 0\le x\le t; \\ x(t+1), t\le x\le 1. \end{cases}$$

A) $\lambda_0 = 1, \varphi_0(x) = e^x$;

$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \varphi_n(x) = \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x; n = 1,2...$

B) $\lambda_n = -\pi^2 n^2, \varphi_n(x) = \pi n \cos \pi n x + \sin \pi n x; n = 1,2...$

C) Нет характеристических чисел и собственных функций.

Д) $\lambda_0 = 1, \varphi_0(x) = e^x$.

E) $\lambda_0 = 1, \varphi_0(x) = \cos x$;

$\lambda_n = -\pi^2 n^2, \varphi_n(x) = \cos \pi n x + \pi n \sin \pi n x; n = 1,2...$

18. Решить следующее уравнение Гаммерштейна

$$\varphi(x) = \int_0^1 x^2 t^2 \varphi^3(t)dt.$$

A) $\varphi\ (x) = 0$.

B) $\varphi_{1,2}(x) = \pm\frac{15}{4}x^2 + x$.

C) $\varphi_1(x) = 0; \varphi_{2,3} = \pm 3x^2$.

Д) $\varphi_{1,2} = \pm 3x^2$.

E) $\varphi_{1,2}(x) = \pm\frac{15}{4}x^2 - x$.

19. Определите тип следующего интегрального уравнения

$$\varphi(t) = f(t) + \lambda\int_a^b K_1(t,s)\varphi(s)ds + \mu\int_a^b\int_a^b K_2(t,s,z)\varphi(s)\varphi(z)dsdz$$

A) Уравнение Гаммерштейна.

B) Уравнение Ляпунова-Лихтенштейна.

C) Уравнение типа свертки.

Д) Нелинейное уравнение Вольтерра.

E) Уравнение Урысона.

20. При каких значениях параметра λ решение симметричного уравнения имеет вид

$$\varphi(t) = \lambda\sum_i \frac{f_i}{\lambda_i - \lambda}\varphi_j(t) + f(t)(i = 1,2,...),$$

где $$f(t) = \int_a^b f(t)\varphi_i(t)dt.$$

А) Значения параметра λ являются характеристическими числами.

В) Параметр λ принимает только отрицательные значения.

С) Параметр λ не обращается в ноль.

Д) Значения параметра λ не являются характеристическими числами.

Е) Параметр λ принимает только неотрицательные значения.

Ключи правильных ответов

Номер вопроса	Правильный ответ (A,B,C,D,E)	Номер вопроса	Правильный ответ (A,B,C,D,E)
1	E	11	A
2	A	12	B
3	D	13	C
4	C	14	D
5	D	15	E
6	A	16	B
7	C	17	A
8	E	18	C
9	B	19	B
10	E	20	D

Критерии оценки знаний студентов

Количество правильных ответов	**Оценка**
19-20	Отлично
16-18	Хорошо
10-15	Удовлетворительно
Ниже 10 баллов	Неудовлетворительно

12.3 Экзаменационные вопросы по курсу

1. Основные классы интегральных уравнений. Интегральные уравнения Фредгольма. Интегральные уравнения Вольтерра. Некоторые виды нелинейных интегральных уравнений.

2. Задачи, приводящие к интегральным уравнениям. Задача обращения интеграла. Задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. Связь между линейными диф-

ференциальными уравнениями и интегральными уравнениями Вольтерра.

3. Интегральные уравнения Вольтерра 1 рода. Приведение интегрального уравнения Вольтерра 1 рода к интегральному уравнению 2 рода.

4. Формулы Фредгольма. Метод определителей Фредгольма. Определитель, минор, резольвента Фредгольма.

5. Интегральные уравнения с вырожденным ядром. Алгоритм решения интегральных уравнений с вырожденным ядром.

6. Интегральные уравнения типа Гаммерштейна. Характеристические числа и собственные функции интегрального уравнения с вырожденным ядром.

7. Решение однородных интегральных уравнений с вырожденным ядром. Алгоритм решения.

8. Теоремы Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром. Случай, если параметр уравнения не является характеристическим числом. Случай, если параметр уравнения совпадает с характеристическим числом.

9. Альтернатива Фредгольма для интегрального уравнения с вырожденным ядром.

10. Теоремы Фредгольма для общего случая интегрального уравнения Фредгольма. Существование и единственность решения интегрального уравнения с непрерывным ядром, с суммируемым ядром.

11. Метод последовательных приближений (метод итераций) для интегрального уравнения Фредгольма.

12. Метод последовательных приближений (метод итераций) для интегрального уравнения Вольтерра.

13. Применение принципа сжатых отображений к решению некоторых видов нелинейных интегральных уравнений.

14. Применение принципа сжатых отображений к решению систем интегральных уравнений Фредгольма 2 рода с одной независимой переменной.

15. Приложение к линейным интегральным уравнениям. Итерированные ядра. Построение резольвенты через итерированные ядра. Решение интегрального уравнения с помощью резольвенты.

16. Свойства резольвенты, построенной через итерированные ядра. Случай ядра, ортогонального самому себе.

17. Резольвента интегрального уравнения Вольтерра. Итерированные ядра. Решение интегрального уравнения Вольтера с помощью резольвенты.

18. Итерированные ядра. Построение резольвенты с помощью итерированных ядер для интегрального уравнения Фредгольма.

19. Интегральные уравнения с симметричным ядром. Формулы Шмидта для решения интегрального уравнения с симметричным ядром.

20. Интегральные уравнения, приводящиеся к симметричным уравнениям.

21. Классификация симметричных ядер. Формула, лежащая в основе классификации симметричных ядер.

22. Свойства характеристических чисел и собственных функций интегральных уравнений с симметричным ядром.

23. Нахождение характеристических чисел и собственных функций интегральных уравнений с симметричным ядром.

24. Неоднородные симметричные интегральные уравнения Фредгольма. Алгоритм решения.

25. Метод интегральных преобразований. Интегральное преобразование Лапласа. Условия существования преобразования Лапласа. Свойства преобразования Лапласа.

26. Интегральные уравнения типа свертки 1 и 2 родов. Схема решения методом преобразования Лапласа.

27. Системы интегральных уравнений Вольтерра типа свёртки. Алгоритм решения методом интегрального преобразования Лапласа.

28. Интегро-дифференциальные уравнения. Решение методом интегрального преобразования Лапласа.

13. Программное и мультимедийное сопровождение учебных занятий

Тема	Вид занятия	Вид программного продукта	Место предоставления доступа	Название специализи-рованных аудиторий
Метод определителей Фредгольма.	Практика	Power Point ИАД	Кафедра, зал мультимедийных ресурсов	Пот. ауд. № 8
Теоремы Фредгольма. Альтернатива Фредгольма.	Лекция	Power Point ИАД	Кафедра, зал мультимедийных ресурсов	Пот. ауд. № 8
Интегральные уравнения с вырожденным ядром.	СРСП	Power Point ИАД	Кафедра, зал мультимедийных ресурсов	Пот. ауд. № 8
Интегральные уравнения с симметричным ядром.	Лекция	Power Point ИАД	Кафедра, зал мультимедийных ресурсов	Пот. ауд. № 8

14. Перечень специализированных аудиторий, кабинетов и лабораторий

Не предусмотрено.

Содержание

УМК обсужден на заседании кафедры
(протокол № 9 от 10 апреля 2013 г.)

УМК одобрен Научно-методическим
советом КарГУ им. Е.А. Букетова
(протокол № 6 от 12 апреля 2013 г.)

УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКИЙ КОМПЛЕКС
по дисциплине
«ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ»
для специальности 5В060100 – Математика

Есенбаева Гульсима Ахмадиевна

Подписано в печать г. Формат 60×84 1/16. Газетная бумага.
Объем 6,6 уч.-изд. л. Тираж экз. Заказ №

Отпечатано в типографии издательства КарГУ им. Е.А. Букетова
100012, г. Караганда, ул. Гоголя, 38