ДІЛМАН Т.Б., МӘДЕЛХАНОВА Ә.Ж., СЕРІКБОЛ М.С.

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУ

Қызылорда – 2013

ДІЛМАН Т.Б., МӘДЕЛХАНОВА Ә.Ж., СЕРІКБОЛ М.С.

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУ

Қызылорда – 2013

УДК 37.0
ББК 74.04
А 94

Ділман Т.Б., Мәделханова Ә.Ж., Серікбол М.С.
А94 Амалдарды зерттеу. Әдістемелік нұсқау. /Ділман Т.Б. және т.б./ – Қызылорда, Қызылорда-Қанағаты, 2013 - 160 бет.

ISBN 978-601-7455-02-6

Жауапты редактор –
техника ғылымдарының докторы,
профессор Жанмолдаев Б.Ж.

Бұл әдістемелік нұсқау жоғары оқу орындарының техникалық және экономикалық мамандықтарында оқитын студенттеріне "Амалдарды зерттеу" пәні бойынша қосымша оқу құралы ретінде ұсынылады.

УДК 37.0
ББК 74.04

ISBN 978-601-7455-02-6

§1. Амалдарды зерттеудің негізгі ұғымдары, принциптері мен құралдары.

Мақсатқа қол жеткізуге бағытталған кез келген іс-әрекеттің жиынтығын **амал (операция)** деп атайды. Мақсатсыз іс-әрекет операция емес. Мысалы, белгілі бір уақыт мерзімінде жоғары сапалы өнім (мақсат) алу үшін кәсіпорында жаңа құрал-саймандарды орнату операция болып табылады.

Мақсатқа қол жеткізуі мүмкін бірнеше операцияның ішінен таңдалған операция **тиімді** болуы керек. Операцияның тиімділігін таңдалған **көрсеткіш** анықтайды. Мысалы, құрал-саймандарды орнату уақытын немесе құрал-саймандарды орнатуға кететін қаржы шығынын көрсеткіш ретінде таңдауға болады. Құрал-саймандарды орнатуға мүмкіндігінше аз уақыт немесе аз шығын қажет ететін операция тиімді.

Мақсатқа қол жеткізуді қамтамасыз ететін жеке адамды немесе ұжымды **операция жасаушы** тарап деп атайды. Операцияға қатысу үлесі мен сипатына қарай операция жасаушы тараптың өкілі мақсатты өзі қоюы немесе жоғарғы жақтан бұйрық алуы мүмкін. Мысалы, құрал-саймандарды орнатуды мақсат еткен кәсіпорынның жұмысшылары мен қызметкерлері операция жасаушы тарап болады.

Операцияны ойдағыдай орындап, мақсатқа жету үшін пайдаланылатын материалдық, қаржылық, еңбек, әкімшілік және тағы басқа ресурстардың жиынтығын операцияның **белсенді құралдары** деп атайды. Операция жасаушы тарап өкілдері операцияны орындау барысында белсенді құралдарды қалаған кезінде қолдануға еркі болуы керек. Әйтпесе операция басқарылатын процесс болмайды және операция жасаушы тарап сырттай бақылаушы ғана болады.

Мысалы, құрал-саймандарды орнатуды мақсат еткен кәсіпорынның қызметкерлері, жұмысшылар мен қызметкерлердің біліктілігі, жалақы қоры, құрал-саймандарды сатып алуға қажет қаржы, өндіріс технологиясы операцияның белсенді құралдары болады.

Операцияның белсенді құралдарын пайдаланудың мүмкін әдістері операция жасаушы тараптың осы операциядағы **стратегиялары** деп аталады. Мүмкін стратегиялардың ішінен таңдалған көрсеткіш бойынша артықшылығы бар **тиімді стратегия** табылады. Операция жасаушы тарап операцияны атқарудың тиімді страгиясын табуды көздейді. Мысалы, кәсіпорында құрал-саймандарды орнату жұмыстарының реті – операцияның стратегиясы.

Операцияның ерекшеліктерін анықтайтын және орындалуына әсер ететін нақты шарттар мен жағдайлар операцияға **әсер етуші факторлар** деп аталады. Факторларды **анықталған** (яғни, нақты белгілі) факторлар және **анықталмаған** (яғни, кездейсоқ табиғаты бар) факторлар деп бөледі. Факторлар операция жасаушы тарапынан **бақыланатын** және **бақыланбайтын** факторлар болып бөлінеді. Бақыланбайтын факторлар, әдетте, анықталмаған факторлар болады. Бақыланатын факторлардың бар болуы операцияның орындалу барысын басқаруға болатындығын көрсетеді. Әсер етуші факторлардың жиынтығы операцияның орындалатын жағдайын анықтайды. Мысалы, кәсіпорындағы жұмыс ауысымының белгіленген ұзақтығы, ауа райы, жалақының уақытылы берілуі – операцияның әсер етуші факторлары.

Операцияның мақсаты мен жасалған іс-әрекеттің арасындағы сәйкестік көрсеткішін операцияның (немесе таңдалған стратегияның) **тиімділік белгісі** деп атайды. Әр түрлі стратегияларды іске асырмай тұрып салыстыра бағалау, яғни тиімді стратегияны анықтау тиімділік белгісінің маңызды функциясы болып табылады. Әдетте тиімділік белгісінің максимум немесе минимум мәнін қамтамасыз ететін стратегия ізделеді. Операция мақсатын дұрыс анықтайтын және белсенді құралдарды орынсыз шығындамайтын тиімділік белгісін таңдау керек. Мысалы, кәсіпорында жаңа құрал-сайманды орнауға кететін қаржы шығынын тиімділік белгісі ретінде алуға болады.

Қалыптасқан іс-әрекеттің белгілі t уақыт моментіндегі нақты жағдайын бейнелейтін операция ерекшеліктерінің жиынтығын операцияның сол уақыттағы **күйі** деп айтады. Кез келген операция уақыт бойынша өзінің әр түрлі даму кезеңдерін өткеретін және мақсатқа сәйкес нәтиже алумен аяқталатын процесс болып табылады. Операцияның күйі бірнеше сандық көрсеткіштермен бағалануы мүмкін. Мысалы, ξ_1 - орындалатын жұмыстың нөмірі, ξ_2 - орнатылған құрал-саймандардың саны, ξ_3 - операцияның аяқталуына дейін қалған уақыт.

Операцияның тиімділік белгісі мен әсер етуші факторларының арасындағы байланысты анықтайтын формалды қатынастарды операцияның **математикалық моделі** деп атайды. Математикалық модель тиімділік белгісі мен есепке алынған әсер етуші факторлардың параметрлерінің арасындағы байланыстарды анықтайтын формулалар, теңдеулер мен теңсіздіктер жүйесі, сандық тізбектер арқылы берілуі мүмкін.

Математикалық модельге байланысты **шешім** деп бақыланатын параметрлердің мәндерінің нақты жиынын айтады. Шешімді әр түрлі әдіспен, әр түрлі дәлдікпен және бақыланбайтын параметрлерге қарағанда айтылған әр түрлі болжаммен алуға болады. Әр уақытта бақыланбайтын факторлар бар болғандықтан кез келген модель нақты құбылысты дәл суреттей алмайды.

Операцияларды, математикалық модельдерді әр түрлі тиімділік белгілері бойынша зерттеп, мүмкін стратегиялардың ішінен тиімді стратегияны іздейтін жеке адамды немесе ұжымды **операцияларды зерттеушілер** деп атайды. Операцияларды зертеушілер операция жасаушы тарап құрамына енгенімен олардың кызметі зерттеу нәтижесін ұсынумен шектеледі. Накты шешімді операция жасаушы тараптың әкімшілігі кабылдайды.

Операцияларды зерттеудің **негізгі мәселесі** – қабылданған модель бойынша тиімділік белгісінің экстремум мәндерін аныктау.

Өзара белгілі байланыстармен біріккен және арнайы мақсаттарға кол жеткізуге қолданылатын материалдык нысандардың (элементтердің) жиынын **система** деп атайды. Бұл аныктамадан система ұғымы келесі 1)элемент, 2)байланыстар, 3)операция деген ұғымдардың бірлігі екенін байкаймыз. Мысалы, завод система болып табылады, өйткені заводтың элементтері (цехтар, бөлімдер), элементтердің арасында әр түрлі байланыстар, әр элементтің операцияда аткаратын өз үлестері бар.

Системаның өзі баска системаның элементі немесе баска системалардың жиыны болуы мүмкін. Мысалы, университет, факультет, кафедра әркайсысы система болады, сонымен бірге факультет университеттің элементі және кафедралардың жиыны.

Системаларды шартты түрде үш түрге бөледі: 1)детерминанттык, 2)ықтималдық және 3)ойын системалары.

Практикалык сабак
Операциялардың математикалық модельдерін құру.

Мысал. Тігін тігу құралы екі түрлі киім тігіп шығарады: көйлек және костюм. Оған 3 түрлі шикізат пайдаланылады: макта мата, жібек мата, фурнитура. Көйлектің және костюмнің құны 30$ және 60$ құрайды. Ал шикізат бойынша қосымша мақта мата 21 м., жібек мата 21 м., фурнитура 18 дана, бір көйлекті тігіп шығару үшін 3 м мақта мата, 1 м жібек мата, 3 фурнитура жұмсалады. Бір костюмді тігу үшін 1 м макта мата, 2 м жібек мата, және 1 фурнитура қажет. Өнімдер санын және ең үлкен пайда көлемін табу керек.

Шешімі:

1)x_1 – көйлек саны, x_2 – костюм саны.

2)Максаттық функция.

$30x_1$ – көйлек бойынша сатудан келетін табыс,

$60x_2$ – костюм саны бойынша келетін табыс.

3)Шектеулер:
$3x_1$ – көйлекке кететін мақта мата шығыны
x_2 – костюмге кететін мақта мата шығыны.
x_1 – көйлекке кететін жібек мата шығыны
$2x_2$ – костюмге кететін жібек мата шығыны.
$3x_1$ – көйлекке кететін фурнитура шығыны
x_2 – костюмге кететін фурнитура шығыны.
4)Экономикалық есептің математикалық моделі:

$$F(x) = 30x_1 + 60x_2 \to max$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 < 21 \\ x_1 + 2x_2 < 21 \\ 3x_1 + x_2 < 18 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Лабораториялық сабақ
Операциялардың математикалық модельдерін құру.

І.Есептің қойылымы.

Есеп. Фирма ішкі (І) және сыртқы (С) жұмыстар үшін екі түрлі бояу дайындайды. Осы өнімдерді шығару үшін түс және әліп май өнімдері пайдаланылады. Өнімнің шығыны, максималды тәуліктік қоры және 1 т. бояудың сату бағасы кестеде көрсетілген.

Өнімдер	1 т. бояуға кететін шығын		Тәулік қоры, т.
	бояу С	бояу І	
Түс (пигмент)	0,8	1,6	4,8
Әліп май (олифа)	1,6	0,8	6,4
Бояудың сату бағасы (1 т.)	2,4	1,6	

Сауда өтімі көрсеткендей, ішкі (І) жұмыстарға кететін бояудың тәуліктік сұранысы 1,6 тоннадан аспайды.
Өнімді өткізгенде максимум пайда табу үшін фирма бояудың қай түрін қандай мөлшерде өндіруі керектігін анықтаңыз.
ІІ. Математикалық моделін құру.
1) Белгілеулер енгіземіз.

x_1 – Сыртқы жұмыстарға қолданылатын бояу мөлшері;
x_2 – Ішкі жұмыстарға қолданылатын бояу мөлшері;
$X(x_1, x_2)$ – Сыртқы және ішкі жұмыстар үшін бояудың жоспарланған шығарылымы.
2) Ресурстар бойынша шектеулер.
Бастапқы өнімнің шығыны ≤ Тәуліктік кор.
$0,8x_1$ – Сыртқы жұмыстарға арналған x_1 бояуын дайындауға кететін түстің мөлшері.
$1,6x_2$ – Ішкі жұмыстарға арналған x_2 бояуын дайындауға кететін түстің мөлшері.
$0,8x_1 + 1,6x_2$ – Ішкі және сыртқы жұмыстарға арналған x_1, x_2 бояуын дайындауға кететін түстің жалпы мөлшері.
$0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8$ – түсті пайдаланудағы шектеулер.
Тура осы жолмен эліп майды пайдаланудағы шктеулерді құрамыз.
$1,6\ x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4$ – эліп майды пайдаланудағы шектеулер.
$0,8x_2$ – ішкі жұмыстарға арналған бояудың тәуліктік сұранысы.
$0,8x_2 \leq 1,6$ – ішкі жұмыстарға арналған бояудың тәуліктік сұранысы.

$$0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8$$
$$1,6\ x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4$$
$$0,8x_2 \leq 1,6$$

3) Максаттык функциясы (оптимальді шешім табудағы шарты).
$2,4\ x_1$ – Сыртқы жұмыстарға арналған x_1 мөлшердегі бояудың сату бағасы.
$1,6\ x_2$ – Ішкі жұмыстарға арналған x_2 мөлшердегі бояудың сату бағасы.
$2,4\ x_1 + 1,6\ x_2$ – Ішкі және сыртқы жұмыстарға арналған x_1, x_2 мөлшердегі бояудың жалпы сату бағасы.

$$F = 2,4\ x_1 + 1,6\ x_2 \rightarrow max$$

4) Теріс болмау шарты

$$x_1 \geq 0$$
$$x_2 \geq 0$$

Сонымен есептің (1), (2), (3) математикалық моделі – сызықты модель болады, себебі максат функциясындағы және шектеулердегі x_1, x_2 – айнымалылар дәрежесі бірге тең.

$$F = 2,4\ x_1 + 1,6\ x_2 \rightarrow max \qquad (1)$$
$$\begin{cases} 0,8x_1 + 1,6x_2 \leq 4,8 \\ 1,6\ x_1 + 0,8x_2 \leq 6,4 \\ 0,8x_2 \leq 1,6 \\ x_1, x_2 > 0 \end{cases} \qquad (2)$$

§2. Математикалық программалау есептерінің қойылымдары.

Сызықтық программалау (СП) есебінің **жалпы қойылымы**: мақсаттық

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad (1)$$

функциянның

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}), \quad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l}, l \le n) \quad (4)$$

шарттар орындалғандағы максимумын немесе минимумын табу керек, мұндағы a_{ij}, b_i, c_j - берілген тұрақты сандар және $k \le m$.

Берілген (1) функция **мақсаттық** функция деп, ал (2)-(4) шарттар СП есебінің **шектеулері** деп аталады. Мақсаттық функция мен шектеулерге айнымалылардың тек бірінші дәрежесі енетіндіктен (1)-(4) есебін **сызықтық** программалау есебі деп атайды.

СП есебінің **стандарттық (симметриялық)** қойылымында мақсаттық (1) функциянның (2), (4) шарттар орындалғандағы ($k = m, l = n$) максимум мәні ізделінеді. Басқа сөзбен айтқанда, стандарттық қойылымның шектеулерінде теңсіздіктер ғана беріледі.

СП есебінің **канондық (негізгі)** қойылымында мақсаттық (1) функциянның (3), (4) шарттар орындалғандағы ($k = 0, l = n$) максимум мәні ізделінеді. Басқа сөзбен айтқанда, канондық қойылымның шектеулерінде теңдеулер ғана беріледі.

Берілген (2)-(4) шектеулерді қанағаттандыратын $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ сандар жиынтығын берілген СП есебінің **жоспары** (мүмкін шешуі) деп атайды. Мақсаттық (1) функциянның экстремум мәндерін қамтамасыз ететін $X^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ жоспарын **тиімді жоспар** деп атайды. Әруақытта $F(X) \le F(X^*)$ немесе $F(X) \ge F(X^*)$ орындалады.

СП есебі қойылымының үш түрі өзара **эквивалентті**, яғни бір түрдегі қойылымды екінші түрге түрлендіруге болады. Бір қойылымдағы СП есебінің тиімді жоспары екінші қойылымдағы есептің де тиімді жоспары болады. Мақсаттық F функциясының минимумы ізделінетін есепті $-F$ функциясының максимумы ізделінетін есепке келтіруге болады.

§3. Сызыктык программалау есебін геометриялык әдіспен шешу.

Максаттык

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 \qquad (1)$$

функциянын

$$a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \qquad (2)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1,2) \qquad (3)$$

шарттарды канағаттандыратын шешуін табу керек. Осы (2), (3) теңсіздіктердің әркайсысы сәйкесінше $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i \quad (i = \overline{1,k})$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ түзулерімен шектелген жарты жазыктыкты аныктайды. Егер (2), (3) теңсіздіктердің жүйесі үйлесімді болса, онда оның шешулері жоғарыда айтылған барлык жарты жазыктыктарда жататын нүктелер жиынын құрайды. Жарты жазыктыктардың киылысуынан шыккан жиын дөңес жиын. Демек, (1)-(3) есебінің мүмкін шешулер жиыны шешулер көпбұрышы деп аталатын дөңес жиын. Осы көпбұрыштың қабырғалары теңдеулері берілген шектеулер жүйесінде теңсіздік белгілерінің орындарына теңдік белгілерін кою аркылы алынатын түзулер.

Сонымен СП есебінің шешуін табу есебі шешулер көпбұрышының ішінен максаттык F функциясының максимумын камтамасыз ететін нүктені табуға келтірілді. Егер шешулер көпбұрышы бос жиын болмаса және онда максаттык функция жоғарғы жағынан шектелген болса, онда мұндай нүкте табылады. Көпбұрыштың бір төбесінде мақсаттық функцияның максимум мәні бар. Осы ізделінді төбені табу үшін белгілі бір тұракты h үшін шешулер көпбұрышы аркылы өтетін деңгейлік $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ сызығын саламыз. Сөйтіп оны $\bar{C} = (c_1; c_2)$ векторының бағыты бойынша шешулер көпбұрышының шеткі нүктесінен өткенше козғаймыз. Табылған нүктенің координаттары СП есебінің тиімді жоспарын аныктайды. Кейде мақсаттық функцияның максимум мәні бір нүктеде емес, белгілі бір кесіндінің барлық нүктелерінде табылуы мүмкін.

Ескерту. Егер максаттык функция шешулер көпбұрышында шектелмеген болса немесе СП есебінің шектеулер жүйесі өзара үйлесімсіз болса, онда есептің шешуі болмайды.

Максаттық функцияның минимумын табу үшін деңгейлік $c_1x_1 + c_2x_2 = h$ сызығын $\bar{C} = (c_1; c_2)$ векторына карама карсы бағытта козғаймыз.

Практикалық сабақ
Сызықтық программалау есептерін геометриялық әдіспен шешу.

Мысал. Кәсіпорында A және B өнімдерін өндіру үшін үш түрлі шикізат қолданылады. Бір өнімге қажет шикізат нормасы кестеде берілген. Сонымен бірге мұнда әр түрлі өнімнің бір бірлігін сатқандағы кәсіпорынның пайдасы мен шикізаттардың қоры көрсетілген.

Шикізат түрі	**Бір өнімге қажет (кг) шикізат нормасы**		**Шикізат қоры (кг)**
	A	*B*	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Бір өнімнің пайдасы (теңге)	30	40	

A және B өнімдерін қанша данадан өндіргенде табыс барынша көп болады?

Кәсіпорын A өнімінен x_1 дана, B өнімінен x_2 дана өндіреді дейік. Өнім өндіру қолда бар шикізаттың көлемімен шектеледі және өндірілетін өнімдер саны теріс болмайды. Демек, мына теңсіздіктер

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \leq 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \leq 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \leq 252, \end{cases}$$
$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$

жүйесі орынды. Өндірілген өнімдерді сатудан түскен жалпы табыс

$$F = 30x_1 + 40x_2$$

болады.

Демек, келесі математикалық есепті алдық: берілген жүйенің теріс емес шешулерінің ішінен мақсаттық F функциясының максимумын қамтамасыз ететін шешуін табу керек.

Қойылған есептің ізделінді шешуін геометриялық әдіспен анықтайық. Алдымен шешулер көпбұрышын анықтайық. Ол үшін СП есебінің берілгендері бойынша мына түзулер

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, & (II) \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, & (III) \\ x_1 = 0, & (IV) \\ x_2 = 0 & (V) \end{cases}$$

жиынын табамыз. Әрбір түзу жазықтықты екі жарты жазықтыққа бөледі. Сол жарты жазықтықтардың біреуін, яғни бастапқы теңсіздікті қанағаттандыратын бөлігін таңдап аламыз. Мысалы, $12x_1 + 4x_2 \prec 300$ теңсіздігін қанағаттандыратын жарты жазықтықты қалай табады? $O(0,0)$ нүктесінің координаттары $12 \cdot 0 + 4 \cdot 0 \prec 300$ теңсіздігін қанағаттандырады. Демек, $O(0,0)$ нүктесін өзінде ұстап тұрған жарты жазықтық (I) түзуден пайда болған ізделінді жарты жазықтық. Сол сияқты $(II), (III), (IV), (V)$ түзулерден туындаған жарты жазықтықтарды бастапқы бір жазықтыққа бейнелейміз. Сонда шешулер көпбұрышы $OABCD$ бесбұрышы болады.

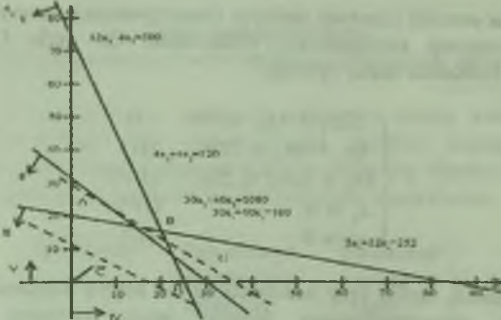
Енді F мақсаттық функциясының максимумын қамтамасыз ететін $OABCD$ бесбұрышының нүктесін табуымыз керек. Ол үшін $\vec{C} = (30;40)$ векторы мен $30x_1 + 40x_2 = h$ сызығын саламыз, мұндағы h дегеніміз $30x_1 + 40x_2 = h$ сызығы шешулер көпбұрышы арқылы өтетіндей тұрақты сан. Енді осы сызықты $\vec{C}$ векторының бағытымен параллель қозғаймыз. Осы сызықтың шешулер көпбұрышымен қиылысатын соңғы нүктесінің координаттары берілген СП есебінің тиімді жоспарын анықтайды.

Ізделінді нүкте $(II), (III)$ түзулерінің қиылысуынан пайда болды, яғни оның координаттары

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 = 300, & (I) \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, & (II) \end{cases}$$

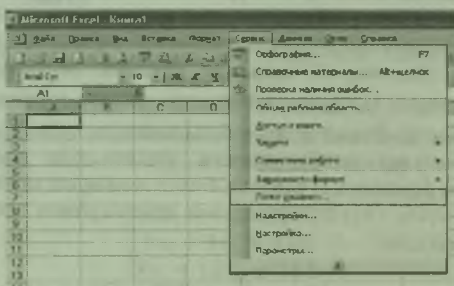
теңдеулер жүйесін қанағаттандырады. Бұл жүйені шешіп, $x_1^* = 12$, $x_2^* = 18$ екенін көреміз. Демек, A өнімінен 12 дана, B өнімінен 18 дана өндіру керек, сонда табыс барынша көп болады:

$$F_{max} = 30 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 1080 \text{ теңге.}$$



Лабораториялық сабақ
Сызықтық программалау есептерін MS Excel көмегімен шешу.

Сызықтық программалау есептерін MS Excel-де шешу үшін бас мәзірдегі **«Сервис» пунктінен** шақырылатын, **«Шешімді іздеу»** қондырма бөлімі (надстройка) қолданылады.

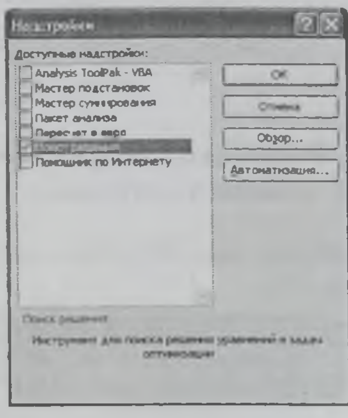


Егер сіздің компьютерде орнатылған Excel-дің нұсқасында **«Сервис»** мәзірі болмаса, онда «**қондырма бөлімі (надстройка)**» мәзір пунктін шақырып және қосымша модульдердің көрсетілген тізімінде **«Шешімді іздеу (Поиск решения)»** таңдау керек. Жоғарыдағы есепті шешіп көрелік.

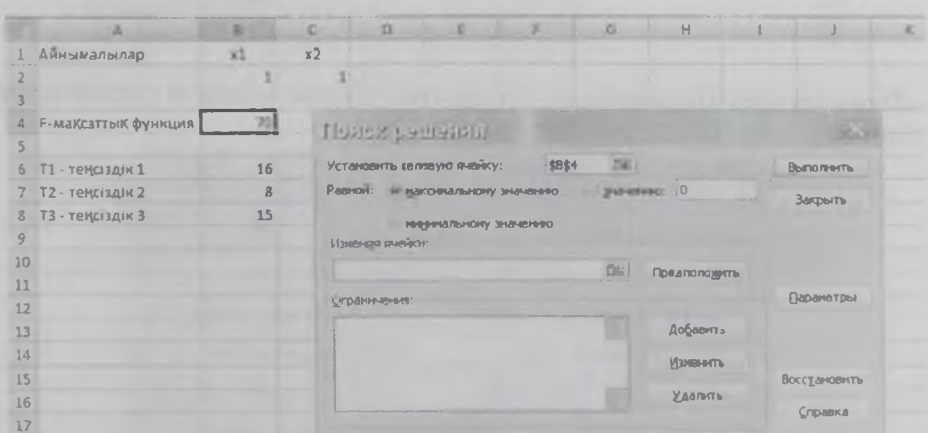
$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0$$
$$F = 30x_1 + 40x_2$$

Excel-де төменде көрсетілгендей шаблон құрамыз:

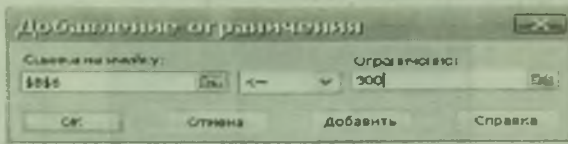


Осы кондырма бөлімнің (надстройка) колданылуын мысал аркылы карастырайық. Оның көмегімен математикалык моделі мына түрде болатын есепті шешеміз.

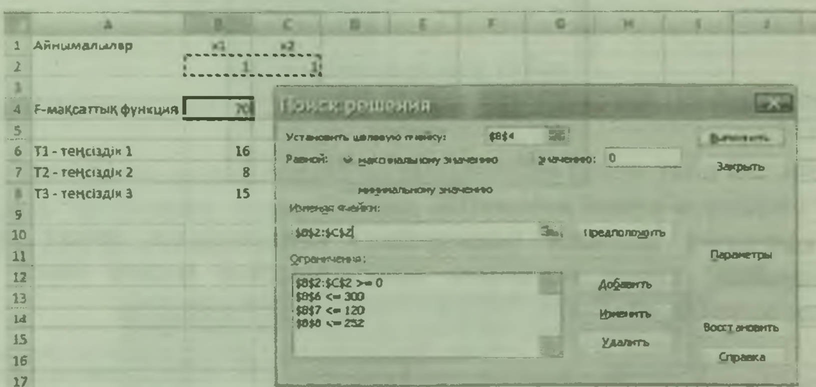


Әр ұяшыкка ұмытып калмас үшін функция аттарын және формулалаларын тереміз. Қалай терілетіндігі келесі СП есептерін симплекс кесте аркылы шешу такырыбында кездеседі:

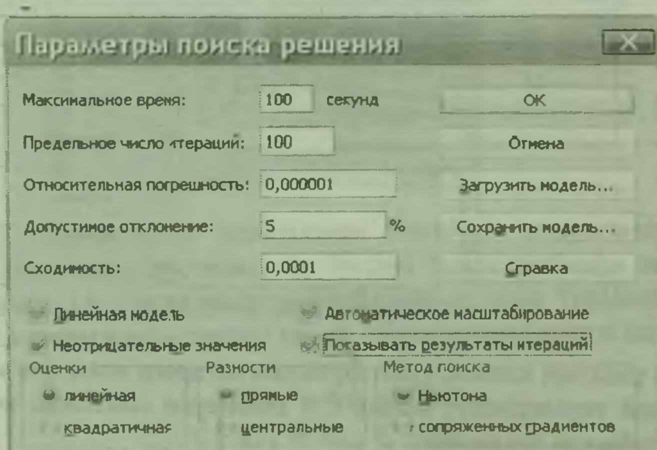
«**Ұяшыққа сілтеме-Ссылка на ячейку**» дегенге, біртіндеп В6, В7 және В8-дерді енгізе бастаймыз. Мәселен, В6 енгізгеннен соң мынадай бейне терезені аламыз.



«**Қосымша-Добавить**» батырмасын басқаннан соң алдыңғыдай бейне терезе көрінеді. Оған В7, соңынан В8 енгіземіз.



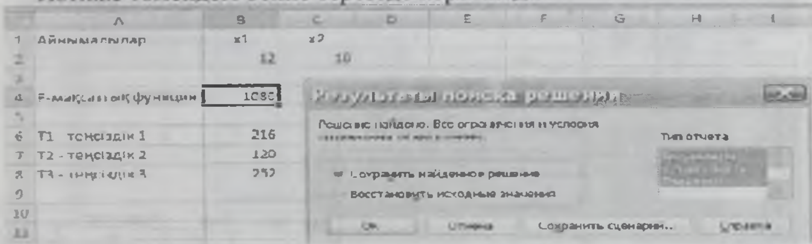
«**Параметрлер-Параметры**» батырмасын бассақ мынадай терезе пайда болады.



Осы бейне терезедегі **«Сызықтық модель-Линейная модель»** деген ұяшықта «жалауша» болуы тиіс, болмаса оны қондыру қажет. Сонан соң **«Жарайды-Ок»**-ді басамыз. Алғашқы бейне терезе шығады.

Есептеу процедурасының барлығы аяқталды. Енді тек **«Орында-Выполнить»** деген батырманы басып, бұйрықты орындау қажет.

Нәтиже төмендегі бейне терезеде көрсетілді.



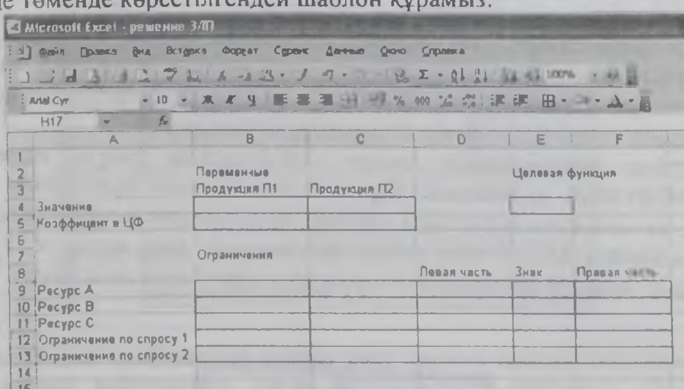
Тиімділеу есебінің шешімдері B2:F2 ұяшықтарда жазылған. Функцияның максимум мәні F=1080 теңге. Ол B4 ұяшықта жазылған.

Мысал-2.

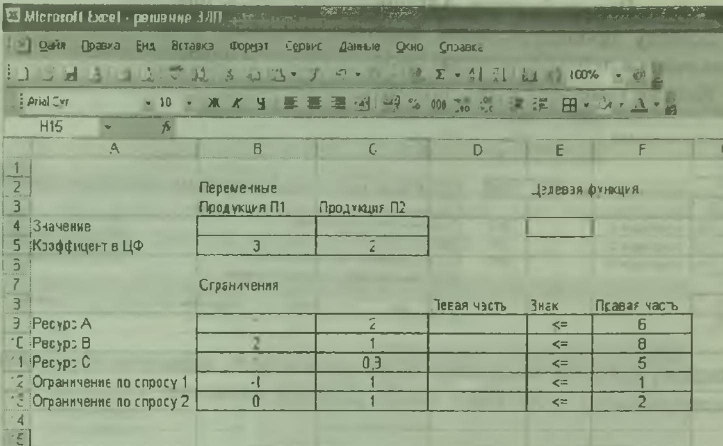
$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 \rightarrow max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ 2x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 + 0{,}8x_2 \leq 5 \\ -x_1 + x_2 \leq 1 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Excel-де төменде көрсетілгендей шаблон құрамыз:



Енді берілген сандық мәліметтерді есепке енгіземіз



Microsoft Excel - решение ЗЛП

Файл Правка Вид Вставка Формат Сервис Данные Окно Справка

H15

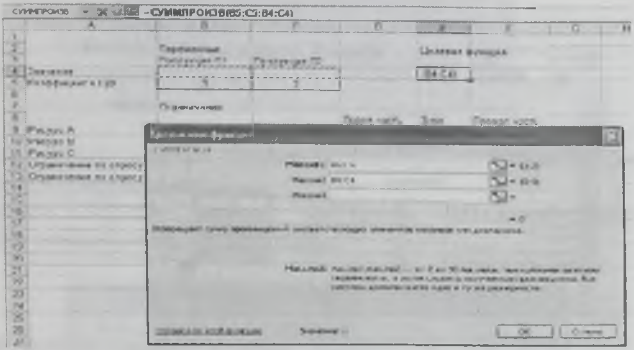
	A	B	C	D	E	F
1						
2		Переменные			Целевая функция	
3		Продукция П1	Продукция П2			
4	Значение					
5	Коэффицент в ЦФ	3	2			
6						
7		Ограничения				
8				Левая часть	Знак	Правая часть
9	Ресурс A	[illegible]	2		<=	6
10	Ресурс B	2	1		<=	8
11	Ресурс C	[illegible]	0,3		<=	5
12	Ограничение по спросу 1	-1	1		<=	1
13	Ограничение по спросу 2	0	1		<=	2
14						
15						

Белгіленген бос торларға (мақсаттық функцияның және теңсіздіктің сол жақ мәндері) байланыстарды және жұмыс парағындағы сандар арасындағы қатынасты суреттейтін формулаларды енгізу қажет.

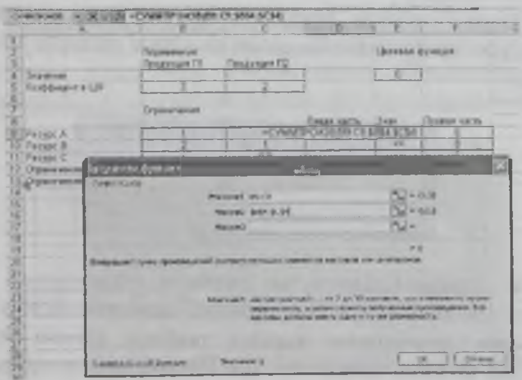
В4-С4 торлары Excel-де өзгермелі (біздің моделімізде бұл белгісіз айнымалылар) деп аталады, яғни олардың **Шешімдерін іздеулерін** өзгерте отырып, мақсаттық функцияның оптимальді мәнін табады. Бұл торларға бастапқыда енгізілетін мәндер, әдетте нөлдер (толтырылмаған торлар өздігінен нөлдік емес мәндері бар торлар ретінде болады).

Енді формулаларды енгізу қажет. Біздің бұл математикалық модельде, мақсаттық функция коэффициенттер векторының белгісіздер векторына көбейтіндісі. Шынында да, $3x_1 + 2x_2$ өрнегін (3,2) векторының (x_1, x_2) векторына көбейтіндісі ретінде қарастыруға болады.

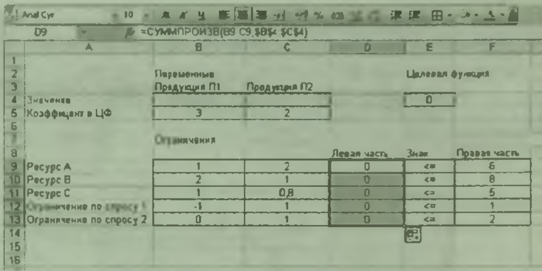
Excel-де векторлардың скаляр көбейтіндісін табуға көмектесетін СУММПРОИЗВ функциясы бар. Е4 торына осы функцияны шақыру керек, ал көбейту векторлары ретінде теңдеулердің коэффициенттерінен (бұл жағдайда В5:С5) және шешу нәтижесінде қою керек, x_1, x_2 (В4:С4 торлары) мәндері орналасатын торлардың адрестерін орнатамыз.



Шектеудің әрбір сол жағы екі вектордың көбейтіндісін береді: шығынның матрицасының жолы мен белгісіздер векторы. Яғни, x_1+2x_2 (бірінші шектеу үшін $x_1 + 2x_2 \leq 6$) өрнегін (1,2) коэффициенттер векторы мен әзір айнымалы болып тұрған (x_1, x_2) векторының көбейтіндісі ретінде қарастырамыз. бірінші шектеудің сол бөлігінің формуласы үшін бөлінген торда (D4), **СУММПРОИЗВ** функциясын шақырамыз. Көбейтілетін векторлар адрестері негізінде коэффициенттер жолының адресін B9:C9 және айнымалылар мәндері адресін B4:C4 енгіземіз.



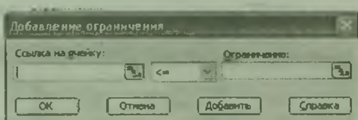
«Сол жақ бөлік» графасының қалған төрт торына шығын матрицасының сәйкес жолын пайдаланып, ұқсас формулаларды енгіземіз. Енгізілген формулалалары бар экранның бөлігі төменде көрсетілген:



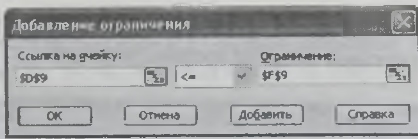
Жұмыс парағында **«Шешімді іздеу»** сервисін шақыру кезінде есеппен бірге шектеудің сол жақ бөлігі үшін формулалар және мақсаттық функцияның мәні үшін формула енуі қажет.

Сервис мәзірінен **«Шешімді іздеу-Поиск решения»** таңдаймыз. Пайда болған терезеде келесі мәліметті қоямыз:

- Мақсаттық тор ретінде Е4 мақсаттық функциясының мәні үшін тордың адресін орнатамыз;
- «жалаушаны» «максимум мән» нұсқасына орнатамыз, себебі бұл жағдайда мақсаттық функцияның максимумы ізделінеді.
- Өзгеретін торлар ретінде B4:C4 айнымалылар мәні жолдарының адресі жазылады;
- Шектеулерді енгізуге арналған терезенің оң жағынан **«Енгізу-Добавить»** батырмасын басамыз, шектеуді енгізуге арналған форма шығады;

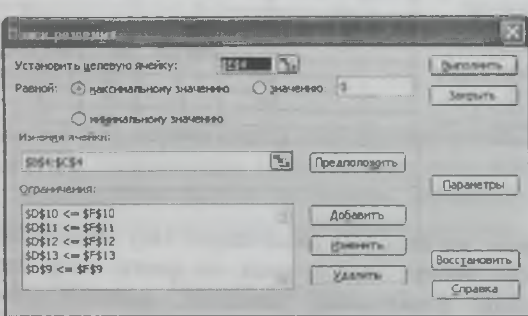


- **«Торға сілтеме-Ссылка на ячейку»** формасының сол бөлігіне бірінші D9 шектеудің сол бөлігіне арналған формуланың адресі жазылады, теңсіздіктің керекті таңбасы (біздің жағдайда <=), **«Шектеу-Ограничение»** өрісіне F9 шектеуінің оң жағына нұсқау енгізіледі;

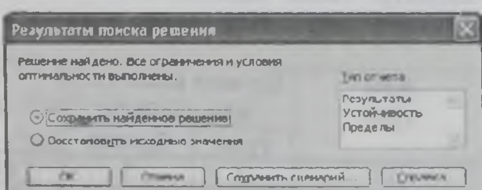


- Сол сияқты есептің барлық шектеулері енгізіледі, сосын **«Ок»** батырмасы басылады;

Сонымен, барлық мәлімет енгізілген **«Шешімді іздеу-Поиск решения»** терезесі мына түрде болады:

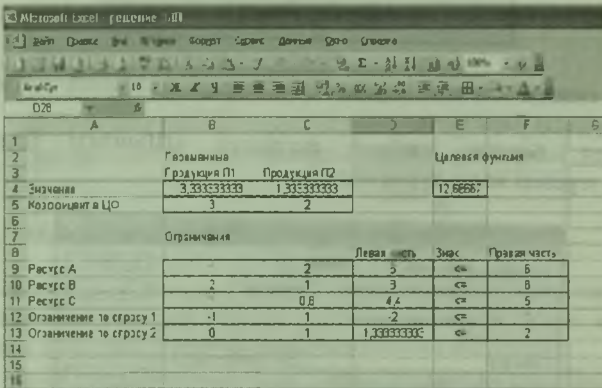


Әрі қарай **«Параметрлер-Параметры»** батырмасын басып, **«Сызықтық модель-Линейная модель»** және **«Теріс емес мәндер-Неотрицательные значения»** «жалаушаларын» орнату керек, себебі бұл жағдайда есеп сызықтық программалау есебі болады. Ал шектеулер айнымалылардың теріс емес болуын талап етеді. Сосын **«Ок»**, **«Орындау-Выполнить»** батырмасы басылады, сосын шешімдердің нәтижесі терезесі шығады.



Егер барлық әрекеттердің соңғы нәтижесінде **«Шешім табылды-Решенне найдено»** хабарламасымен терезе шықса, онда есеп берудің үш түрін алуға болады. Олар модельдің сезгіштігіне талдау жасағанда қажет.

Бұл мысалда табылған шешімді **«Ок»** батырмасын басу арқылы сақтап қою жеткілікті. Нәтижесінде есептің шешімі алынды.



Егер есепті шешу нәтижесінде шешімдерін табу мүмкін еместігі туралы хабарламасы бар терезе шықса, онда ол есепті жазу барысында қате (шектеулер үшін формулалар толмаған, максимизацияның немесе минимизацияның жалаушалары дұрыс қойылмаған және т.б.) кетті деген сөз.

Тапсырмалар

Тапсырма №1: Аң өсіру фермасында түлкі мен бұлғын бағылады. Оларды қалыпты жағдайда өсіру үшін үш түрлі жем пайдаланылды. Әрбір аңның жақсы өсуіне қажетті жемнің рационы кестеде келтірілген. Сол сияқты мұнда әр жемнің қолда бар қоры, аңның терісін өткізуден түсетін табыс мөлшері берілген. Табыс барынша көп болуы үшін қанша түлкі және бұлғын өсіру қажет?

Жем түрі	Бір аңға қажет (кг) жем нормасы		Жем қоры (кг)
	түлкі	бұлғын	
I	2	3	$180+6n$
II	4	1	$240+4n$
III	6	7	$426+2n$
Бір аң терісінің пайдасы (теңге)	16	12	n – студенттің жеке нөмірі

Тапсырма №2. Екі түрлі P_1 и P_2 бұйым дайындау үшін үш түрлі шикізат қолданады: S_1, S_2, S_3. Есептің басқа да шарттары келесі кестеде көрсетілген:

Шикізат түрі	Бір бұйымға қажет (кг) шикізат нормасы		Шикізат қоры (кг)
	P_1	P_2	
S_1	2	5	20+6n
S_2	8	5	40+4n
S_3	5	6	30+2n
Бір бұйымның пайдасы (теңге)	50	40	n – студенттің жеке нөмірі

Табыс барынша көп болуы үшін қанша өнім шығару қажет?

Тапсырма №3. Трикотажды зауыт жемпір мен көйлек тігу үшін тоқыма мата, силикон және нитрон қолданады. Бұлардың қоры 820, 430 және 310 кг. Есептің қалған шарттары кестеде көрсетілген:

Шикізат түрлері	Шығын нормасы		Қор
	Жемпірлер	Көйлектер	
Тоқыма мата	0,4	0,2	820+6n
Силикон	0,2	0,1	430+4n
Нитрон	0,1	0,1	310+2n
Пайдасы	7,8	5,6	n – студенттің жеке нөмірі

Кіріс максимум болатындай бұйымды өндіру жоспарын анықтау қажет.

Тапсырма №4.

$$f = 5x_1 - 3x_2 \to min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \geq 6 + n, \\ 2x_1 - 3x_2 \geq -6 + 2n, \\ x_1 - x_2 \leq 4 + 3n, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тапсырма №5.

$f = x_1 + 2x_2 \to max$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \geq -9 + 2n, \\ 3x_1 + 4x_2 \geq 27 + n, \\ 2x_1 + x_2 \leq 14 + 2n, \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тапсырма №6.

$f = 2x_1 - 4x_2 \to max$

$$\begin{cases} 8x_1 - 5x_2 \leq 16 + n, \\ x_1 + 3x_2 \leq 2 + 2n, \\ 2x_1 + 7x_2 \geq 9 + 3n, \\ 4x_1 + 7x_2 \leq 28, \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тапсырма №7.

$f = -12 + 6x_1 - x_2 \to min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 15 \geq 0 + n, \\ x_1 \leq 10 + 2n, \\ 4x_1 + x_2 \geq -2 + 3n, \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тапсырма №8.

$f = x_1 + 2x_2 + 3 \to max$

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 8 + n, \\ 2x_1 + x_2 \leq 10 + 2n, \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тапсырма №9.

$f = -2x_1 - x_2 \to max, min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 1 + n, \\ 3x_1 - x_2 \geq -1 + 2n, \\ x_1 - 4x_2 \leq 2 + 3n \\ x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0. \end{cases}$$

§4. Азғындалмаған сызықтық программалау есебін симплекс-таблица әдісімен шешу.

СП есебінің жалпы қойылымы: сызықтық

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \qquad (1)$$

функцияның максимумы немесе минимумы сызықтық

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \quad (i = \overline{1,k}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \quad (i = \overline{k+1,m}), \qquad (3)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = \overline{1,l}, l \le n) \qquad (4)$$

теңсіздіктер мен теңдеулерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді, мұндағы a_{ij}, b_i, c_j берілген нақты сандар және $k \le m$. Қарастылған (1) функцияны (1)-(4) есебінің мақсаттық функциясы, ал (2)-(4) шарттарды осы есептің шектеулері деп атайды. СП есебінің стандарттық (симметриялық) қойылымы: (1) функцияның максимумы (2) $(k = m)$ және (4) $(l = n)$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді.

СП есебінің канондық (негізгі) қойылымы: (1) функцияның максимумы (3) $(k = 0)$ теңдеулер мен (4) $(l = n)$ теңсіздіктерді қанағаттандыратын шешулер жиынында ізделінеді.

Есептегі (2)-(4) шарттарды қанағаттандыратын $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$ сандар жиынын есептің мүмкін шешулері немесе жоспары деп атайды. Мақсаттық (1) функцияның максимумын не минимумын қамтамасыз ететін $X^* = (x_1^*; x_2^*; ...; x_n^*)$ жоспарын тиімді жоспар деп атайды.

СП есебінің жалпы, стандарттық және канондық қойылымдары бір біріне түрленеді. СП есебін шешу әдістері канондық қойылым үшін баяндалады. Егер $\min F = -\max(-F)$ екенін ескерсек, онда мақсаттық F функциясының минимумының орнына $-F$ функциясының максимумын іздейді.

Егер $C \cdot X$ деп $C = (c_1; c_2; ...; c_n)$, $X = (x_1; x_2; ...; x_n)$ векторларының векторлық көбейтіндісін белгілесек, онда мақсаттық функцияны $F = C \cdot X$ деп жазуға болады. СП есебінің векторлық формада жазылған канондық қойылымы: мақсаттық

$$F = C \cdot X \qquad (5)$$

функциясының максимумы

$$x_1 P_1 + x_2 P_2 + ... + x_n P_n = P_0, \qquad (6)$$

$$X \ge 0 \qquad (7)$$

шарттары орындалған жағдайда ізделінеді. Бұл есептегі келесі

$$P_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \dots\\a_{m1}\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \dots\\a_{m2}\end{pmatrix},\ \dots,\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \dots\\a_{mn}\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \dots\\b_m\end{pmatrix}$$

векторлар теңдеулер системасындағы белгісіз айнымалылар жанындағы коэффициенттер мен бос мүшелерден тұратын m өлшемді вектор-бағандар.

Егер (6) формуладағы оң мәнді x_j коэффициенттерінің жанындағы P_j векторлар системасы өзара сызықтық тәуелсіз болса, онда $X=(x_1;x_2,...;x_n)$ жоспарын тірек жоспары деп атайды. P_j векторларының оң мәнді компоненттерінің санын k деп белгілейік. P_j векторлары m өлшемді векторлар болғандықтан $k\le m$. Егер тірек жоспарында $k=m$ ($k\prec m$) болса, онда тірек жоспарын азғындалмаған (азғындалған) тірек жоспары деп атайды. СП есебінің бастапқы тірек жоспары азғындалмаған (азғындалған) болса, онда бұл есепті симплекс-таблица (жасанды базис) әдісімен шешеді.

Егер (6) формуладағы алғашқы $P_1,P_2,...,P_m$ векторлары бірлік векторлар болса, онда $b_1P_1+b_2P_2+...+b_mP_m=P_0$ болғандықтан $X=(b_1;b_2;...;b_m;0;...;0)$ жоспары азғындалмаған тірек жоспарын құрайды. Бұл тірек жоспары m өлшемді кеңістікте базис құрайтын $P_1,P_2,...,P_m$ бірлік векторларымен анықталды. Сондықтан $P_1,P_2,...,P_n,P_0$ векторларының кез келгені базистік векторлардың сызықтық комбинациясы болады.

Енді

$$z_j=\sum_{i=1}^{m}c_ix_{ij}\ ,\ \Delta_j=z_j-c_j\quad (j=\overline{1,n}) \tag{8}$$

дейік. Тірек жоспарының тиімділігінің белгісі: егер кез келген $j=\overline{1,n}$ үшін $\Delta_j\ge 0$ болса, онда (5)-(7) есебінің $X^*=(x_1^*;x_2^*;...;x_m^*;0;...;0)$ тірек жоспары тиімді жоспар болады.

Егер (5)-(7) есебінің азғындалмаған X тірек жоспары бар және $\Delta_k\prec 0$ үшін кейбір $a_{ik}\succ 0$ болса, онда $F(X')\succ F(X)$ шартты қанағаттандыратын X' тірек жоспары табылады. Егер $\Delta_k\prec 0$ үшін барлық $a_{ik}\le 0$ болса, онда (5)-(7) есебінің мақсаттық функциясы жоғарғы жағынан шектелмеген, яғни оның максимум мәні жоқ. Есептің бастапқы берілгендері кестеге жазылады:

i	Базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	...	P_m	P_{m+1}	...	P_n
				c_1	c_2	...	c_m	c_{m+1}	...	c_n
1	P_1	c_1	b_1	1	0	...	0	a_{1m+1}	...	a_{1n}
2	P_2	c_2	b_2	0	1	...	0	a_{2m+1}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...	...
m	P_m	c_m	b_m	0	0	...	1	a_{mm+1}	...	a_{mn}
$m+1$			F_0	0	0	...	0	Δ_{m+1}	...	Δ_n

Кестенің $C_б$ бағанына базистік векторлардың индексіндей индексі бар максаттық функция айнымалыларының коэффициенттері жазылады.

Кестенің P_0 бағанына бастапқы тірек жоспарының теріс емес компоненттері жазылады. Кестенің P_j бағандарына осы векторлардың базистік векторлары бойынша жіктелуінің коэффициенттері жазылады.

Кестенің алғашқы m жолы СП есебінің бастапқы мәліметтерінен алынса, соңғы $m+1$ жолындағы мәліметтер есептелініп анықталады. Атап айтқанда,

$$F_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i = C_б \cdot P_0 \,,\ z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij} = C_б \cdot P_j \,,\ \Delta_j = z_j - c_j \quad (j = \overline{1,n}).$$

Кесте толтырылғасын бастапқы $X = (b_1; b_2; ...; b_m; 0; ...; 0)$ тірек жоспарының тиімділігі зерттеледі. Бұл үшін кестенің $m+1$ жолы қаралады. Келесі үш жағдайдың біреуі орын алуы мүмкін:

1) кез келген $j = \overline{1,n}$ үшін $\Delta_j \geq 0$;

2) белгілі бір j үшін $\Delta_j \prec 0$ және барлық $a_{ij} \leq 0 \quad (i = \overline{1,n})$;

3) белгілі бір j үшін $\Delta_j \prec 0$ және кемінде бір $a_{ij} \succ 0$.

Бірінші жағдайда тірек жоспарының тиімділігінің белгісі бойынша тірек жоспары тиімді болады. Екінші жағдайда максаттық функция жоспарлар жиынында жоғарғы жағынан шектелмеген. Үшінші жағдайда бастапқы тірек жоспарынан максаттық функцияның мәнін өсіретін жаңа тірек жоспарына көшуге болады.

Практикалық сабақ
Азғындалмаған сызықтық программалау есебін симплекс-таблица әдісімен шешу.

Мысал. Кәсіпорын үш түрлі (A, B, C) өнім дайындау үшін үш түрлі (I, II, III) шикізат колданады. Әр түрлі өнімнің бір данасына жұмсалатын шикізат түрлерінің шығыны, A, B, C өнімінің бір данасының бағасы, кәсіпорындағы шикізат коры кестеде берілген.

Шикізат түрі	Бір өнімге жұмсалатын шикізат шығынының нормасы (кг)			Шикізаттың қоры (кг)
	A	B	C	
I	18	15	12	360
II	6	4	8	192
III	5	3	3	180
Бір өнімнің бағасы (мың $\overline{T}$)	9	10	16	

Барынша көп табыс табу үшін кәсіпорын қанша A, B, C өнімдерін дайындау керек?

Алдымен экономикалық есептің математикалық моделін анықтайды. Егер кәсіпорын өндіретін A, B, C өнімдерінің санын сәйкесінше x_1, x_2, x_3 деп белгілесек, онда айнымалылар есептің мазмұны бойынша мына теңсіздіктерді канағаттандырады:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180 \end{cases} \qquad (9)$$

Есептің экономикалық мазмұнына сәйкес бұл айнымалылар теріс емес мәндер ғана қабылдайды:

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0. \qquad (10)$$

Кәсіпорынның өндірген өнімдерінің жалпы құны

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3 \qquad (11)$$

болады. Сонымен (9) теңсіздіктер системасының теріс емес шешулерінің ішінен (11) функцияның максимумын қамтамасыз ететін шешуін табу керек.

Берілген есептің канондық (негізгі) қойылымын қарастыру үшін жаңа x_4, x_5, x_6 айнымалылар көмегімен (9) теңсіздіктер системасын келесі теңдеулер системасы ретінде жазамыз:

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 + x_4 = 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 + x_5 = 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_6 = 180 \end{cases}$$

Жаңа айнымалылар шикізат түрлерінің өнім өндіру кезінде қолданылмай қалған калдыктарын білдіретіндіктен

$$x_4 \ge 0, \qquad x_5 \ge 0, \qquad x_6 \ge 0$$

екені түсінікті.

Соңғы теңдеулер системасын векторлық формада былай

$$x_1P_1 + x_2P_2 + x_3P_3 + x_4P_4 + x_5P_5 + x_6P_6 = P_0$$

жазамыз, мұнда

$$P_1 = \begin{pmatrix} 18 \\ 6 \\ 5 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 15 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 12 \\ 8 \\ 3 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_0 = \begin{pmatrix} 360 \\ 192 \\ 180 \end{pmatrix}.$$

Бұлардың ішінде бірлік (P_4, P_5, P_6) векторлардың саны $l = 3$. Сондықтан бастапқы $X = (0;0;0;360;192;180)$ тірек жоспары үш өлшемді кеңістіктің базисі болып табылатын бірлік (P_4, P_5, P_6) векторлармен анықталады.

1-кестенің алғашқы үш жолын толтырғасын (8) формуланың көмегімен төртінші жолдағы мәліметтерді анықтаймыз.

$$C_б = (0;0;0),\ P_0 = (360;192;180),$$
$$F_0 = C_б \cdot P_0 = 0 \cdot 360 + 0 \cdot 192 + 0 \cdot 180 = 0,$$
$$\Delta_1 = z_1 - c_1 = C_б \cdot P_1 = 0 \cdot 18 + 0 \cdot 6 + 0 \cdot 5 - 9 = -9,$$
$$\Delta_2 = z_2 - c_2 = C_б \cdot P_2 = 0 \cdot 15 + 0 \cdot 4 + 0 \cdot 3 - 10 = -10,$$
$$\Delta_3 = z_3 - c_3 = C_б \cdot P_3 = 0 \cdot 12 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 3 - 16 = -16,$$
$$\Delta_4 = z_4 - c_4 = C_б \cdot P_4 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_5 = z_5 - c_5 = C_б \cdot P_5 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0,$$
$$\Delta_6 = z_6 - c_6 = C_б \cdot P_6 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

1-кесте

i	Базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				9	10	16	0	0	0
1	P_4	0	360	18	15	12	1	0	0
2	P_5	0	192	6	4	8	0	1	0
3	P_6	0	180	5	3	3	0	0	1
4			0	-9	-10	-16	0	0	0

Бастапқы $X = (0;0;0;360;192;180)$ тірек жоспары шикізат қоры өзгерусіз қалатын, ештеңе өндірілмеген жағдайға сәйкес келеді. Бұл жағдайда мақсаттық функция мәні $F = 0$ мың теңге. Өнім өндірудің мұндай жоспары тиімді болмайтыны белгілі. 1-кестедегі 4 жолда теріс сандар

$$\Delta_1 = -9 < 0,\ \Delta_2 = -10 < 0,\ \Delta_3 = -16 < 0$$

бар болғандықтан бастапқы тірек жоспары тиімді емес. Осы теріс сандар өндірілген өнімнің жалпы құнын ұлғайтуға болатынын ғана көрсетпейді, сонымен бірге әр түрлі өнімнің қосымша бір данасын жасағанда жалпы құнның қалай өсетінін де анықтайды. Мысалы, $\Delta_1 = -9 \prec 0$ дегеніміз өндіріс жоспарына А өнімінің бір данасын қосқанда жалпы құн 9 мың теңгеге өсетінін білдіреді. Сол сияқты $\Delta_2 = -10 \prec 0$, $\Delta_3 = -16 \prec 0$ дегеніміз өндіріс жоспарына В, С өнімдерінің бір данасын қосқанда жалпы құн сәйкесінше 10 мың және 16 мың теңгеге өсетінін анықтап береді. Олай болса, экономикалық тұрғыдан өндіріс жоспарына С өнімін қосу тиімдірек.

Симплекс-таблица әдісі бойынша $\max(|-9|, |-10|, |-16|) = 16$ санды өзінде ұстайтын P_3 векторының бағаны бағыттаушы баған болады. Бағыттаушы бағандағы сандар $a_{13} = 12 \succ 0$, $a_{23} = 8 \succ 0$, $a_{33} = 3 \succ 0$, яғни мақсаттық функцияның мәнін өсіретіндей жаңа тірек жоспарына көшуге болады. Енді

$$\min\left(\frac{360}{12}; \frac{192}{8}; \frac{180}{3}\right) = \frac{192}{8}$$

екенін еске алып, P_5 жолы бағыттаушы жол болатынын анықтаймыз. Бағыттаушы баған мен бағыттаушы жолдың қиылысуындағы $a_{23} = 8$ санын шешуші элемент деп атайды. Экономикалық тұрғыдан алғанда $\frac{192}{8} = 24$ саны С өнімінен қанша дана дайындау керектігін көрсетеді.

Демек, базистен P_5 векторын шығарып, орнына P_3 векторын қоямыз. 2-кестеде P_3 жолындағы сандарды шешуші элементке бөлсек, P_3 бағанының басқа торларына 0 жазылады. Бұдан басқа бос торлар тік төртбұрыштар әдісімен толтырылады.

Атап айтқанда, 2-кестедегі толтырылуға тиіс тор үшін 1-кестедегі сәйкес тордағы санды анықтап аламыз. Негізгі диагональдің бір ұшында осы сан, екінші ұшында шешуші элемент тұратын тік төртбұрышты және қосалқы диагональдің ұштарындағы сандарды тауып аламыз. Негізгі диагональдің ұштарындағы сандардың көбейтіндісінен қосалқы диагональдің ұштарындағы сандардың көбейтіндісін алып тастап, шешуші элементке бөлеміз. Шыққан сан 2-кестедегі орнына жазылады. Мысалы, 2-кестедегі P_4 жолы мен P_0 бағанының қиылысуындағы бос торға сәйкес 1-кестедегі торда 360 саны бар. Негізгі диагональдің екінші ұшында (яғни P_5 жолы мен P_3 бағанының қиылысуында) шешуші элемент болып табылатын 8 саны тұр. Сонда осы тік төртбұрыштың қосалқы төбелерінде 192 және 12 сандары орналасқаны байқалады:

360	...	12
192	...	8

Олай болса, 2-кестедегі қарастырылған торға $\frac{360\cdot 8-192\cdot 12}{8}=72$ саны жазылады.

Сол сияқты 2-кестедегі P_4 жолы мен P_5 бағанының қиылысуындағы бос торға сәйкес 1-кестедегі торда 0 саны бар. Негізгі диагональдің екінші ұшында (яғни P_5 жолы мен P_3 бағанының қиылысуында) шешуші элемент болып табылатын 8 саны тұр. Сонда осы тіктөртбұрыштың қосалқы төбелерінде 12 және 1 сандары орналасқаны байқалады:

12	...	0
8	...	1

Демек, 2-кестедегі қарастырылған торға $\frac{0\cdot 8-1\cdot 12}{8}=-\frac{3}{2}$ саны жазылады. 2-кестедегі басқа бос торлар да осылай толтырылады.

2-кесте

i	*Базис*	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				9	10	16	0	0	0
1	P_4	0	72	9	9	0	1	-3/2	0
2	P_3	16	24	¾	1/2	1	0	1/8	0
3	P_6	0	108	11/4	3/2	0	0	-3/8	1
4			384	3	-2	0	0	2	0

2-кестеден жаңа $X=(0;0;24;72;0;108)$ тірек жоспары анықталады. Бұл жағдайда мақсаттық функция мәні $F=24\cdot 16=384$ мың теңге. Соңғы жолда теріс сан (P_2 бағанындағы -2) бар болғандықтан бұл тірек жоспары да тиімді емес. Бұл бағанда оң сандар бар болғандықтан тірек жоспарын мақсаттық функцияның мәні өсетіндей етіп жаңа тірек жоспарына көшуге болады (қ. 3-кесте).

3-кесте

i	*Базис*	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				9	10	16	0	0	0
1	P_2	10	8	1	1	0	1/9	-1/6	0
2	P_3	16	20	¼	0	1	-1/18	5/24	0
3	P_6	0	96	5/4	0	0	-1/6	-1/8	1
4			400	5	0	0	2/9	5/3	0

3-кестеден жаңа $X=(0;8;20;0;0;96)$ тірек жоспары анықталады. Бұл жағдайда мақсаттық функция мәні $F=8\cdot 10+20\cdot 16=400$ мың теңге.

Лабораториялық сабақ
Азғындалмаған сызықтық программалау есебін MS Excel арқылы шешу.

Мысал. Берілген СП есебін шешіңіздер.

$$\begin{cases} 18x_1 + 15x_2 + 12x_3 \le 360, \\ 6x_1 + 4x_2 + 8x_3 \le 192, \\ 5x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 180, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, x_2 \ge 0, x_3 \ge 0.$$

$$F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$$

Шешу жолы:
Есепті Excel-дегі **«Шешімдерді іздеу-Поиск решения»** аспаптық құралын пайдаланып шешеміз.
Excel парағын ашамыз.
1.Есептің белгісіздері x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 болады. Ұмытып калмас үшін ол белгісіздердің таңбаларын B1:F1 ұяшыктарға жазып коямыз. Белгісіздерге кез келген, теріс емес мәнді, мысалы, 1 мәнін берейік. Олар Excel парағының B2:F2 ұяшықтарына енгізілген.
2.Берілген $F = 9x_1 + 10x_2 + 16x_3$ максаттык функциясының осы нүктелердегі мәндерін есептейміз. Функцияның мәндері кандай ұяшыкта жазылғанын ұмытпас үшін A4 ұяшыққа арнаулы f(max) жұмыстык таңба қоямыз. Аргументтердің B2:F2 ұяшыктарға енгізілген мәндері бойына F функциясының мәндерін есептейміз. Олар B4 ұяшыкта жазылған:

$$= 9{*}B2 + 10{*}C2 + 16{*}D2$$

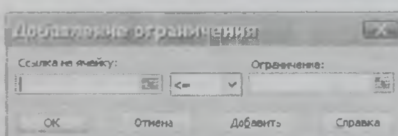
Біз осы ұяшыктағы есептеу нәтижесінде пайда болатын мәндердің ең үлкенін іздейміз.
1.A6:A9 диапазонға (Т1), (Т2), (Т3) деп пернетақта арқылы жазып қоямыз. Олардың әрқайсысы берілген шектеудің теңдеулерін білдіреді.
2.СП есебі шектеулерінің берілген B2:F2 нүктедегі мәндерін B6:B8 диапазондағы ұяшыктарда есептеп, енгізіп қоямыз.
3.Сонан соң бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис»**, **«Шешімдерді іздеу-Поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай бейне-терезе пайда болады.

«**Максаттык ұяшыкты орнат-Установить целевую ячейку**» деген ұяшыкка $B$4 жазамыз (негізінде тінтуірді-курсорды В4 ұяшыкка койсак, алдыңғы айтылған амал өзінен-өзі орындалады).

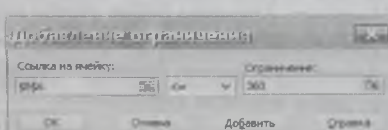
«**Тең-Равной**» катарда үш батырма бар. Біз «**Ең үлкен мән - максимальному значению**» деген батырманы басамыз.

«**Ұяшыктардың мәндерін өзгерту-Изменяя ячейки**» деген жолға мән жазу үшін тінтуірді В2-ге қойып Shift+F2 амалды орындаймыз. Нәтижеде бос жолакта $B$2:$F$2 деген жазу пайда болады.

«**Қосымша-Добавить**» батырмасын басканнан соң мынадай терезе пайда болады.

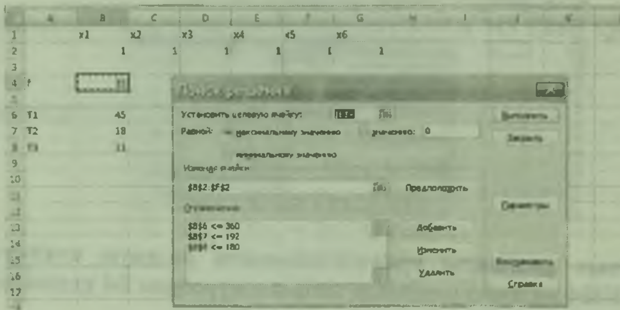


«**Ұяшыкка сілтеме-Ссылка на ячейку**» дегенге, біртіндеп В6, В7 және В8-дерді енгізе бастаймыз. Мәселен, В6 енгізгеннен соң мынадай бейне терезені аламыз.

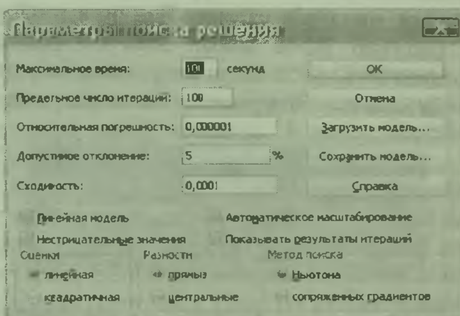


«**Қосымша-Добавить**» батырмасын басканнан соң алдыңғыдай бейне терезе көрінеді. Оған В7, соңынан В8 енгіземіз.

«**Жарайды-Ок**» батырмасын басканнан соң мынадай бейне терезе пайда болады.



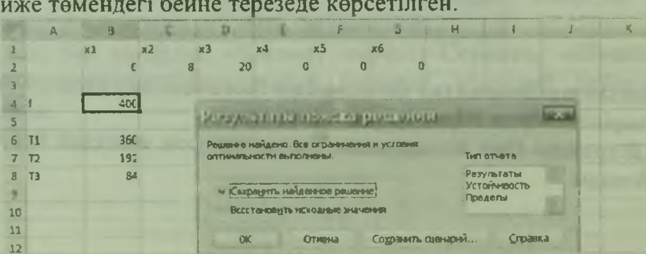
«Параметрлер - Параметры» батырмасын бассақ мынадай терезе пайда болады.



Осы бейне терезедегі **«Сызықтық модель-Линейная модель»** деген ұяшықта жалауша болуы тиіс, болмаса оны қондыру қажет. Сонан соң **«Жарайды-Ок»**-ді басамыз. Алғашқы бейне терезе шығады.

Есептеу процедурасының барлығы аяқталды. Енді тек **«Орында-Выполнить»** деген батырманы басып, бұйрықты орындау қажет.

Нәтиже төмендегі бейне терезеде көрсетілген.



Тиімділендіру есебінің шешімдері B2:F2 ұяшыктарда жазылған. Функцияның максимум мәні F=400 теңге. Ол B4 ұяшыкта жазылған.

Мысал. Берілген СП есебін шешіңіздер.

$$\begin{cases} 13x_1 + 15x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 80, \\ 9x_1 + 12x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 56, \\ 5x_1 + 7x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 37. \\ x_1, x_2 x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$F(x) = -2x_1 + x_2 + x_3 + 6 \to max$$

Шешу жолы:

Есепті Excel-дегі **«Шешімдерді іздеу-Поиск решения»** аспаптық құралын пайдаланып шешеміз.

Excel парағын ашамыз.

1. Есептің белгісіздері x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 болады. Ұмытып калмас үшін ол белгісіздердің таңбаларын B1:F1 ұяшықтарға жазып қоямыз. Белгісіздерге кез келген, теріс емес мәнін, мысалы, 1 мәнін берейік. Олар Excel парағының B2:F2 ұяшыктарына енгізілген.

2. Берілген $F(x) = -2x_1 + x_2 + x_3 + 6$ мақсаттык функциясының осы нүктелердегі мәндерін есептейміз. Функцияның мәндері қандай ұяшыкта жазылғанын ұмытпас үшін A4 ұяшыкка арнаулы f(max) жұмыстык таңба коямыз. Аргументтердің B2:F2 ұяшықтарга енгізілген мәндері бойына F функциясының мәндерін есептейміз. Олар B4 ұяшыкта жазылған:

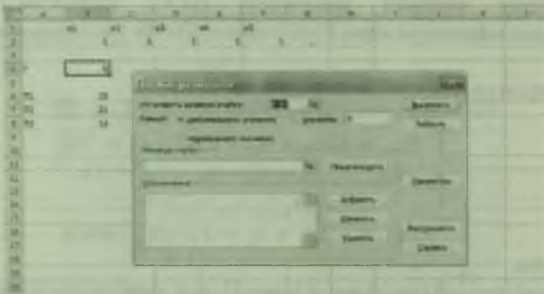
$$= -2{}^*B2 + C2 + D2 + 6$$

Біз осы ұяшыктағы есептеу нәтижесінде пайда болатын мәндердің ең үлкенін іздейміз.

3. A6:A9 диапазонға (T1), (T2), (T3) деп пернетакта аркылы жазып коямыз. Олардың әркайсысы берілген шектеудің теңдеулерін білдіреді.

4. СП есебі шектеулерінің берілген B2:F2 нүктедегі мәндерін B6:B8 диапазондағы ұяшыктарда есептеп, енгізіп коямыз.

5. Сонан соң бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис»**, **«Шешімдерді іздеу-Поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай бейне-терезе пайда болады.

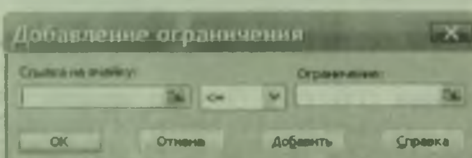


«**Максаттык ұяшыкты орнат-Установить целевую ячейку**» деген ұяшыкка $B$4 жазамыз (негізінде тінтуірді-курсорды B4 ұяшыкка койсак, алдыңғы айтылған амал өзінен-өзі орындалады).

«**Тең-Равной**» катарда үш батырма бар. Біз **«Ең үлкен мән-максимальному значению»** деген батырманы басамыз.

«**Ұяшыктардың мәндерін өзгерту-Изменяя ячейки**» деген жолакка мән жазу үшін тінтуірді B2-ге койып Shift+F2 амалды орындаймыз. Нәтижеде бос жолакта $B$2:$F$2 деген жазу пайда болады.

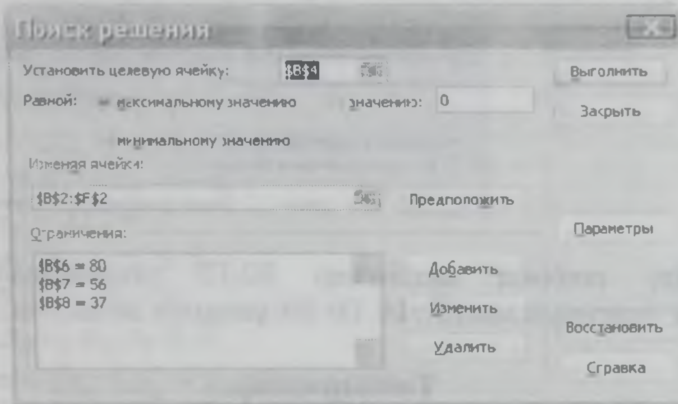
«**Косымша-Добавить**» батырмасын басканнан соң мынадай терезе пайда болады.



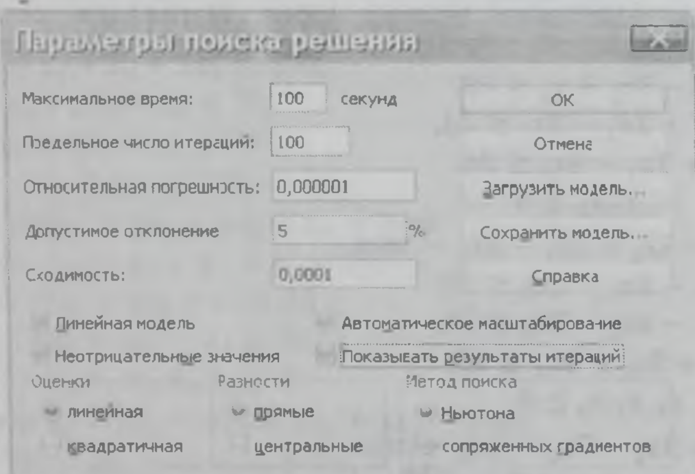
«**Ұяшыкка сілтеме-Ссылка на ячейку**» дегенге, біртіндеп B6, B7 және B8-дерді енгізе бастаймыз. Мәселен, B6 енгізгеннен соң мынадай бейне терезені аламыз.

«**Косымша-Добавить**» батырмасын басканнан соң алдыңғыдай бейне терезе көрінеді. Оған B7, соңынан B8 енгіземіз.

«**Жарайды-Ок**» батырмасын басканнан соң мынадай бейне терезе пайда болады.

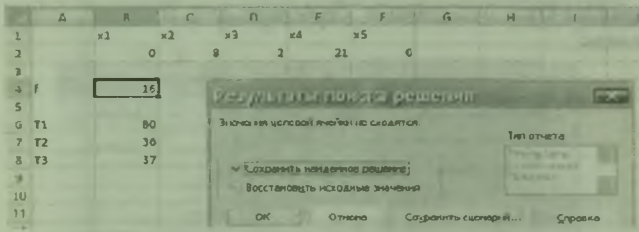


«Параметрлер - Параметры» батырмасын бассақ мынадай терезе пайда болады.



Осы бейне терезедегі **«Сызықтық модель-Линейная модель»** деген ұяшықта жалауша болуы тиіс, болмаса оны қондыру қажет. Сонан соң **«Жарайды-Ок»**-ді басамыз. Алғашқы бейне терезе шығады. Есептеу процедурасының барлығы аяқталды. Енді тек **«Орында-Выполнить»** деген батырманы басып, бұйрықты орындау қажет.

Нәтиже төмендегі бейне терезеде көрсетілген.



Тиімділендіру есебінің шешімдері B2:F2 ұяшыктарда жазылған. Функцияның максимум мәні F=16. Ол B4 ұяшыкта жазылған.

Тапсырмалар

Максаты: Теориялык материалды терең түсіну үшін сызыктык тиімділендірудің накты есептерін математикалык әдіспен шығарып үйрену кажет. Төменде көрсетілген СП есептерін симплекс - таблица және компьютерлік әдістермен шығару керек. Нәтижелері салыстырылып, талдау жасалады.

1. $$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \to \max.$$

2. $$\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to \min.$$

3. $$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \\ x_1, x_2 x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max.$$

4. $$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 + x_3 + 10x_4 \le 25, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + 5x_4 \le 10, \\ 10x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 5x_4 \le 26, \\ x_1, x_2 x_3, x_4 \ge 0 \\ x_1, x_2 x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -8x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 15x_4 \to \min.$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ -x_1 + 3x_3 \le 2, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 \le 4, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max.$$

6. $$\begin{cases} -2x_1 + x_4 + x_5 = -3, \\ x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 \le 5, \\ x_1 + x_2 \ge -3, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -2x_1 + x_2 - x_3 + x_5 \to \min.$$

7. $$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180, \\ 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210, \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_4 \le 800, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to \max.$$

8. $$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 \le 300, \\ x_1 + 2x_3 + x_4 \le 70, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 340, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 8x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 \to \max.$$

9. $$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 + x_5 = 18, \\ -2x_1 + 3x_3 + x_4 \ge 24, \\ -x_1 + 4x_2 - x_4 \ge 12, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 2x_4 + 3x_5 \to \max.$$

10. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 \ge 12, \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 5x_4 + x_5 = 30, \\ -x_1 + 3x_2 + 5x_3 + x_4 \ge 16, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \ge 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 5x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 2x_5 \to \max.$$

§5. Азғындалған сызықтық программалау есебін жасанды базис әдісімен шешу.

$C\cdot X$ деп $C=(c_1;c_2;...;c_n)$ және $X=(x_1;x_2,...;x_n)$ векторларының векторлық көбейтіндісін белгілейік. СП есебінің векторлық формада жазылған канондық қойылымы: мақсаттық

$$F=C\cdot X \tag{1}$$

функциясының максимумы

$$x_1P_1+x_2P_2+...+x_nP_n=P_0, \tag{2}$$

$$X\geq 0 \tag{3}$$

шарттары орындалғанда ізделінеді. Бұл есептегі

$$P_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\a_{21}\\ \text{---}\\a_{m1}\end{pmatrix},\ P_2=\begin{pmatrix}a_{12}\\a_{22}\\ \text{---}\\a_{m2}\end{pmatrix},\ ...,\ P_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\a_{2n}\\ \text{---}\\a_{mn}\end{pmatrix},\ P_0=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\ \text{---}\\b_m\end{pmatrix}$$

векторлар (2) системадағы белгісіз айнымалылардың коэффициенттері мен бос мүшелерінен тұратын m өлшемді вектор-бағандар, мұнда $b_i\geq 0$ $(i=\overline{1,m})$, $m\prec n$.

СП есебінің (2) теңдеулер системасындағы теңдеулер саны m. Ал P_j $(j=\overline{1,n})$ векторларының ішіндегі бірлік векторлар санын l дейік. Егер $l=m$ болса, онда СП есебін шешу үшін симплекс - таблица әдісі қолданылады. Ал егер $l\prec m$ болса, онда СП есебін шешу үшін жасанды базис әдісін қолданады.

СП (1)-(3) есебі үшін кеңейтілген есепті қарастырайық: мақсаттық

$$F=c_1x_1+c_2x_2+...+c_nx_n-Mx_{n+1}-...-Mx_{n+m} \tag{4}$$

функциясының максимумы

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+...+a_{1n}x_n+x_{n+1}=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+...+a_{2n}x_n+x_{n+2}=b_2,\\ \quad ....\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+...+a_{mn}x_n+x_{n+m}=b_m. \end{cases} \tag{5}$$

$$x_j\geq 0\ \ (j=\overline{1,n+m}) \tag{6}$$

шарттары орындалғанда ізделінеді, мұндағы M дегеніміз нақты мәні берілмеген жеткілікті үлкен оң сан. Кеңейтілген СП есебінде теңдеулер саны мен бірлік векторлар саны өзара тең болады.

Кеңейтілген (4)-(6) СП есебінің $X=(\underbrace{0;0;...;0}_{n\ \text{дана}};b_1;b_2;...;b_m)$ тірек жоспары m өлшемді кеңістіктің базисін құрайтын $P_{n+1},P_{n+2},...,P_{n+m}$ бірлік векторларымен анықталады. Бұл векторлар да жасанды x_{n+i} $(i=\overline{1,m})$ айнымалылары сияқты жасанды векторлар деп аталады. Тірек жоспары бар болғандықтан кеңітілген СП есебін симплекс – таблица әдісімен шешуге болады.

Егер кеңейтілген (4)-(6) СП есебінің тиімді $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*,x_{n+1}^*,...,x_{n+m}^*)$ жоспарында жасанды айнымалылардың мәні $x_{n+i}^*=0$ $(i=\overline{1,m})$ болса, онда (1)-(3) СП есебінің тиімді жоспары $X^*=(x_1^*,x_2^*,...,x_n^*)$ болады.

Кеңейтілген (4)-(6) СП есебінің $X=(\underbrace{0;0;...;0}_{n\ \text{дана}},b_1;b_2,...;b_m)$ тірек жоспары үшін мақсаттық функцияның мәні $F_0=-M\sum_{i=1}^{m}b_i$ және $\Delta_j=z_j-c_j=-M\sum_{i=1}^{m}a_{ij}-c_j$

Демек, F_0 мен $\Delta_j=z_j-c_j$ айырымдары екі бөліктен тұрады, олардың бірінші бөлігі M шамасына тәуелді болса, екінші бөлігі оған тәуелді емес. Сондықтан F_0 мәні мен $\Delta_j=z_j-c_j$ айырымдарын есептеген соң $m+2$ жолына M шамасының коэффициентін, ал $m+1$ жолына бос мүшені жазады.

Соңғы $m+2$ жолындағы теріс сандарды өзара салыстырып, абсолют шамасы бойынша максимумге сәйкес келетін векторды жаңа базиске енгізеді. Белгілі бір қадамда базистен шығарылған жасанды векторды келесі базистерге қайтадан енгізудің мазмұны жоқ болғандықтан оған сәйкес баған әрі қарай қарастырылмайды. Бір тірек жоспарынан екінші тірек жоспарына көшу симплекс – таблица әдісінің жалпы ережелеріне сай жүзеге асырылады.

Егер 1)барлық жасанды векторлар базистен шығарылса және 2)барлық жасанды векторлар базистен шығарылмағанымен $m+2$ жолында $P_1,P_2,...,P_{n+m}$ векторларының бағандарында теріс сандар болмаса, онда $m+2$ жолы бойынша есептеулер тоқтатылады. Бірінші жағдайда базис бастапқы есептің белгілі бір тірек жоспарын анықтайтындықтан тиімді шешуді іздеу $m+1$ жолы бойынша жалғастырылады. Екінші жағдайда, егер P_0 векторының $m+2$ жолындағы сан теріс болса, онда бастапқы есептің тиімді шешуі жоқ; егер P_0 векторының $m+2$ жолындағы сан нөл болса, онда бастапқы есептің тірек жоспары азғындалған болады да базис кемінде бір жасанды векторды өзінде ұстайды.

Егер бастапқы есептің бірнеше бірлік векторлары бар болса, онда оларды жасанды базис құрамына қосу қажет.

Мысал. Мақсаттық

$$F=2x_1-3x_2+6x_3+x_4 \tag{7}$$

функцияның максимумын

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 = 10, \end{cases} \quad (8)$$

$$x_1, \dots, x_6 \geq 0 \quad (9)$$

шарттар орындалған жағдайда анықтау керек. Берілген теңдеулер системасы анықтайтын

$$P_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix},\ P_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Векторларының ішінде екі бірлік вектор (P_4, P_5) бар. Сондықтан (8) системаның үшінші теңдеуіне жаңа $x_7 \geq 0$ айнымалысын енгізіп, кеңейтілген СП есебін қарастырамыз: мақсаттық

$$F = 2x_1 - 3x_2 + 6x_3 + x_4 - Mx_7 \quad (10)$$

функцияның максимумы

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 24, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_5 = 22, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_6 + x_7 = 10, \end{cases} \quad (11)$$

$$x_1, \dots, x_7 \geq 0 \quad (12)$$

шарттар орындалған жағдайда ізделінеді.

Кеңейтілген (10)-(12) есебінің бірлік P_4, P_5, P_7 векторларымен анықталатын $X = (0{,}0{,}0{,}24;22;0;10)$ тірек жоспары бар. Енді 5 жолы бар 1-кестені құрастырамыз. Мұндағы 4-інші, 5-інші жолдарды толтыру үшін F_0 және $\Delta_j = z_j - c_j$, $(j = \overline{1,7})$ мәндерін есептейміз: $F_0 = 24 - 10M$, $\Delta_1 = 0 - M$, $\Delta_2 = 4 + M$, $\Delta_3 = -8 - 2M$, $\Delta_4 = 0$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0 + M$, $\Delta_7 = 0$. Осы өрнектердегі M-нің коэффициенттерін 5-інші жолға, ал бос мүшелерін 4-інші жолға жазады.

1-кесте

i	*Базис*	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
				2	-3	6	1	0	0	$-M$
1	P_4	1	24	2	1	-2	1	0	0	0
2	P_5	0	22	1	2	4	0	1	0	0
3	P_7	$-M$	10	1	-1	2	0	0	-1	1
4			24	0	4	-8	0	0	0	0
5			-10	-1	1	-2	0	0	1	0

Осы кестенің 5-інші жолындағы екі теріс сан $(-1,-2)$ кеңейтілген есептің тірек жоспары $X=(0,0,0,24,22,0,10)$ тиімді болмайтынын көрсетеді.

$$\max(|-1|,|-2|)=2 \text{ және } \min\left(\frac{22}{4},\frac{10}{5}\right)=\frac{10}{5}$$

болғандықтан P_3 бағаны бағыттаушы баған, ал P_7 жолы бағыттаушы жол болады. Олардың қиылысуындағы (2) санын шешуші элемент деп аламыз. Әрі қарай базистегі жасанды P_7 векторын P_3 векторымен ауыстырады. Сонымен жаңа базис ретінде P_4, P_5, P_3 векторлары алынады. P_7 векторын келесі базистерге енгізудің еш қажеті болмағандықтан оның бағанын келесі кестеге енгізбейді. Сол сияқты жаңа кестеде 5-інші жол болмайды.

2-кесте

i	*Базис*	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				2	-3	6	1	0	0
1	P_4	1	34	3	0	0	1	0	-1
2	P_5	0	2	-1	4	0	0	1	2
3	P_3	6	5	1/2	-1/2	1	0	0	-1/2
4			64	4	0	0	0	0	-4

Бұл кестеден жаңа $X=(0,0,5,34,2,0,5)$ тірек жоспары да тиімді болмайтынын көреміз, өйткені соңғы 4-інші жолда бір теріс сан (-4) бар. Бағыттаушы вектор P_6, ал бағыттаушы жол P_5 жолы болады. Демек, базистегі P_5 векторының орнына P_6 векторын енгізу арқылы 3-кестеде жаңа тірек жоспарын жетілдіреді.

3-кесте

i	*Базис*	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				2	-3	6	1	0	0
1	P_4	1	35	5/2	2	0	1	1/2	0
2	P_6	0	1	-1/2	2	0	0	1/2	1
3	P_3	6	11/2	1/4	½	1	0	1/4	0
4			68	2	8	0	0	2	0

Соңғы кеседегі $X=(0,0,11/2,35,2,0,1)$ тірек жоспары тиімді болады, себебі 4-інші жолда теріс сан жоқ. Бұл жоспар орындалғанда

$$F_{max}=68.$$

Практикалық сабақ
Сызықтық программалау есебін жасанды базис әдісімен шешу

Мысал. СП-дың бастапқы есебі былайша берілген:

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 = 4. \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$F(x) = -2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 - x_5 \to min$$

Жүйенің базистік x_1 және x_2 белгісіздері бар. Бірақ оған қарамастан, СП-дың жалпы кеңейтілген есебін қарастырайық.

$$\begin{cases} x_2 + 2x_4 - x_5 + z_1 = 1, \\ x_1 - x_4 - x_5 + z_2 = 1, \\ 2x_2 + x_3 + 2x_5 + z_3 = 4. \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \\ z_1 \geq 0,\ z_2 \geq 0, z_3 \geq 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$F(X, Z) = -(z_1 + z_2 + z_3) \to max$$

(2) шектеулер жүйесінде x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 – еркін, ал $z_1,\ z_2, z_3$ – базистік белгісіздер болып саналады.

(2)-дегі мақсаттық функцияны еркін белгісіздер арқылы (2) жүйе бойынша өрнектейміз:

$$F(X, Z) = -6 + x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 \to max$$

(2) жүйе және осы соңғы мақсаттық функция бойынша алғашқы симплекстік кестені түземіз:

1-кесте. Алғашқы симплекстік кесте

ББ	БМ	Еркін белгісіздер				
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
z_1	1	0	1	0	2	-1
z_2	1	(1)	0	0	-1	-1
z_3	4	0	2	1	0	2
F	-6	-1	-3	-1	-1	0
f	0	2	-1	-4	1	1

Функцияның максимумын анықтау қажет болғандықтан, F жолының еркін белгісіздерге сәйкес келетін коэффициенттері теріс болмауы шарт. Сондықтан оларды біртіндеп жоя бастаймыз.

x_1-тік жолда жалғыз оң элемент бар. Ол жақшаға алынып жазылған (1). Демек x_1-еркін белгісіз базистік z_2-нің орнына өтуі тиіс.

Нәтижеде мынадай түрленген симплекстік кестені аламыз.

2-кесте. Түрленген симплекстік кесте.

ББ	БМ	Еркін белгісіздер			
		x_2	x_3	x_4	x_5
z_1	1	(1)	0	2	-1
x_1	1	0	0	-1	-1
z_3	4	2	1	0	2
F	-5	-3	-1	-2	-1
f	-2	-1	-4	3	3

Жоғарыдағы әдістерді пайдалана отырып, келесі симплекстік кестелерді аламыз.

3-кесте. Екінші түрленген симплекстік кесте.

ББ	БМ	Еркін белгісіздер		
		x_3	x_4	x_5
x_2	1	0	2	-1
x_1	1	0	-1	-1
z_3	2	(1)	-4	4
F	-2	-1	4	-4
f	-1	-4	5	2

4-кесте. Алғашқы есеп үшін «Бастапқы» симплекстік кесте

ББ	БМ	Еркін белгісіздер	
		x_4	x_5
x_2	1	2	-1
x_1	1	-1	-1
x_3	2	-4	(4)
F	0	0	0
f	7	-11	18

Енді F жолға назар аударатын болсақ, онда $F_{max} = 0$ екендігін және базистік тік жолда жасанды базистік элементтердің бірде-бірінің қалмағанын байқаймыз. Сондықтан 4-кестені – «бастапқы есептің симплекстік кестесі» деп атадық.

Ол кесте бойынша x_1, x_2, x_3 базистік белгісіздерге айналды. Берілген есеп шарты бойынша мақсаттық f функцияның минимумын анықтау қажет. Сондықтан оның F жолында оң таңбалы коэффициенттер болмауы тиіс. Бізде ондай коэффициенттер бар, ол 18 саны.

Симплекс-таблица әдіс бойынша оны кестеден шығаруымыз қажет. Жоғарыда кесте бойынша x_5 еркін белгісіз базистік x_3-тің орнына өтеді. Нәтижеде мынадай жаңа симплекстік кестені аламыз.

5-кесте. Түрленген симплекстік кесте.

ББ	БМ	Еркін белгісіздер	
		x_4	x_5
x_2	3/2	(1)	0
x_1	3/2	-2	0
x_3	½	-1	1
f	-2	7	0

Тағы бір рет түрлендіру жасағасын соңғы нәтижелі симплекстік кестені аламыз.

6-кесте. Соңғы симплекстік кесте.

ББ	БМ	Еркін белгісіздер	
		x_2	x_5
x_4	3/2	1	0
x_1	9/2	2	0
x_3	2	1	1
f	-25/2	-7	0

Демек, СП есебінің жауабы былайша болады:

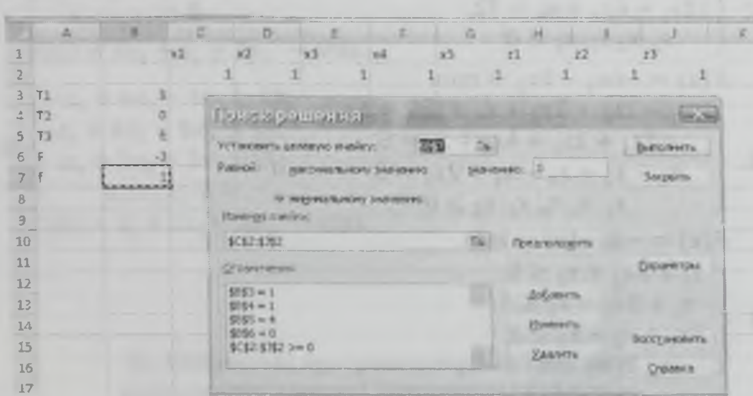
$$x^* = (x_1{}^*, x_2{}^*, x_3{}^*, x_4{}^*, x_5{}^*) = \left(\frac{9}{2}; 0; 2; \frac{3}{2}; 0\right)$$

$$f_{min} = f(x^*) = -\frac{25}{2}.$$

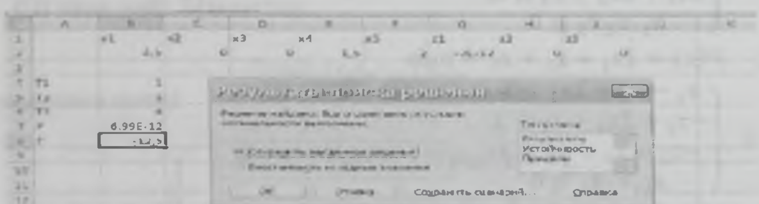
Лабораториялық сабақ

Сызықтық программалау есебін шешудің жасанды базис әдісі және оларды шешуде MS Excel аспаптық құралын қолдану.

СП есептерін жасанды базис әдісімен шешкен жағдайда бастапқы есеп жаңа СП есепке айналады. Ол есепті бастапқы есепке қарағанда белгісіздердің саны Z векторының координаталар санына артқан, шектеулеріне F=0 деген жаңа шектеу қосылған жаңа СП есебі деп карасақ жеткілікті.



Есептеу процедураларының барлығы қайталанған соң, мынадай нәтиже аламыз.



Екі жағдайда да нәтиже бірдей болды.

Тапсырмалар

Мақсаты: Теориялық материалды тиянақтауға арналған тапсырмаларды шешіп үйрену. СП есептерін жасанды базис әдісімен шығарып үйренеді. Төменде көрсетілген СП есептерін математикалық және компьютерлік әдістермен шығару керек. Нәтижелерін салыстырып, талдау жасау керек.

1. $$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \to min.$$

2. $$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_4 = 72, \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -6x_1 - 8x_2 \to min.$$

3. $$\begin{cases} -x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 13, \\ -2x_1 + 2x_2 + 4x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 5, \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -x_1 - 4x_4 \to min.$$

4. $$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 5, \\ -x_1 + 3x_2 - x_3 \leq 1, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 \geq 3, \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 + x_2 + x_3 \to min.$$

5. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 \leq 4, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 2, \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + x_2 + x_3 \to \max.$$

6. $$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 1, \\ -x_1 + x_2 + x_3 \leq 3, \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 \to \min.$$

7. $$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 \leq 1, \\ -2x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 5, \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 11, \\ \quad x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 \to min.$$

8. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 = 9, \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 6, \\ \quad x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = -34x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 \to min.$$

$$9.\ \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 \geq 1, \\ x_1 + x_2 \leq 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 3, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max.$$

$$10.\ \begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 4x_3 \geq 18, \\ x_1 + 4x_2 - 5x_3 \leq 18, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = x_1 + 2x_2 - 4x_3 \to \max.$$

§6. Сызықтық программалаудың тура және қосарланған есептері арасындағы байланыс.

Кез келген сызықтық программалау есебіне қосарланған сызықтық программалау есебін сәйкес қоюға болады.

СП тура есебі. Мақсаттық

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1}$$

функцияның келесі

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \leq b_k, \\ a_{k+11}x_1 + a_{k+12}x_2 + \ldots + a_{k+1n}x_n = b_{k+1}, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = \overline{1, l}, l \leq n) \tag{3}$$

шарттар орындалғандағы максимумын табу керек.

СП қосарланған есебі. Мақсаттық

$$F^* = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \tag{4}$$

функцияның келесі

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_1, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1l}y_1 + a_{2l}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \geq c_l, \\ a_{1l+1}y_1 + a_{2l+1}y_2 + \dots + a_{ml+1}y_m = c_{l+1}, \\ \dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}x_2 + \dots + a_{mn}y_m = c_m, \end{cases} \tag{5}$$

$$y_i \geq 0 \;\; (i = \overline{1,k}, k \leq m) \tag{6}$$

шарттар орындалғандағы минимумын табу керек.

Осы (1)-(3) және (4)-(5) есептер арқылы СП есептерінің **қосарланған жұбы** анықталады. Бұл есептерді салыстырып, тура есептен қосарланған есепті алу үшін келесі ережелерді сақтау керек:

1)Тура есепте мақсаттық функцияның максимумы ізделінсе, қосарланған есепте мақсаттық функцияның минимумы ізделінеді;

2)Тура есептегі (2) шектеудің коэффициенттерінің матрицасы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

болса, қосарланған есептегі (5) шектеудің коэффициенттерінің матрицасы

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

болады, яғни A^T матрицасы A матрицасынан элементтерін транспонирлеу арқылы алынады;

3)Қосарланған есеп айнымалыларының саны тура есептегі (2) шектеудің қатынастарының санына тең және қосарланған есептегі (5) шектеудің қатынастарының саны тура есептің айнымалыларының санына тең;

4)Қосарланған есеп мақсаттық функциясының коэффициенттері тура есептегі (2) шектеудің бос мүшелері болады және қосарланған есептегі (5) шектеудің бос мүшелері тура есеп мақсаттық функциясының коэффициенттері болады;

5)Егер тура есептің x_j айнымалылары оң мәндермен бірге теріс мәндерді де қабылдаса, онда қосарланған есептегі (5) шектеудің j - шарты "$\geq$" түріндегі теңсіздікпен беріледі. Егер тура есептің x_j айнымалылары тек оң мәндер қабылдаса, онда қосарланған есептегі (5) шектеудің j - шарты "$=$" түріндегі теңдікпен беріледі. Тура есептің (2) шектеуі мен қосарланған есеп айнымалылары арасында осындай байланыс бар. Егер (2) шектеудегі i - қатынасы теңсіздік болса, онда қосарланған есептегі $y_i \geq 0$ болады. Керісінше жағдайда y_i айнымалысы оң не теріс мәнді болуы мүмкін.

Мысал. Берілген СП тура

$$F = 2x_1 + x_2 + 3x_3 \to max,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 12, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 24, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = 18, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

есебіне сәйкес СП қосарланған есебін қою қажет. Тура және қосарланған есептердің матрицалары

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -5 \\ 2 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ және } A^T = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

СП косарланған есебі:

$$F^* = 12y_1 + 24y_2 + 18y_3 \to min,$$
$$\begin{cases} -y_1 + 2y_2 + 3y_3 \geq 2, \\ 3y_1 - y_2 + y_3 \geq 1, \\ -5y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3. \end{cases}$$
$$y_1, y_2, y_3 \geq 0$$

Тура есепте мақсаттық функцияның максимумы ізделінгендіктен қосарланған есепте мақсаттық функцияның минимумы ізделінеді. Сол сияқты тура есепте тек теңдеулер берілгендіктен қосарланған есептегі айнымалылар кез келген таңбалы болуы мүмкін. Тура есептегі айнымалылар теріс емес таңбалы болғандықтан қосарланған есептегі шектеулердің барлығында да "$\geq$" теңсіздігі қолданылады.

Практикалық сабақ

Тура және қосарланған сызықтық программалау есептерін құру.

Мысал. «Тоқаш» жекеменшік кәсіпорны (I) және (II) түрлі ресурстарды пайдаланып, А, В, С түрлі нан-тоқаш тағамдарын өндіреді және күніне ресурстардың 12 және 8 шартты өлшем бірлігінен аспайтын мөлшерін ғана игере алады. Басқа технологиялық мәліметтер төмендегі кестеде көрсетілген.

Жалпы табыс сомасы ең үлкен болатын тиімді өндіріс жоспарын анықтау қажет.

1-кесте. Технологиялық мәліметтер.

Ресурс түрлері	**Өнімнің шартты бірлігіне жұмсалатын ресурс нормасы**			**Ресурстар көлемі**
	A	B	C	
I	2	2	1	12
II	1	3	6	8
Табыс (теңге)	4	8	6	

Бұл есеп СП есептерінің қатарына жатады. Тура және қосарланған есептердің модельдерін жасап, тиімді жоспарды қарастырайық. Мәселенің математикалық моделі төменде келтірілген.

2-кесте. Есептің математикалық моделі.

Бастапқы есеп	Қосарланған есеп
$\begin{cases} 2x_1+2x_2+x_3\le 12, \\ x_1+3x_2+6x_3\le 8, \\ x_1,x_2x_3\ge 0 \end{cases}$ $F(x)=4x_1+8x_2+6x_3 \to \max.$	$\begin{cases} 2y_1+y_2\ge 4, \\ 2y_1+3y_2\ge 8, \\ y_1+6y_2\ge 6 \\ y_1,y_2\ge 0 \end{cases}$ $F(y)=12y_1+8y_2\to\min.$

Екі есепті де симплекс-таблица әдіспен шешіп, төмендегідей симплекстік кестелерді аламыз.

3-кесте. Бастапқы есептің соңғы симплекстік кестесі.

ББ	БМ	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	5	1	0	-9/4	3/4	-1/2
x_2	1	0	1	11/4	-1/4	1/2
f	28	0	0	7	1	2

4-кесте. Қосарланған есептің соңғы симплекстік кестесі.

ББ	БМ	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5
y_1	1	1	0	-3/4	1/4	0
y_2	2	0	1	1/2	-1/2	0
y_5	7	0	0	9/2	-11/4	1
F	28	0	0	-5	-1	0

Есептің жауаптары:

$x^* = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (5; 1; 0; 0; 0);$ $f_{max}(x^*) = 28;$

$f(x) = 28 - 7x_3 - x_4 - 2x_5;$

$y^* = (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) = (1; 2; 0; 0; 7);$ $f_{min}(y^*) = 28;$

$F(y) = 28 + 7y_3 + y_4;$

§7. Сызықтық программалаудың қосарланған есебін симплекс-таблица әдісімен шешу.

Мысал. Берілген СП тура

$$F = x_1 + 2x_2 - x_3 \to max\,,$$
$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 - 2x_3 \leq 12, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leq 17, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \geq 0.$$

есебіне сәйкес қойылған СП қосарланған есебін шешу керек.

СП қосарланған есебінің қойылымы

$$F^* = 12y_1 + 17y_2 + 4y_3 \to min\,,$$
$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1, \\ 4y_1 + y_2 - y_3 \geq 2, \\ -2y_1 + 2y_2 + 2y_3 \geq -1, \end{cases}$$
$$y_1, y_2 \geq 0.$$

СП қосарланған есебін шешу үшін алдымен тура есепті жасанды базис әдісімен шешеді.

i	Базис	$C_б$	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
				1	2	-1	0	0	-M
1	P_4	0	12	-1	4	-2	1	0	0
2	P_5	0	17	1	1	2	0	1	0
3	P_6	-M	4	2	-1	2	0	0	1
4			0	-1	-2	1	0	0	0
5			-4	-2	1	-2	0	0	0
1	P_4	0	14	0	7/2	-1	1	0	1/2

2	P_5	0	15	0	3/2	1	0	1	-1/2
3	P_1	1	2	1	-1/2	1	0	0	1/2
4			2	0	-5/2	2	0	0	1/2
1	P_2	2	4	0	1	-2/7	2/7	0	1/7
2	P_5	0	9	0	0	13/7	-3/7	1	-5/7
3	P_6	1	4	1	0	6/7	1/7	0	4/7
4			12	0	0	9/7	5/7	0	6/7

Симплекс-таблицаның соңғы жолынан қосарланған есептің шешуін анықтайды: $y_1^* = 5/7$, $y_2^* = 0$, $y_3^* = 6/7$. Демек,

$$F_{\min}^* = 12 \cdot (5/7) + 17 \cdot 0 + 4 \cdot (6/7) = 12.$$

Практикалық сабақ
Сызықтық программалаудың қосарланған есебін симплекс-таблица әдісімен шешу.

Мысал.

$F^* = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to max$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 800 \\ x_1, \dots, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Шешілуі: $F^* = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3 \to min$

$$\begin{cases} y_1 + 4y_3 \ge 9 \\ y_2 + 2y_3 \ge 6 \\ 2y_1 + 3y_3 \ge 4 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \ge 7 \\ y_1 y_2, y_3 \ge 0 \end{cases}$$

i	Базис	$C_б$	P_o	9	6	4	7	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
1	P_5	0	180	1	0	-2	1	0	0	0
2	P_6	0	210	0	1	2	0	1	0	0
3	P_7	0	4	4	2	2	0	0	1	1
4			0	-9	-6	-4	-7	0	0	0

1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	210	0	1	3	2	0	1	0
3	P_1	0	80	0	2	-8	0	-4	0	1
4			1620	0	-6	14	2	9	0	0
1	P_1	9	180	1	0	2	1	1	0	0
2	P_6	0	170	0	0	7	2	2	1	-
3	P_2	6	40	0	1	-4	0	-2	0	1/2
										1/2
4			1860	0	0	-10	2	-3	0	3
1	P_1	9	95	1	0	-	0	0	-	1/4
2	P_5	0	85	0	0	3/2	1	1	1/2	-
3	P_2	6	210	0	1	7/2	2	0	1/2	1/4
						3			1	0
4			2115	0	0	1/2	5	0	3/2	9/4

$y^* = (0, \frac{3}{2}, \frac{9}{4})$

$$F^*_{min} = 180 \cdot 0 + 210 \cdot \frac{3}{2} + 800 \cdot \frac{9}{4} = 2115$$

$$F^*_{max} = 9 \cdot 95 + 6 \cdot 210 + 4 \cdot 0 + 7 \cdot 0 = 885 + 1260 = 2115$$

Лабораториялық сабақ
Сызықтық программалаудың қосарланған есебін симплекс-таблица әдісімен шешуде MS EXCEL-дегі «шешімдерді іздеу» аспаптық құралын қолдану.

Мысал.

$$F^* = 9x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 7x_4 \to max$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + x_4 \le 180 \\ x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 210 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 800 \\ x_{1,} \dots, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

Шешілуі: $F^{*} = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3 \rightarrow min$

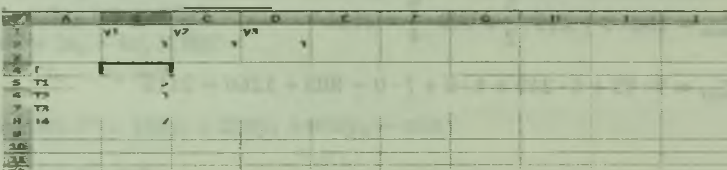
$$\begin{cases} y_1 + 4y_3 \geq 9 \\ y_2 + 2y_3 \geq 6 \\ 2y_1 + 3y_3 \geq 4 \\ y_1 + 2y_2 + 4y_3 \geq 7 \\ y_1 y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

1. Есептің белгісіздері $y_1, y_2 y_3$ болатын. Ұмытып қалмас үшін ол белгісіздердің таңбаларын B1:F1 ұяшықтарға жазып қоямыз. Белгісіздерге кез келген, теріс емес мәнді, мысалы 1 мәнін берейік. Олар Excel парағының B2:D2 ұяшықтарына енгізілген.

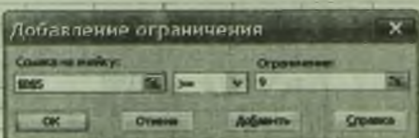
2. Берілген $F^{*} = 180y_1 + 210y_2 + 800y_3$ мақсаттық функциясының осы нүктелердегі мәндерін есептейміз. Функцияның мәндері қандай ұяшықта жазылғанын ұмытпас үшін A4 ұяшыққа арнаулы f(max) жұмыстық таңба қоямыз. Аргументтердің B2:F2 ұяшықтарға енгізілген мәндері бойына F функциясының мәндерін есептейміз. Олар B4 ұяшықта жазылған:

$$= 180^{*}B2 + 210^{*}C2 + 800^{*}D2$$

3. Жүйе шектеулерінің берілген B2:F2 нүктедегі мәндерін B6:B8 диапазондағы ұяшықтарда есептеп, енгізіп қоямыз.

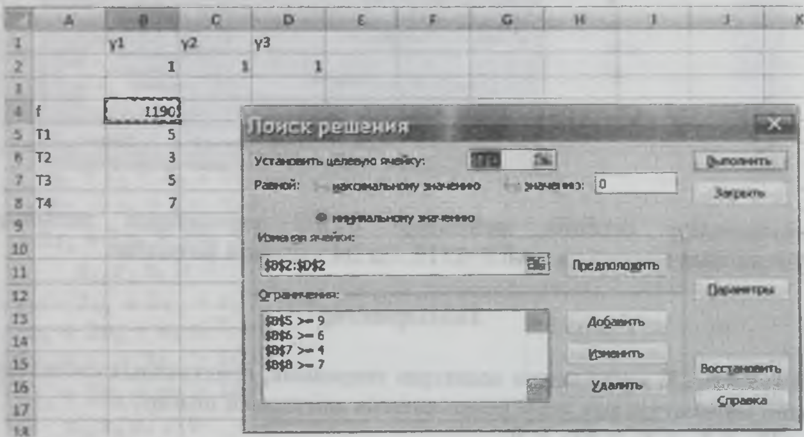


4. «Мақсаттық ұяшықты орнат-Установить целевую ячейку» деген ұяшыққа $B$4 жазамыз (негізінде тінтуірді-курсорды B4 ұяшыққа қойсақ, алдыңғы айтылған амал өзінен-өзі орындалады).

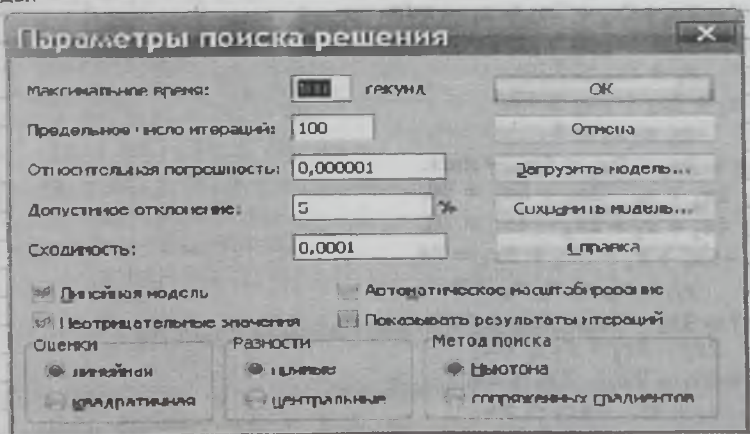


«Қосымша-Добавить» батырмасын басқаннан соң алдыңғыдай бейне терезе көрінеді. Оған В7, соңынан В8 енгіземіз.

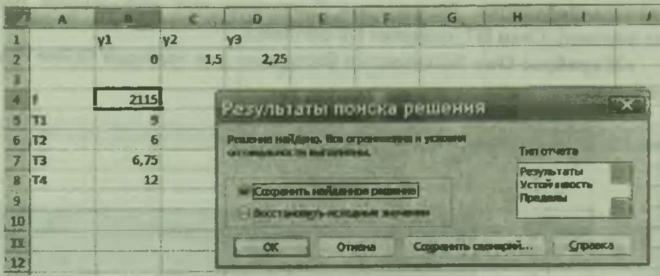
«Жарайды-Ок» батырмасын басқаннан соң мынадай бейне терезе пайда болады.



«Параметрлер - Параметры» батырмасын бассақ мынадай терезе пайда болады.



Нәтиже төмендегі бейне терезеде көрсетілген.



Тиімділендіру есебінің шешімдері B2:D2 ұяшықтарда жазылған. Функцияның максимум мәні F=2115. Ол B4 ұяшықта жазылған.

Тапсырмалар

Мақсаты: СП қосарланған есептерін теориялық, практикалық сабақтарда өткен математикалық және компьютерлік әдістермен шығару.

$$1)\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 - 4x_4 \geq 6, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 \geq 4, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 + x_4 \rightarrow min.$$

$$2)\begin{cases} x_1 + 3x_2 \leq 4, \\ x_1 + 2x_3 \leq 7, \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 12, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 + 8x_2 + 5x_3 \rightarrow max.$$

$$3)\begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_5 + 5x_6 = 30, \\ 4x_1 + x_3 + 2x_5 - 4x_6 = 28, \\ -5x_1 + x_4 - 3x_5 + 6x_6 = 24, \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \rightarrow \max.$$

$$4)\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \leq 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \leq 36, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$F(x) = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3 \rightarrow max.$$

5) $\begin{cases} -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 \le 12, \\ -4x_1 - 4x_2 - 3x_3 \le 24, \\ 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \le 15, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = 3x_1 - 7x_2 - 4x_3 \to min.$

6) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 8, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 10, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 12, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \to max.$

7) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \ge 6, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 \le 4, \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 \le 7, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = -2x_1 + 3x_2 + x_3 \to max.$

8) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 \le 7, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 \ge 10, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 15, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 \to max.$

9) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 \ge 3, \\ x_1 - x_3 + 2x_4 \le 7, \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 \to \min.$

10) $\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 28, \\ -3x_1 + 5x_2 - 3x_4 \le 30, \\ 4x_1 - 2x_2 + 8x_4 \le 32, \\ x_1, x_2 x_3 \ge 0 \end{cases}$

$F(x) = x_1 + 3x_2 - 5x_4 \to \max.$

§8. Көлік есебінің тірек жоспарын табу.

Көлік есебінде $A_1, A_2, ..., A_m$ деп белгіленген барлығы m қоймада жинақталған біртекті жүкті $B_1, B_2, ..., B_n$ деп белгіленген барлығы n тұтынушыға тасып берудің тиімді жоспарын анықтау керек. Тиімділік белгісі ретінде барлық жүкті тасымалдаудың ең аз құны алынады. Тиімділік белгісі ретінде басқа параметрлер де қарастырылуы мүмкін.

Кез келген i-коймадан j-тұтынушыға тасымалданатын жүктің көлемін x_{ij}, тасымалдау тарифтерін c_{ij}, i-коймадағы жүк көлемін a_i, ал j-тұтынушының қажеттілігін b_j деп белгіленеді. Қарастырылған көлік есебінің математикалық қойылымы: мақсаттық

$$F = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

функциясының мына

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \quad (j = \overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_{ij} = a_i \quad (i = \overline{1,m}), \qquad (3)$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}) \qquad (4)$$

шарттар орындалғандағы минимум мәнін табу керек.

Осы (2)-(4) шарттарды қанағаттандыратын $X = (x_{ij})$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$ матрицасының элементтері көлік есебінің жоспары деп аталады. Мақсаттық (1) функцияның минимумын қамтамасыз ететін жоспарды көлік есебінің тиімді жоспары деп атайды. Көлік есебінің бастапқы мәліметтері мына кестеге жазылады.

	B_1	B_2	...	B_n	Қор
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	...	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	...	c_{2n} x_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	...
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	...	c_{mn} x_{mn}	a_m
Қажеттілік	b_1	b_2	...	b_n	

Қоймалардағы жүктің жалпы көлемін $\sum_{i=1}^{m} a_i$ деп, тұтынушылардың жалпы қажеттігін $\sum_{j=1}^{n} b_j$ деп белгілесек, онда көлік есебінің жабық моделінде

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \qquad (5)$$

теңдігі орындалса, ашық моделінде бұл теңдік орындалмайды. Көлік есебінің шешуінің бар болуы үшін оның математикалық моделінің жабық болуы қажетті және жеткілікті екені белгілі.

Егер қоймалардағы жүк қоры тұтынушылардың қажеттігінен артық, яғни $\sum_{i=1}^{m} a_i \succ \sum_{j=1}^{n} b_j$ болса, онда қажеттігі $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$ болатын жалған $(n+1)$ -тұтынушыны қарастырамыз. Оның тарифтері сәйкесінше $c_{in+1} = 0\ (i = \overline{1,m})$ деп алынады. Сонымен ашық модель жабық модельге айналды.

Егер тұтынушылардың қажеттігі қоймалардағы жүк қорынан артық, яғни $\sum_{i=0}^{m} a_i \prec \sum_{j=1}^{n} b_j$ болса, онда жүк қоры $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$ болатын жалған қойманы қарастырамыз. Мұның да тарифтері сәйкесінше $c_{m+1j} = 0\ (j = \overline{1,n})$ деп алынады. Демек, ашық модель жабық модельге айналды.

Егер көлік есебінде қоймалар саны m, тұтынушылар саны n болса, онда x_{ij} айнымалыларының саны mn, ал (2), (3) системалардағы теңдеулер саны $m+n$. Әрі қарай тек жабық көлік есебі қарастырылатын болғандықтан (5) теңдіктің орындалуынан сызықтық тәуелсіз теңдеулер саны $m+n-1$ болады. Демек, көлік есебінің тірек жоспарында нөлден өзгеше белгісіздерінің саны $m+n-1$ санынан артпайды.

Егер көлік есебінің тірек жоспарында нөлден өзгеше белгісіздерінің саны $m+n-1$ болса, онда бұл жоспар азғындалмаған тірек жоспары деп аталады. Ал егер көлік есебінің тірек жоспарында нөлден өзгеше белгісіздерінің саны $m+n-1$ санынан аз болса, онда бұл жоспарын азғындалған тірек жоспары деп атайды.

Көлік есебінің тірек жоспарын анықтау үшін солтүстік-батыс бұрыш, ең аз құн және Фогель аппроксимациясы әдістерінің кез келгенін қолдануға болады. Көлік есебінің тиімді жоспарын анықтау үшін дифференциалдық рента және потенциалдар әдістерінің біреуі қолданылады. Аталған әдістерді мысалмен түсіндірген тиімді.

Көлік есебін шешу оның қандай да бір тірек жоспарын анықтаудан басталады.

Мысал. A_1, A_2, A_3 деп белгіленген үш базада сәйкесінше 140, 180 және 160 т жүк жинақталған. Сол жүкті қажеттіктері сәйкесінше 60, 70, 120, 130 және 100 т болатын B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 деп белгіленген тұтынушыларға тасып беру керек. Қоймадан тұтынушыға 1 т жүкті тасымалдау тарифі келесі матрицамен

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 2 & 4 \\ 8 & 4 & 1 & 4 & 1 \\ 9 & 7 & 3 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

берілген. Көлік есебінің бастапқы мәліметтері бойынша келесі кестені құрамыз.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	2	3	4	2	4	140
A_2	8	4	1	4	1	180
A_3	9	7	3	7	2	160
Қажеттілік	60	70	120	130	100	

Көлік есебінің тірек жоспарын алдымен солтүстік-батыс бұрыш әдісімен іздейміз. Қоймалар саны $m=3$, тұтынушылар саны $n=5$. Демек, азғындалмаған тірек жоспары толтырылатын $m+n-1=3+5-1=7$ тормен анықталуы тиіс. Алдымен A_1B_1 торындағы x_{11} мәнін анықтауға тырысамыз. A_1 қоймасындағы жүктің қоры 140 т, ал B_1 тұтынушының қажеттігі 60 т болғандықтан B_1 тұтынушыны толық қанағаттандыруға болады, яғни $x_{11}=60$. B_1 тұтынушы толық қанағаттандырылғандықтан бұл бағанды әрі қарай қарастырмаймыз. Кестедегі қалған бос торлар үшін солтүстік-батыс бұрыш болып табылатын A_1B_2 торындағы x_{12} мәнін анықтаймыз. A_1 қоймасындағы қалған жүктің қоры 80 т, ал B_2 тұтынушының қажеттігі 70 т болғандықтан B_2 тұтынушыны толық қанағаттандыруға мүмкіндік бар, яғни $x_{12}=70$. Олай болса B_2 тұтынушы толық қанағаттандырылды, сондықтан бұл бағанды әрі қарай қарастырмаймыз. Қалған бос торлар үшін солтүстік-батыс бұрыш болып табылатын A_1B_3 торындағы x_{13} мәнін анықтаймыз. B_3 тұтынушының қажеттігі 120 т, ал A_1 қоймасындағы қалған жүктің қоры 10 т болғандықтан $x_{13}=10$ деп алынады. Сонымен A_1 қоймасындағы жүк таусылды, демек, әрі қарай бұл қойманы қарастырмаймыз. Кестенің қалған бос торларының солтүстік-батыс бұрышы болып табылатын A_2B_3 торын қарастырамыз. A_2 қоймасындағы жүктің қоры 180 т, ал B_3 тұтынушының қажеттігі 110 т болғандықтан $x_{23}=110$ деп алынады. Сонымен B_3 тұтынушы толық қанағаттандырылғандықтан бұл тұтынушыны да әрі қарай қарастырмаймыз. Әдісті жалғастырғанымызда A_2B_4 торын толтыруымыз қажет. A_2 қоймасындағы қалған жүктің қоры 70 т, ал B_4 тұтынушының қажеттігі 130 т. Демек, $x_{24}=70$. A_2 қоймасындағы жүктің қоры таусылды.

Енді A_3B_4 торындағы x_{34} белгісізінің мәнін іздейміз. A_3 қоймасындағы жүктің қоры 160 т, ал B_4 тұтынушының қажеттігі 60 т болғандықтан $x_{34}=60$ деп алынады. Соңғы A_3B_5 торы үшін A_3 қоймасында қалған жүктің қоры 100 т, B_5 тұтынушының қажеттігі де 100 т болғандықтан $x_{35}=100$ екені түсінікті. Солтүстік-батыс бұрыш әдісі бойынша алынған азғындалмаған тірек жоспары төмендегі кестеге жазылды. Тасымалдаудың берілген тарифі бойынша тасымалдау құны

$$F = 60\cdot 2 + 70\cdot 3 + 10\cdot 4 + 110\cdot 1 + 70\cdot 4 + 60\cdot 7 + 100\cdot 2 = 1380$$

теңге.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	2 60	3 70	4 10	2	4	140
A_2	8	4	1 110	4 70	1	180
A_3	9	7	3	7 60	2 100	160
Қажеттілік	60	70	120	130	100	

Енді осы көлік есебін ең аз құн әдісімен шешейік. Тасымалдау тарифі ең аз болатын A_2B_3 немесе A_2B_5 торларының біреуін толтырудан бастау керек. Мысалы, A_2B_3 торынан бастайық. A_2 қоймасындағы жүктің қоры 180 т, B_3 тұтынушының қажеттігі де 120 т болғандықтан бұл торды $x_{23}=120$ деп толтырамыз. Қажеттігі толық қанағаттандырылғандықтан B_3 бағанын әрі қарай қарастырмаймыз. Енді тарифі аз болатын A_2B_5 торын толтыру керек. A_2 қоймасында қалған жүктің қоры 60 т, B_5 тұтынушының қажеттігі 100 т болғандықтан $x_{25}=60$. Қалған бос торлар ішінде тасымалдау тарифі ең аз болатын A_1B_1, A_1B_4 немесе A_3B_5 торлардың біреуін толтырған жөн. Мысалы, A_1B_1 торын толтырайық. A_1 қоймасындағы жүктің қоры 140 т, B_1 тұтынушының қажеттігі 60 т, сондықтан $x_{11}=60$. Қажеттігі толық қанағаттандырылған B_1 тұтынушыны әрі қарай қарастырмаймыз. Енді A_1B_4 торын толтырамыз. A_1 қоймасында қалған жүктің қоры 80 т, B_4 тұтынушының қажеттігі 130 т, яғни $x_{14}=80$. Толтырылуға тиісті A_3B_5 торы үшін A_3 қоймасындағы жүктің қоры 160 т, ал B_5 тұтынушының қажеттігі 40 т, яғни $x_{35}=40$ деп алынады. Сонымен, B_5 тұтынушы толық қанағаттандырылды. Қалған бос торлар ішінде тасымалдау тарифі ең аз болатын A_3B_2 немесе A_3B_4 торларының біреуін толтыру керек. Мысалы, A_3B_2 толтырын толтырайық. A_3 қоймасында қалған жүктің коры 120 т, B_2 тұтынушының қажеттігі 70 т, яғни $x_{32}=70$ болады. Соңғы A_3B_4 торы үшін A_3 қоймасында қалған жүктің коры мен B_2 тұтынушының қажеттігі 50 т болғандықтан $x_{34}=50$ болады. Ең аз құн әдісі бойынша алынған азғындалмаған тірек жоспары төмендегі кестеге жазылды. Тасымалдаудың берілген тарифі бойынша тасымалдау құны

$$F=60\cdot 2+80\cdot 2+120\cdot 1+60\cdot 1+70\cdot 7+50\cdot 7+40\cdot 2=1380$$

теңге.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	2 60	3 -	4 -	2 80	4 -	140
A_2	8 -	4 -	1 120	4 -	1 60	180
A_3	9 -	7 70	3 -	7 50	2 40	160
Қажеттілік	60	70	120	130	100	

Әрі қарай осы көлік есебін Фогель аппроксимациясы әдісімен шешейік. Әр баған мен жолда минимал тарифтердің айырмаларын тауып қосымша жол мен бағанда жазамыз. A_1 жолындағы минимал тарифтер айырымы $3-2=1$. Сол сияқты A_2, A_3 жолдарындағы минимал тарифтер айырымы сәйкесінше $4-1=3$, $3-2=1$ болады. Анықталған айырымдардың максимумы $\max(1,3,1,6,1,2,2,1)=6$ B_1 бағанына сәйкес келеді. Бұл бағанда минимал тариф A_1 жолындағы A_1B_1 торында тұр. Сондықтан осы торды толтыру керек. A_1 қоймасындағы жүктің коры 140 т, B_1 тұтынушының қажеттігі 60 т болғандықтан $x_{11}=60$.

Бағандар мен жолдардағы минимал тарифтердің айырмаларын тауып тағы да қосымша жолдар мен бағандарға жазамыз. Анықталған айырымдардың максимумы $\max(1,3,1,1,2,2,1)=3$ A_2 жолына сәйкес келеді. Ондағы минимал тариф B_3 бағанындағы A_2B_3 және A_2B_5 торында тұр. Алдымен, мысалы A_2B_3 торды толтырайық. A_2 қоймасындағы жүктің коры 180 т, ал B_3 тұтынушының қажеттігі 120 т, сондықтан $x_{23}=120$ деп алынады.

Фогель аппроксимациясы әдісін тағы 5 рет колданып, кезегімен A_3B_5 торына $x_{35}=100$, A_1B_4 торына $x_{14}=80$, A_2B_2 торына $x_{22}=60$, A_3B_2 торына $x_{32}=10$, A_3B_4 торына $x_{34}=50$ деп жазамыз. Фогель аппроксимациясы әдісі бойынша алынған азғындалмаған тірек жоспары төмендегі кестеге жазылды. Берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F=60\cdot 2+80\cdot 2+60\cdot 4+120\cdot 1+10\cdot 7+50\cdot 7+100\cdot 2=1260$$

теңге.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	Жолдар бойынша айырымдар					
A_1	2 60	3 -	4 -	2 80	4 -	140	1	1	1	1	-	-
A_2	8 -	4 60	1 120	4 -	1 -	180	3	3	3	0	0	-
A_3	9 -	7 10	3 -	7 50	2 100	160	1	1	5	0	0	0
Қажеттілік	60	70	120	130	100							
Бағандар бойынша айырымдар	6	1	2	2	1							
	-	1	2	2	1							
	-	1	-	2	1							
	-	1	-	2	-							
	-	3	-	3	-							

Практикалық сабақ
Солтүстік – батыс бұрыш әдісі

Транспорттық есептің тірек жоспарын солтүстік-батыс бұрыш әдісімен табу барысының әр қадамында қалған жүру пунктінің 1-нен және қалған белгілеу пунктінің 1-ін қарастырады. Шарттар кестесінің торкөздерін толтыру белгісіз 1 үшін сол жақ жоғары торкөзден басталады, яғни кестені диогоналы бойынша жүргізіліп отырылады.

Есеп 1. A_1, A_2, A_3 базаларына сан жағынан 160, 140 және 170 бірлікке тең біртекті жүк келіп түсті. Бір жүкті B_1, B_2, B_3, B_4 тұтынушыларға көлемі жағынан 120, 50, 190 және 110 бірліктерін тасымалдау тарифтері әрбір жүру пункттерінен белгілеу пункттеріне сәйкестігі келесі кестеде көрсетілген:

Кесте 1.

Жөнелту пункттері	Тұтынушылар				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Қорлар**
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470

Берілген көлік есебінің тасымалдау жоспарын солтүстік-батыс бұрыш әдісімен табу керек.

Шешімі. Мұнда жөнелту пункттерінің саны m=3, ал тұтынушылар саны n=4. Демек, есептің азғындалмаған тірек жоспары 4+3-1=6 тор көздерде тұрған сандармен анықталады.

Кестені толтыруды анықталмаған x_{11} үшін A_1B_1 тор көзінен бастаймыз, яғни B_1 тұтынушының қажеттілігін A_1 жөнелту пунктінің есебінен қанағаттандыруға тырысамыз. A_1 пунктінің қоры B_1 пунктінің қажеттігінен артық болғандықтан, x_{11}=120. Бұл мәнді 2-кестедегі сәйкес тор көзге жазамыз және A_1 пунктінде қалған жүк қоры 40 бірлік. B_1 бағанын әрі қарай қарастырмаймыз.

Кесте2.

Жөнелту пункттері	Тұтынушылар				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Қорлар**
A_1	7 120	8 40	1	2	160
A_2	4	5 10	9 130	8	140
A_3	9	2	3 60	6 110	170
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470

Сол сияқты қалған тор көздерді де толтырамыз. Нәтижесінде мынадай тірек жоспарын аламыз.

$$X = \begin{pmatrix} 120 & 40 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 130 & 0 \\ 0 & 0 & 60 & 110 \end{pmatrix}$$

Нақты тасымалдау жоспарына сәйкес, барлық жүкті тасымалданудың жалпы құны

$$S = 7\cdot 120 + 8\cdot 40 + 5\cdot 10 + 9\cdot 130 + 3\cdot 60 + 6\cdot 110 = 3220 \text{теңгені}$$

құрап отыр.

Лабораториялық сабақ
Солтүстік-батыс бұрыш әдісі

MS EXCEL ортада тиімді маршруттарды анықтауға, яғни тасымалдау мәселелерін тиімділеуге арналған математикалық есептерді шешудің аспаптық құралы бар. Жоғарыда көлік есебін шешудің математикалық әдістері келтірілген болатын. Біз көлік есебін шешуде осы заманғы ақпараттық технологияның қолданысын көрсетуді қажет деп таптық. Қолдануды түсіндірудің және оның қолданысын көрсетудің ең оңтайлы жолдарының бірі – нақты есепті шығарып көрсету болып саналады

Көлік есебінің «ұсыныс=сұраныс» жағдайы.

Сұраныска сәйкес ұсыныс бар, оны тасымалдау шығыны ең аз болатындай етіп, тұтынушыға жеткізу қажет. Жоғарыдағы мысалды қарастырайық.

Есеп. A_1, A_2, A_3 базаларына сан жағынан 160, 140 және 170 бірлікке тең біртекті жүк келіп түсті. Бұл жүкті B_1, B_2, B_3, B_4 тұтынушыларға көлемі жағынан 120, 50, 190 және 110 жүк бірліктерін тасымалдау тарифтері келесі кестеде көрсетілген:

Кесте 1.

Жөнелту пункттері	**Тұтынушылар**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Қорлар**
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470

Берілген көліктің тасымалдау жоспарын солтүстік-батыс бұрыш әдісімен табу керек.

Көлік есебінің экономикалық тұрғыдан қойылымы:

-Тасымалдау шығыны ең кем болатын тасымалдау маршруттарын анықтау қажет.

Көлік математикалық моделі. Алдымен бұл көлік есебі маршруттарды тиімділендірудің қандай моделіне жататынын анықтауымыз қажет:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 160 + 140 + 170 = 470 \qquad \sum_{i=1}^{4} b_i = 120 + 50 + 190 + 110 = 470$$

Сонымен, $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{i=1}^{4} b_i = 470$.

Бұл тасымалдаудың жабық моделіне жатады. Тасымалдау жоспарының матрицасын

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \end{pmatrix}$$

деп белгілейік. Осы белгіленуге сәйкес кесте бойынша қоймалар үшін

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 160 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 140 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 110 \end{cases}$$

ал тұтынушылар үшін

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} = 120 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 110 \end{cases}$$

шектеулер жүйесін аламыз. Әрине бұл жүйенің барлық белгісіздері теріс емес мәндерді қабылдауы тиіс. Мақсаттық

$$f = 7x_1 + 8x_2 + x_3 + \ldots + 6x_{34} \to min$$

функцияның минимумдық мәнін беретін тиімді маршрутты анықтау қажет.

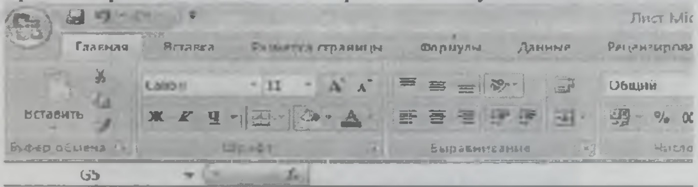
Ақпаратты модельдеу кезеңі

EXCEL парағын ашқаннан соң мынадай процедураларды орындаймыз.

- B3:E5 – диапазонда километр/тоннаж бойынша тариф жазылған;
- Ғ3:Ғ5 – диапазондарда ұсыныс көлемі көрсетілген;
- B6:F6 – диапазондарда сұраныс көлемі көрсетілген.

Жалпы жағдайда кестенің ақпараттық мүмкіндіктерін, құрылымын кеңейтіп, оны жалпы тиімділендіру есептерін шешудің кіріспе-торкөзі деп атауға болады.

Берілгендер бойынша EXCEL парағына енгізу кестесі



	A	B	C	D	E	F	G
1	Қойма	үлестіру	орталықтары			Қоры	
2		B1	B2	B3	B4	тонна	
3	A1	7	8	1	2	160	
4	A2	4	5	9	8	140	
5	A3	9	2	3	6	170	
6	Қажеттіліктер	120	50	190	110		
7							

- Есептің талабы бойынша екінші есептеу кестесін толтырамыз. Бұл кестеде есептеу амалдары жүргізіледі.
- B10:E12- диапазонда тасымалдау матрицасы жазылады;
- B10:E10….B12:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, H10:H12 ұяшықтардың мәндеріне тең, олар шектеулерді береді;

Берілгендер бойынша EXCEL парағында есептеу кестесі

	A	B	C	D	E	F	G	H
8	[illegible]	үлестіру орталықтары				теңдеу	теңсіздік	
9		B1	B2	B3	B4	[illegible]		[illegible]
10	A1	0	0	0	0		0 =	160
11	A2	0	0	0	0		0 =	140
12	A3	0	0	0	0		0 =	170
13	[illegible]	0	0	0	0			
14	талабы	=	=	=	=			
15	[illegible]	120	[illegible]	190	110			
16	тасымалдау	[illegible]	[illegible]	[illegible]			0	min
17								
18								

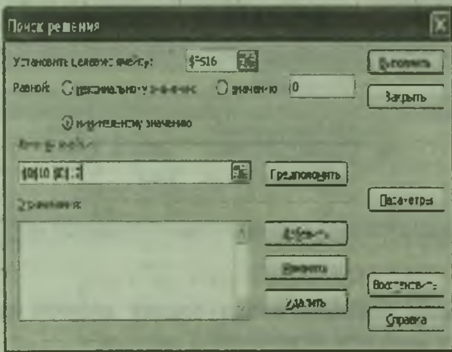
B10:B12….E10:E12 - ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, B13-E13 ұяшықтардың мәндеріне тең;

- G10 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:
  =сумм(B10:E10). Қалғандары «автотолтырылады».
- B13 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді;
  =сумм(B10:B12). Қалғандары «автотолтырылады».
- F16 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:

=суммпроизв(B3:E5;B10;E12).

Осылайша көшірілу арқылы келесі есептерді шешуде, шешу процесі автоматтандырылады.

- Бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис»**, **«Шешімді іздеу-поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай терезе пайда

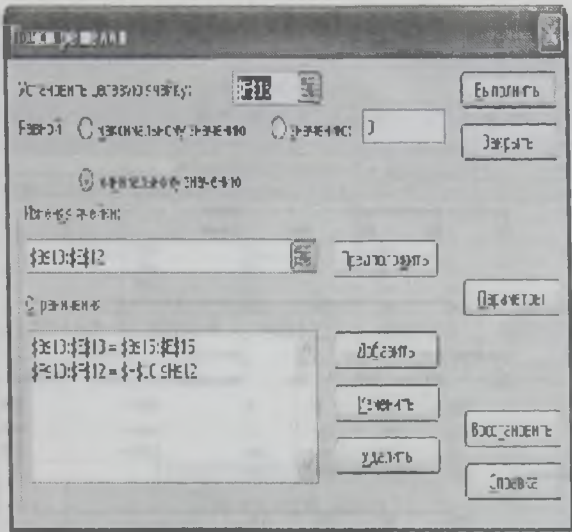


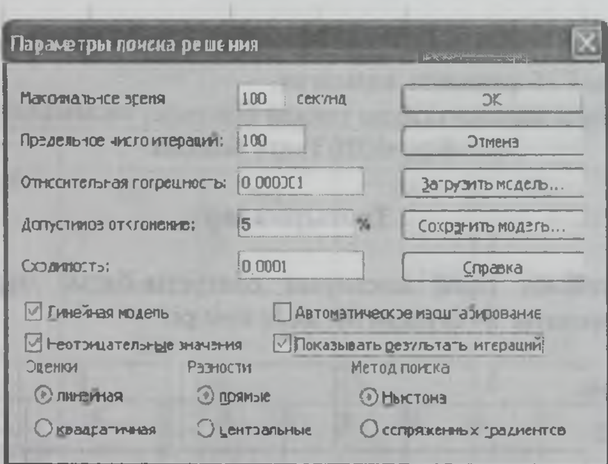
- Осындағы **«Мақсаттық ұяшықты анықта-установить целевую ячейку»** деген жерде F16-ұяшығы көрсетілуі тиіс.

- **«Минимумдық мән-минимальное значение»** деген сөйлемдегі терезені басу керек.

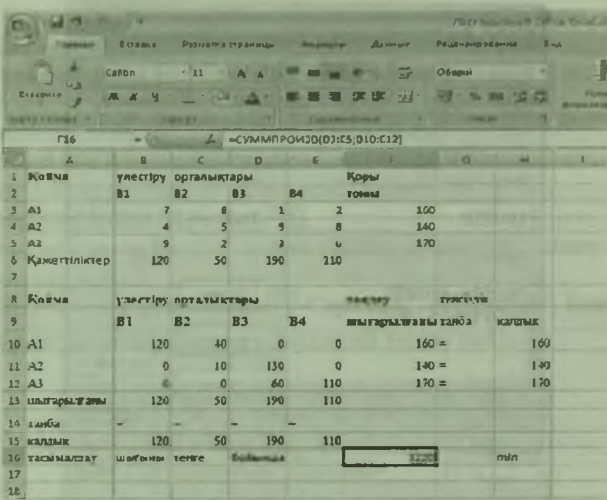
- **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-изменяя ячейки»** деген терезені толтыру үшін тінтуірді-курсорды B10-ға қойып, Shift F15 – бұйрықтарын орындаса жеткілікті. Жоғарыдағы бейне-терезе пайда болады.

- Осы бейне терезедегі **«Шектеулер-Ограничения»** деген жердегі **«Енгізу-добавить»** батырмасын басу қажет.





Нәтижеде жоғарыда көрсетілген бейне-терезелер пайда болады. Бірінші бейне-терезедегі **«Параметрлер-параметры»** батырмасын басу қажет және ашылған бейне-терезеде: **«Сызықтық модель-линейная модель»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Теріс емес мән – неотрицательные значения»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Ия-ок»** батырмасын басамыз. Алдыңғы терезеге кайта ораламыз. Ондағы **«Орында – выполнить»** бұйрығын орындаймыз. Нәтижесінде мынадай көрініс пайда болады.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Қойма	үлестіру	орталықтары			Қоры		
2		B1	B2	B3	B4	томы		
3	A1	7	8	1	2	160		
4	A2	4	5	9	8	140		
5	A3	9	2	3	6	170		
6	Қажеттіліктер	120	50	190	110			
7								
8	Қойма	үлестіру	орталықтары			[illegible]	[illegible]	
9		B1	B2	B3	B4	шығарылатыны	таңба	қалдық
10	A1	120	40	0	0	160	=	160
11	A2	0	10	130	0	140	=	140
12	A3	0	0	60	110	170	=	170
13	шығарылғаны	120	50	190	110			
14	таңба	=	=	=	=			
15	қалдық	120	50	190	110			
16	тасымалдау	шығыны	теңге	бойынша		3220		min

Ең тиімді маршрут тасымалдау матрицасында көрсетілген. Ал ең аз шығын сомасы F16-ұяшықта жазылған.

Демек, тиімді маршруттарды таңдай білгенде, тасымалдау шығыны F_{min}=3220 теңге болады.

Тапсырмалар

Көлік есебінің тірек жоспарын солтүстік-батыс бұрыш әдісімен анықтаңыз, мұндағы n - студенттің жеке нөмірі.

1-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	2	4	7	9	$200+10n$
A_2	5	1	8	12	$270+20n$
A_3	11	6	4	3	$130+30n$
Қажеттілік	$120+15n$	$80+25n$	$240+5n$	$160+15n$	

2-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	4	5	2	8	6	$115+30n$
A_2	3	1	9	7	3	$175+25n$
A_3	9	6	7	2	1	$130+20n$
Қажеттілік	$70+10n$	$220+5n$	$40+25n$	$30+20n$	$60+15n$	

Практикалық сабақ
Ең аз құн әдісі

Есеп. Көлік есебінің алғашқы тірек жоспарын ең аз құн әдісімен табу керек.
Шешімі: Берілген мәліметтерді 3-кесте түрінде жазамыз.

3-кесте

Жөнелту пункттері	**Тұтынушылар**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Қорлар**
A_1	7	8	1 160	2	160
A_2	4 120	5	9	8 20	140
A_3	9	2 50	3 30	6 90	170
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470

Кестеде минимум тариф A_1B_2 торында тұр. Осы бос торды толтырамыз. A_1 қоймасындағы жүк 160 бірлік, ал B_2 тұтынушының қажеттігі 190. Олай болса, $a_{13}=160$. A_1 қоймасындағы жүк таусылды. Қалған бос торлардағы минимум тариф A_3B_2 торында, $c_{32}=2$. Бұл торға $a_{23}=50$ деп жазылғандықтан B_2 тұтынушы толық қанағаттандырылады. Қалған бос торлардағы минимум тариф A_3B_3 торында, $c_{33}=3$. Демек, $a_{33}=30$. Сонымен, B_3 тұтынушы қанағаттандырылды. Ендігі минимум тариф A_2B_1 торында,

$c_{21}=4$. A_2 коймасында 140 бірлік жүк бар, ал B_1 тұтынушының қажеттігі 120 бірлік, олай болса $a_{21}=120$. B_1 тұтынушы да канағаттандырылды. B_4 тұтынушының қажеттілігі 100 бірлік жүк болғанымен A_3 коймада калған жүк бар болғаны 90 бірлік, олай болса $a_{34}=90$. Соңғы A_2B_4 торына $a_{24}=20$ деп жаза аламыз. Сонымен барлық жүк тасылып алынды және барлық тұтынушы қанағаттандырылды. Нәтижесінде тірек жоспарын аламыз:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 160 & 0 \\ 120 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 50 & 30 & 90 \end{pmatrix}$$

Тасымалдау жоспарындағы тасымалдаудың жалпы құны мынаны құрайды:

$$S=1\cdot160+4\cdot120+8\cdot20+2\cdot50+3\cdot30+6\cdot90=1530 \text{ теңге.}$$

Лабораториялык сабак
Ең аз құн әдісі

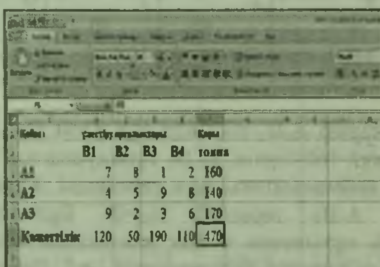
Ақпаратты модельдеу кезеңі

EXCEL парағын ашқаннан соң мынадай процедураларды орындаймыз.

- B3:E5 – диапазонда километр/тоннаж бойынша тариф жазылған;
- F3:F5 – диапазондарда ұсыныс көлемі көрсетілген;
- B6:E6 – диапазондарда сұраныс көлемі корсетілген.

Жалпы жағдайда кестенің құрылымын кеңейтіп, оны жалпы тиімділендіру есептерін шешудің кіріспе-тор көзі деп атауға болады.

Берілгендер бойынша EXCEL парағына енгізу кестесі

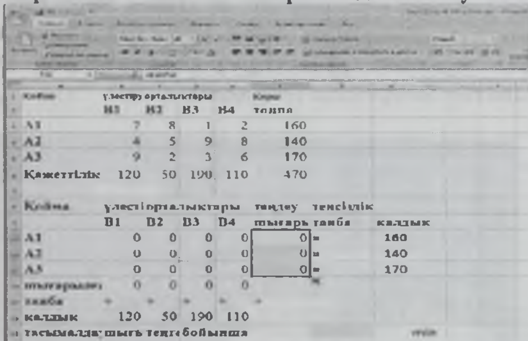


[illegible]	[illegible]				[illegible]
	B1	B2	B3	B4	[illegible]
A1	7	8	1	2	160
A2	4	5	9	8	140
A3	9	2	3	6	170
Қажеттілік	120	50	190	110	470

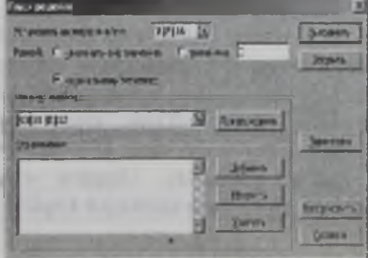
Есептің талабы бойынша екінші есептеу кестесін толтырамыз. Бұл кестеде есептеу амалдары жүргізіледі. Бұл кестеде:

- B10:E12 – диапазонда тасымалдау матрицасы жазылады;
- B10:E10….B12:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, H10:H12 ұяшықтардың мәндеріне тең; олар шектеулерді береді.

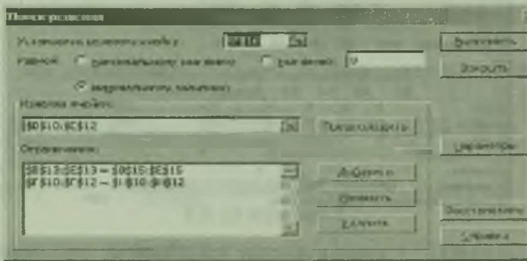
Берілгендер бойынша EXCEL парағында есептеу кестесі

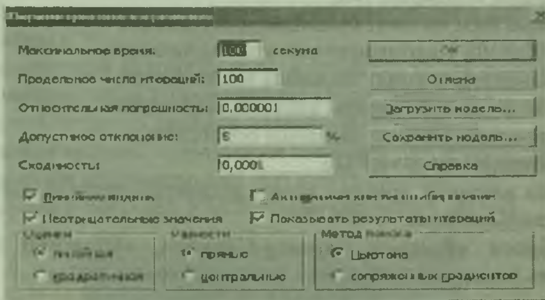


- B10:B12….E10:E12 - ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, B13-E13 ұяшықтардың мәндеріне тең;
- E10 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді: =сумм(B10:F10). Қалғандары «автотолтырылады».
- B13 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді; =сумм(B10:B12). Қалғандары «автотолтырылады».
- F16 – ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді: =суммпроизв(B3:E5;B10;E12).
  Осылайша көшірілу арқылы келесі есептерді шешуде, шешу процесі автоматтандырылады.
- Бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис»**, **«Шешімді іздеу-поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай терезе пайда

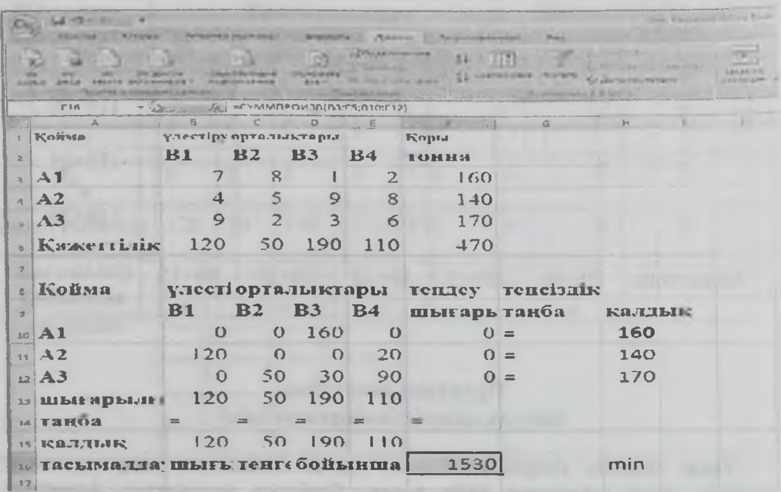


- Осындағы **«Мақсаттық ұяшықты анықта-установить целевую ячейку»** деген жерде F16 ұяшығының адресі көрсетілуі тиіс.
- **«Минимумдық мән-минимальное значение»** деген сөйлемдегі терезені басу керек.
- **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-изменяя ячейки»** деген терезені толтыру үшін тінтуірді-курсорды B10-ға қойып, Shift+E15 бұйрықтарын орындаса жеткілікті. Жоғарыдағы бейне-терезе пайда болады.
- Осы бейне терезедегі **«Шектеулер-Ограничения»** деген жердегі **«Енгізу-добавить»** батырмасын басу қажет.





Нәтижеде жоғарыда көрсетілген бейне-терезелер пайда болады. Бірінші бейне-терезедегі **«Параметрлер-параметры»** батырмасын басу қажет және ашылған бейне-терезеде: **«Сызықтық модель-линейная модель»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Теріс емес мән-неотрицательные значения»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Ия-ок»** батырмасын басамыз. Алдыңғы терезеге қайта ораламыз. Ондағы **«Орында-выполнить»** бұйрығын орындаймыз. Нәтижесінде мынадай көрініс пайда болады.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Қойма	үлестіру орталықтары				Қоры		
2		B1	B2	B3	B4	тонна		
3	A1	7	8	1	2	160		
4	A2	4	5	9	8	140		
5	A3	9	2	3	6	170		
6	Қажеттілік	120	50	190	110	470		
7								
8	Қойма	үлесті орталықтары				теңдеу	теңсіздік	
9		B1	B2	B3	B4	шығарь	таңба	қалдық
10	A1	0	0	160	0	0	=	160
11	A2	120	0	0	20	0	=	140
12	A3	0	50	30	90	0	=	170
13	шығарылы	120	50	190	110			
14	таңба	=	=	=	=	=		
15	қалдық	120	50	190	110			
16	тасымалда	шығы	теңг	бойынша		1530		min
17								

Ең тиімді маршрут тасымалдау матрицасында көрсетілген. Ал ең аз шығын сомасы F16 ұяшықта жазылған. Демек, тиімді маршруттарды таңдай білгенде, тасымалдау шығыны F_{min}=1530 теңге болады.

Тапсырмалар

Көлік есебінің тірек жоспарын ең аз құн әдісімен анықтаңыз, мұндағы n - студенттің жеке нөмірі.

1-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	2	4	7	9	$200+10n$
A_2	5	1	8	12	$270+20n$
A_3	11	6	4	3	$130+30n$
Қажеттілік	$120+15n$	$80+25n$	$240+5n$	$160+15n$	

2-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	4	5	2	8	6	$115+30n$
A_2	3	1	9	7	3	$175+25n$
A_3	9	6	7	2	1	$130+20n$
Қажеттілік	$70+10n$	$220+5n$	$40+25n$	$30+20n$	$60+15n$	

Практикалық сабақ
Фогель аппроксимациясы әдісі

Есеп. Фогель аппроксимациясы әдісін пайдалана отырып, көлік есебінің тірек жоспарын табу керек. Берілген мәліметтер 4-кестеде көрсетілген (бұл тапсырманың тірек жоспары ең аз құн әдісімен шығарылған).

4-кесте.

Жөнелту пункттері	**Тұтынушылар**				
	B_1	B_2	B_3	B_4	**Қорлар**
A_1	7	8	1	2	160
A_2	4	5	9	8	140
A_3	9	2	3	6	170
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470

Мысалы, A_2 жолындағы минимум тарифтер 4 пен 5, олардың айырымы 5-4=1. Осы сияқты B_4 бағанында минимум тарифтер 2 мен 6 айырымы 6-2=4. Әрі қарай барлық бағандар мен жолдардағы минимум тарифтердің айырымдарын анықтап, қосымша баған мен жолға жазып қоямыз. Жоғарыда баяндалған Фогель аппроксимациясы әдісін әрі қарай колданамыз.

Жөнелту пункттері	Тұтынушылар					Жолдар бойынша айырым					
	B_1	B_2	B_3	B_4	Қорлар						
A_1	7	8	1	2	160	1	6	-	-	-	-
A_2	4	5	9	8	140	1	1	1	1	1	0
A_3	9	2	3	6	170	1	1	1	7	-	-
Қажеттіліктер	120	50	190	110	470						
Бағаналар бойынша айырым	3	3	2	4							
	3	3	2	-							
	5	3	6	-							
	5	3	-	-							
	-	0	-	-							
	-	0	-	-							

Нәтижесінде мына тірек жоспарын аламыз:

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 50 & 110 \\ 120 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 30 & 140 & 0 \end{pmatrix}$$

Тасымалдау жоспарындағы жалпы құн

$$S=1\cdot 50+2\cdot 110+4\cdot 120+5\cdot 20+2\cdot 30+3\cdot 140=1330$$

теңгені құрайды

Лабораториялық сабақ

Фогель аппроксимациясы әдісі

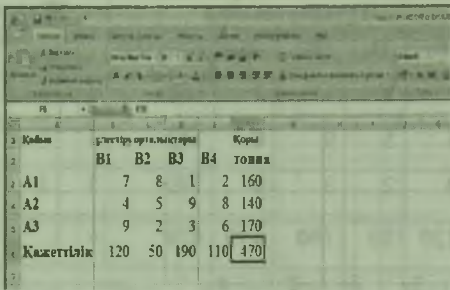
Ақпаратты модельдеу кезеңі

EXCEL парағын ашқаннан соң мынадай процедураларды орындаймыз.

- B3:E5 диапазонда километр/тоннаж бойынша тариф жазылған;
- F3:F5 диапазондарда ұсыныс көлемі көрсетілген;
- B6:E6 диапазондарда сұраныс көлемі көрсетілген.

Жалпы жағдайда кестенің ақпараттық мүмкіндіктерін, құрылымын кеңейтіп, оны жалпы тиімділендіру есептерін шешудің кіріспе-торкөзі деп атауға болады.

Берілгендер бойынша EXCEL парағына енгізу кестесі



Қойма	Үлестіру орталықтары				Қоры
	B1	B2	B3	B4	тонна
A1	7	8	1	2	160
A2	4	5	9	8	140
A3	9	2	3	6	170
Қажеттілік	120	50	190	110	470

- Есептің талабы бойынша екінші есептеу кестесін толтырамыз. Бұл кестеде есептеу амалдары жүргізіледі.
  Бұл кестеде:
- B10:E12- диапазонда тасымалдау матрицасы жазылады;
- B10:E10....B12:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, H10:H12 ұяшықтардың мәндеріне тең; олар шектеулерді береді.

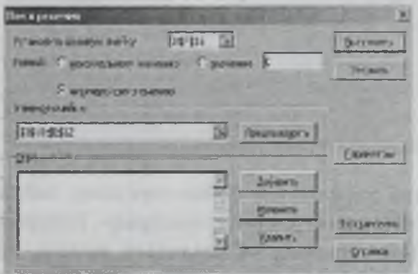
Берілгендер бойынша EXCEL парағында есептеу кестесі

Қойма	Үлестіру орталықтары				Қоры		
	B1	B2	B3	B4	тонна		
A1	7	8	1	2	160		
A2	4	5	9	8	140		
A3	9	2	3	6	170		
Қажеттілік	120	50	190	110	470		
Қойма	үлестіорталықтары				теңдеу	теңсіздік	
	B1	B2	B3	B4	шығарь	таңба	қалдық
A1	0	0	0	0	0	=	160
A2	0	0	0	0	0	=	140
A3	0	0	0	0	0	=	170
шығарылғ	0	0	0	0			
таңба	=	=	=	=	=		
қалдық	120	50	190	110			
тасымалдаушығытеңгбойынша							min

- B10:B12....E10:E12 - ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, B13-E13 ұяшықтардың мәндеріне тең;
- E10 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:
  =сумм(B10:F10). Қалғандары «автотолтырылады».
- B13 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді;
  =сумм(B10:B12). Қалғандары «автотолтырылады».

- F16 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді: =суммпроизв(B3:E5;B10;E12).

  Осылайша көшірілу арқылы келесі есептерді шешуде, шешу процесі автоматтандырылады.
- Бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис», «Шешімді іздеу-поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай терезе пайда

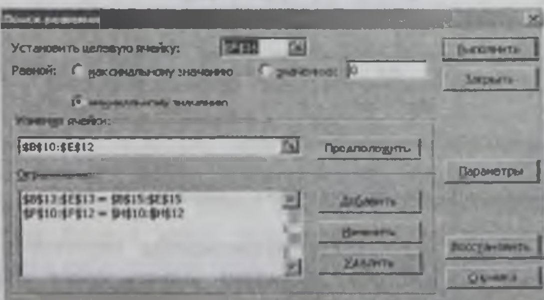


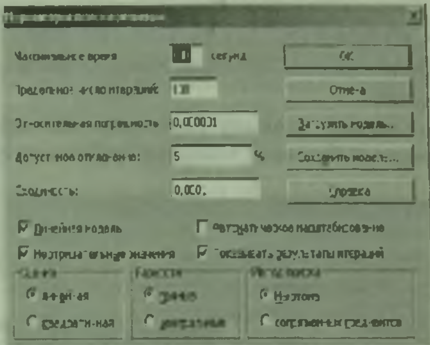
- Осындағы **«Мақсаттық ұяшықты анықта-установить целевую ячейку»** деген жерде F16 ұяшығы көрсетілуі тиіс.

- **«Минимумдық мән-минимальное значение»** деген сөйлемдегі терезені басу керек.

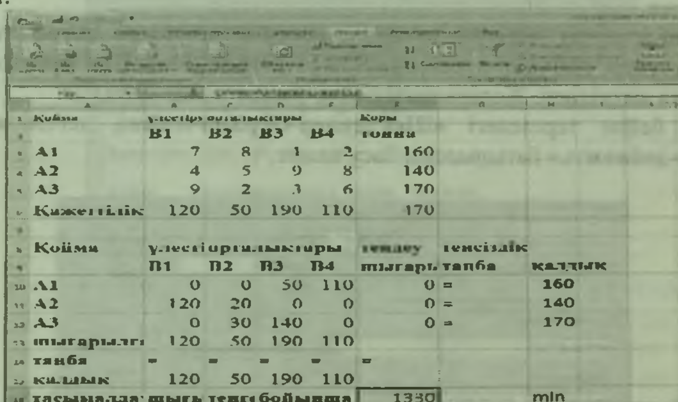
- **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-изменяя ячейки»** деген терезені толтыру үшін тінтуірді-курсорды B10-ға қойып, Shift E15 бұйрықтарын орындаса жеткілікті. Жоғарыдағы бейне-терезе пайда болады.

- Осы бейне терезедегі **«Шектеулер-Ограничения»** деген жердегі **«Енгізу-добавить»** батырмасын басу қажет.





Нәтижеде жоғарыда көрсетілген бейне-терезелер пайда болады. Бірінші бейне-терезедегі **«Параметрлер-параметры»** батырмасын басу қажет және ашылған бейне-терезеде: **«Сызықтық модель-линейная модель»** терезешесіне жалауша ілінуі тиіс. **«Теріс емес мән – неотрицательные значения»** терезешесіне жалауша ілінуі тиіс. **«Ия-ок»** батырмасын басамыз. Алдыңғы терезеге қайта ораламыз. Ондағы **«Орында – выполнить»** бұйрығын орындаймыз. Нәтижесінде мынадай көрініс пайда болады.



	A	B	C	D	E	F	G	H
1	Қойма	үлестіру орталықтары				Қоры		
2		B1	B2	B3	B4	тонна		
3	A1	7	8	1	2	160		
4	A2	4	5	9	8	140		
5	A3	9	2	3	6	170		
6	Қажеттілік	120	50	190	110	170		
7								
8	Қойма	үлестіру орталықтары				теңдеу	теңсіздік	
9		B1	B2	B3	B4	шығары	таңба	қалдық
10	A1	0	0	50	110	0	=	160
11	A2	120	20	0	0	0	=	140
12	A3	0	30	140	0	0	=	170
13	шығарылғ	120	50	190	110			
14	таңба	=	=	=	=	=		
15	қалдық	120	50	190	110			
16	тасымалдау шығы теңге бойынша					1330		min

Ең тиімді маршрут тасымалдау матрицасында көрсетілген. Ал ең аз шығын сомасы F16 ұяшықта жазылған. Демек, тиімді маршруттарды таңдай білгенде, тасымалдау шығыны

$$F_{min}=1330$$

теңге болады.

Тапсырмалар

Көлік есебінің тірек жоспарын Фогель аппроксимациясы әдісімен анықтаңыз, мұндағы n- студенттің жеке нөмірі.

1-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	2	4	7	9	200+10 n
A_2	5	1	8	12	270+20 n
A_3	11	6	4	3	130+30 n
Қажеттілік	120+15 n	80+25 n	240+5 n	160+15 n	

2-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	4	5	2	8	6	115+30 n
A_2	3	1	9	7	3	175+25 n
A_3	9	6	7	2	1	130+20 n
Қажеттілік	70+10 n	220+5 n	40+25 n	30+20 n	60+15 n	

§9. Көлік есебінің тиімді жоспарын табу.

Көлік есебінде $A_1, A_2, ..., A_m$ деп белгіленген барлығы m қоймада жинақталған біртекті жүкті $B_1, B_2, ..., B_n$ деп белгіленген барлығы n тұтынушыға тасып берудің тиімді жоспарын анықтау керек. Тиімділік белгісі ретінде барлық жүкті тасымалдаудың ең аз құны алынады. Тиімділік белгісі ретінде басқа параметрлер де қарастырылуы мүмкін.

Жүктің i-қоймадан j-тұтынушыға тасымалданатын көлемін x_{ij}, тасымалдау тарифтерін c_{ij}, i-қоймадағы жүк көлемін a_i, ал j-тұтынушының қажеттілігін b_j деп белгіленеді. Қарастырылған көлік есебінің математикалық қойылымы: мақсаттық

$$F=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij} \qquad (1)$$

функциясының мына

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j \quad (j=\overline{1,n}), \qquad (2)$$

$$\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i \quad (i=\overline{1,m}), \qquad (3)$$

$$x_{ij}\geq 0 \quad (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}) \qquad (4)$$

шарттар орындалғандағы минимум мәнін табу керек.

Осы (2)-(4) шарттарды қанағаттандыратын $X=(x_{ij})$ $(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n})$ матрица элементтерін көлік есебінің жоспары деп аталады. Мақсаттық (1) функцияның минимумын қамтамасыз ететін жоспарды көлік есебінің тиімді жоспары деп атайды.

Теорема. Егер көлік есебінің $X^*=(x_{ij}^*)$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ тірек жоспары үшін $x_{ij}\succ 0$ $(x_{ij}=0)$ болғанда $\beta_j-\alpha_i=c_{ij}$ (сәйкесінше $\beta_j-\alpha_i\leq c_{ij}$) болатын қоймалар мен тұтынушылардың потенциалдары деп аталатын α_1, α_2, ..., α_m, β_1, β_2, ..., β_n сандары табылса, онда $X^*=(x_{ij}^*)$ тірек жоспары тиімді жоспар болады.

Теорема көлік есебінің тиімді жоспарын табудың алгоритмін анықтайды. Ізделінді α_1, α_2, ..., α_m, β_1, β_2, ..., β_n потенциалдарды кестедегі толтырылған торлар үшін анықталатын $\beta_j-\alpha_i=c_{ij}$ $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$ теңдеулер системасынан табады. Бұл система $n+m$ белгісізді байланыстырған $n+m-1$ теңдеуден тұрады. Теңдеулер санынан белгісіздер саны көп болғандықтан мұндай системаның шексіз көп шешуі болады. Көп шешудің ішінен біреуін табу үшін бір белгісізге алдын ала кез келген нақты мән беру керек, мысалы, $\alpha_1=0$ десек болады.

Потенциалдардың мүмкін мәндері табылғасын кестенің толтырылмаған бос торлары үшін $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$ сандарын анықтайды. Егер осылай табылған α_{ij} сандарының ішінде оң сандар болмаса, онда алынған тірек жоспары тиімді жоспар болады. Егер кемінде бір бос тор үшін $\alpha_{ij}\succ 0$ болса, онда тірек жоспары тиімді жоспар болмайды. Жаңа тірек жоспарына көшу үшін $\alpha_{ij}\succ 0$ болатын бос торлардың ішінен α_{ij} сандарының максимумы жазылған торды тауып аламыз. Осы торды толтыру үшін тізбек (цикл) құрады.

Көлік есебінің тізбегі (циклі) деп төбелері толтырылған торларда, ал қырлары жолдардың немесе бағандардың бойында жататын сынық сызықты айтады. Тізбектің (циклдің) әр төбесінде тек екі қыр қиылысады, оның біреуі жолдың бойында жатса, екіншісі бағанның бойында жатады. Тізбектің өзімен өзі қиылысатын нүктелері төбе болмайды.

Егер көлік есебінің тірек жоспары дұрыс табылса, онда әрбір бос тор үшін тек бір тізбек құруға болады. Бос тор үшін тізбек бойынша жаңа тірек жоспарына көшу керек. Ол үшін тізбектің әр төбесінің таңбасын қоямыз: бос торға плюс таңбасын қойсақ, тізбектің қалған төбелерінің таңбасын минус және плюс етіп кезектестіріп қоямыз.

Жаңа кестедегі тізбектің (циклдің) бос торына минус таңбалы торлардағы сандардың минимумын жазамыз. Сонымен бірге осы санды плюс таңбалы торлардағы сандарға қосып, минус таңбалы торлардағы сандардан алып тастаймыз. Бұрын бос болған тор енді толтырылады, ал минимум сан жазылған минус таңбалы тор босап қалады. Жүктің бос торға сәйкес анықталған тізбек (цикл) бойындағы төбелер бойынша орын ауыстыруы көлік есебінің жаңа тірек жоспарын анықтайды. Осы әдіспен берілген тірек жоспарынан басқа тірек жоспарына көшуді қайта есептеу тізбегі (циклі) бойынша қозғалу деп атайды.

Тізбек (цикл) бойынша қозғалу кезінде толтырылған торлардың саны өзгермейді. Егер минус таңбалы екі не одан да көп торда бірдей сандар бар болса, онда олардың біреуін ғана босатып, қалғандарына нөл саны жазылады. Жаңа алынған тірек жоспардың тиімділігін тексеру керек. Ол үшін қоймалар мен тұтынушылардың потенциалдарын анықтап, кестенің бос торлары үшін $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ мәндерін есептейді. Егер бұл сандардың ішінде оң таңбалы сандар болмаса, онда алынған тірек жоспарының тиімді болғаны. Егер олардың ішінде кемінде бір оң таңбалы сан табылса, онда потенциалдар әдісін тағы қолдану арқылы жаңа тірек жоспарына көшу керек.

Көлік есебінің тиімді жоспарын потенциалдар әдісімен анықтағанда алдымен қандай да бір әдіспен көлік есебінің міндетті түрде азғындалмаған (яғни $n+m-1$ торы толтырылған) тірек жоспары анықталып, бұл жоспар бірте-бірте тиімдендіріледі.

Көлік есебін дифференциалдық рента әдісімен шешкенде алдымен жүктің белгілі бір бөлігінің тиімді тасымалдану жоспары жасалып, келесі қадамдарда тасымалданбаған жүктің көлемі біртіндеп азайтыла береді.

Тасымалданатын жүктің бастапқы жоспары былай анықталады. Берілген көлік есебі кестесінің әрбір бағанындағы минимал тарифті анықтайды, сөйтіп оны дөңгелектеп белгілейді. Мұндай белгіленген сан тұрған бос торды толтырады. Оған мүмкін максимум мән жазылады. Соның нәтижесінде шартты тиімді тасымалдау жоспары алынады. Бұл жоспар көлік есебі шектеулерінің бәрін қанағаттандырмайды. Сондықтан келесі қадамдарда тасымалдау құны минимум мәнге ие болатындай етіп тасымалданбаған жүкті азайта беру кажет. Ол үшін алдымен артық және кем жолдарды анықтайды.

Жүк қоры толық тасымалданбаған жолды артық (немесе плюс) жол деп атайды. Керісінше, жүк қоры толық тасымалданып алынғанымен тұтынушылар толық қанағаттандырылмаған жолды кем (немесе минус) жол деп атайды.

Артық және кем жолдар анықталғасын әр баған үшін минимум тариф пен артық жолдағы оған жақын тарифтың арасындағы айырманың абсолют шамасы анықталады. Егер бағандағы белгіленген минимум тариф артық жолда жатса, онда мұндай айырма анықталмайды. Табылған айырмалардың минимумын аралык рента деп атайды.

Жаңа кестеде кем жолдардағы ескі тарифтерге аралық рента қосылады. Жаңа кестенің басқа элементтері еш өзгеріссіз қалдырылғасын бос торларды толтыру кажет. Бұрынғы кестеге қарағанда жаңа кестеде толтырылатын торлардың саны біреуге артады. Толтырылған қосымша тор аралық рента жазылған бағанға тиісті. Қалған торлар ретінде әр бағанда минимум тарифтері бар торлар алынады.

Егер жаңа кесте тиімді жоспарды анықтамаса, онда дифференциалдық рента әдісін қолданып жаңа жоспарға ауысамыз. Тиімді жоспар алынғанша бұл әдістің бірнеше рет қолданылуы мүмкін. Белгілі бір саны шектеулі қадамнан кейін тасымалданбаған жүк қалмайды, яғни сонымен тиімді жоспар алынады.

Көлік есебінің тиімді жоспарын табуға арналған дифференциалдық рента әдісінің есептеулері потенциалдар әдісінің есептеулеріне қарағанда қолдануға оңайырақ. Сондықтан көлік есебін дербес компьютер комегімен шешкенде дифференциалдық рента әдісінің алгоритмі қолданылады.

Мысал. Бастапқы мәліметтері төмендегі кестемен берілген көлік есебінің тиімді жоспарын потенциалдар әдісімен анықтаңыз.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	7	12	4	8	5	180
A_2	1	8	6	5	3	350
A_3	6	13	8	7	4	20
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550

Осы көлік есебінің азғындалмаған тірек жоспарын солтүстік-батыс бұрыш әдісімен анықтауға болады.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	α
A_1	7 110	12 70	4	8	5	180	$\alpha_1 = 0$
A_2	1	8 20	6 120	5 80	3 130	350	$\alpha_2 = 4$
A_3	6	13	8	7	4 20	20	$\alpha_3 = 3$
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	
β	$\beta_1 = 7$	$\beta_2 = 12$	$\beta_3 = 10$	$\beta_4 = 9$	$\beta_5 = 7$		

Берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F = 110\cdot 7 + 70\cdot 12 + 20\cdot 8 + 120\cdot 6 + 80\cdot 5 + 130\cdot 3 + 20\cdot 4 = 3360 \text{ теңге.}$$

A_1, A_2, A_3 коймаларының потенциалдарын сәйкесінше α_1, α_2, α_3 деп, ал B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 тұтынушыларының потенциалдарын сәйкесінше β_1, β_2, β_3, β_4, β_5 деп белгілейді. Жоғарғы кестенің толтырылған торлары үшін келесі системаны

$\beta_1 - \alpha_1 = 7$, $\beta_2 - \alpha_1 = 12$, $\beta_2 - \alpha_2 = 8$, $\beta_3 - \alpha_2 = 6$, $\beta_4 - \alpha_2 = 5$, $\beta_5 - \alpha_2 = 3$, $\beta_5 - \alpha_3 = 4$

алады. Бұл система 8 белгісізі бар 7 теңдеуден құралған. Мұндай системаның шексіз көп шешуі болатындықтан, мысалы, $\alpha_1 = 0$ деп алып сол мүмкін шешулердің біреуін анықтайды: $\alpha_2 = 4$, $\alpha_3 = 3$, $\beta_1 = 7$, $\beta_2 = 12$, $\beta_3 = 10$, $\beta_4 = 9$, $\beta_5 = 7$. Енді осы кестедегі бос торлар үшін $\alpha_{ij} = \beta_j - \alpha_i - c_{ij}$ мәндерін есептейді:

$$\alpha_{13} = \beta_3 - \alpha_1 - c_{13} = 10 - 0 - 4 = 6 \succ 0,\ \alpha_{14} = \beta_4 - \alpha_1 - c_{14} = 9 - 0 - 8 = 1 \succ 0,$$

$$\alpha_{15} = \beta_5 - \alpha_1 - c_{15} = 7 - 0 - 5 = 2 \succ 0,\ \alpha_{21} = \beta_1 - \alpha_2 - c_{21} = 7 - 4 - 1 = 2 \succ 0,$$

$$\alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 7 - 3 - 6 = -2 \prec 0,\ \alpha_{31} = \beta_1 - \alpha_3 - c_{31} = 7 - 3 - 6 = -2 \prec 0,$$

$$\alpha_{32} = \beta_2 - \alpha_3 - c_{32} = 12 - 3 - 13 = -4 \prec 0,\ \alpha_{34} = \beta_4 - \alpha_3 - c_{34} = 9 - 3 - 7 = -1 \prec 0.$$

Бұдан кестедегі тірек жоспарының тиімді болмайтыны байқалады. Оң таңбалы сандардың ең үлкені $\alpha_{13} = 6$ кестенің A_1B_3 торына сәйкес келеді. Демек, бұл тор үшін мына $A_1B_3 \to A_2B_3 \to A_2B_2 \to A_1B_2 \to A_1B_3$ тізбекті (циклді) алады. Тізбектің торларын таңбалаймыз: бос A_1B_3 торына плюс таңба берсек, қалған торлардың таңбасы тізбек бойымен кезектесіп ауыстырылады.

12 -70	4 +
8 +20	6 -120

Енді теріс таңбалы торлар үшін $min(70,120)=70$ мәнін анықтайды. Қайта есептеу тізбегі бойынша қозғалғанда мынаны

12	4 70
8 90	6 50

аламыз. Демек, жаңа тірек жоспары мына

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	7 110	12	4 70	8	5	180
A_2	1	8 90	6 50	5 80	3 130	350
A_3	6	13	8	7	4 20	20
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550

кестемен анықталады. Бұл жағдайда берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F=110\cdot 7+70\cdot 4+90\cdot 8+50\cdot 6+80\cdot 5+130\cdot 3+20\cdot 4=2940$$

теңгені құрайды.

Потенциалдар әдісін тағы бір рет қолданғанымызда қоймалар мен тұтынушылардың потенциалдары анықталады.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	α
A_1	7 110	12	4 70	8	5	180	$\alpha_1=0$
A_2	1	8 90	6 50	5 80	3 130	350	$\alpha_2=-2$
A_3	6	13	8	7	4 20	20	$\alpha_3=3$
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	
β	$\beta_1=7$	$\beta_2=6$	$\beta_3=4$	$\beta_4=3$	$\beta_5=1$		

Бұл кестедегі бос торлар үшін $\alpha_{12} = -6 \prec 0$, $\alpha_{14} = -5 \prec 0$, $\alpha_{15} = -4 \prec 0$, $\alpha_{21} = 8 \succ 0$, $\alpha_{31} = -2 \prec 0$, $\alpha_{32} = -10 \prec 0$, $\alpha_{33} = -7 \prec 0$, $\alpha_{34} = -7 \prec 0$ мәндері есептелінеді. Демек, соңғы тірек жоспары тиімді емес. Оң таңбалы сан $\alpha_{13} = 6$ кестенің A_1B_2 торына сәйкес келеді. Демек, бұл тор үшін мына $A_2B_1 \to A_1B_1 \to A_1B_3 \to A_2B_3 \to A_2B_1$ тізбек (цикл) алынады. Тізбектің торларын таңбалаймыз: бос A_2B_1 торына плюс таңба берсек, қалған торлардың таңбасы тізбек бойымен кезектесіп ауыстырылады.

7 -110	12	4 +70
1 +	8 90	6 -50

Енді теріс таңбалы торлар үшін $\min(110, 50) = 50$ мәнін анықтайды. Қайта есептеу тізбегі бойынша қозғалғанда мынаны

7 60	12	4 120
1 50	8 90	6

аламыз. Демек, жаңа тірек жоспары мына

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	7 60	12	4 120	8	5	180
A_2	1 50	8 90	6	5 80	3 130	350
A_3	6	13	8	7	4 20	20
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550

кестемен анықталады. Бұл жағдайда берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F = 60 \cdot 7 + 120 \cdot 4 + 50 \cdot 1 + 90 \cdot 8 + 80 \cdot 5 + 130 \cdot 3 + 20 \cdot 4 = 2540$$

теңгені құрайды.

Потенциалдар әдісін тағы қолданғанымызда коймалар мен тұтынушылардың потенциалдары анықталады.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	α
A_1	7 60	12	4 120	8	5	180	$\alpha_1=0$
A_2	1 50	8 90	6	5 80	3 130	350	$\alpha_2=6$
A_3	6	13	8	7	4 20	20	$\alpha_3=5$
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	
β	$\beta_1=7$	$\beta_2=14$	$\beta_3=4$	$\beta_4=11$	$\beta_5=9$		

Бұл кестедегі бос торлар үшін $\alpha_{12}=2\succ 0$, $\alpha_{14}=3\succ 0$, $\alpha_{15}=4\succ 0$, $\alpha_{23}=-8\prec 0$, $\alpha_{31}=-4\prec 0$, $\alpha_{32}=-4\prec 0$, $\alpha_{33}=-9\prec 0$, $\alpha_{34}=-1\prec 0$ мәндері есептелінеді. Демек, соңғы тірек жоспары тиімді емес. Оң таңбалы сан $\alpha_{15}=4$ кестенің A_1B_5 торына сәйкес келеді. Демек, бұл тор үшін мына $A_1B_5 \to A_2B_5 \to A_2B_1 \to A_1B_1 \to A_1B_5$ тізбек (цикл) алынады. Тізбектің торларын таңбалаймыз: бос A_1B_5 торына плюс таңба берсек, қалған торлардың таңбасы тізбек бойымен кезектесіп ауыстырылады.

7 -60	12	4 120	8	5 +
1 +50	8 90	6	5 80	3 -130

Енді теріс таңбалы торлар үшін $\min(60,130)=60$ мәнін анықтайды. Қайта есептеу тізбегі бойынша қозғалғанда мынаны

7	12	4 120	8	5 60
1 110	8 90	6	5 80	3 70

аламыз. Демек, жаңа тірек жоспары мына

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	7	12	4 120	8	5 60	180

A_2	1 110	8 90	6	5 80	3 70	350
A_3	6	13	8	7	4 20	20
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550

кестемен анықталады. Бұл жағдайда берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F = 120\cdot 4 + 60\cdot 5 + 110\cdot 1 + 90\cdot 8 + 80\cdot 5 + 70\cdot 3 + 20\cdot 4 = 2300$$

теңгені құрайды. Потенциалдар әдісін қайталап осы тірек жоспарының тиімді екенін көрсетеді.

Мысал. Жоғарыда қарастырылған көлік есебінің тиімді жоспарын дифференциалдық рента әдісімен анықтаймыз. Бастапқы кестеден келесі кестеге көшеміз. Мұнда әр бағандағы минимал тариф [ ] арқылы белгіленді және осылай белгіленген торларға мүмкін мәндер жазылды. Мысалы, B_1 бағандағы минимал $\min(7,1,6)=1$ тариф A_2B_1 торында тұр, оны $[1]$ деп белгілейді. Сол сияқты, B_2, B_3, B_4 және B_5 бағандарындағы минимал тарифтер сәйкесінше $[8]$, $[4]$, $[5]$, $[3]$. Белгіленген торларды толтыру керек. Демек, A_2 коймасындағы жүктің қоры 350 т, ал B_1 тұтынушының қажеттігі 110 т болғандықтан A_2B_1 торына $x_{21}=110$ мәнін жазады. Дәл осы сияқты A_2B_2, A_1B_2, A_2B_4 және A_2B_5 торларына сәйкесінше $x_{22}=90$, $x_{12}=120$, $x_{24}=80$ және $x_{21}=70$ мәндерін жазады. Бұдан кейін A_1 коймасындағы 180 т жүктің тек 120 т жүгі тасылып алынғандықтан бұл қоймада әлі 60 т жүк қалып қойды, яғни A_1 жолы артық жол болады. Ал A_2 қоймасындағы барлық жүк (350 т) толық тасылып алынғанымен B_5 тұтынушының қажеттігі өтелмей қалды. Демек, A_2 жолы кем жол болады. A_3 қоймадағы жүк (20 т) тасылмай қалды, сондықтан A_3 жолы артық жол болатыны түсінікті. Енді әр бағандағы белгіленген минимал тариф пен оған жақын тарифтің айырмасының абсолют шамасын соңғы жолға жазамыз. Мысалы, B_1 бағаны үшін $a_1 = 6-1=5$ айырмасы анықталады. Сол сияқты, B_2, B_4, B_5 бағандары үшін айырмалары $a_2 = 12-8=4$, $a_4 = 7-5=2$, $a_5 = 4-3=1$. Есептеу нәтижелері төмендегі кестеге жазылды.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	7	12	[4] 120	8	5	180	+60
A_2	[1]	[8]	6	[5]	[3]	350	-80

	110	90		80	70		
A_3	6	13	8	7	4	20	+20
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	
Айырма	5	4	-	2	1		

Айырмалардың минимумы $\min(5,4,2,1)=1$ аралық рентаны анықтайды: $a=1$. Жаңа кестеде кем жолдың тарифтеріне аралық рентаны қосып жазамыз. Сонда әр бағандағы минимал тарифі бар торлар саны біреуге артып енді 6 болды. A_1 қоймадағы жүктің қоры 180 т болғанымен одан тасымалданғаны 120 т. Қоймадағы жүк толық тасымалданбағандықтан A_1 жолы артық жол болады. Ал A_2 қоймасындағы 350 т жүк түгел тасылып алынғанмен B_5 тұтынушының қажеттігі қанағаттандырылмады. Сондықтан A_2 жолы кем жол болады. A_3 қоймасындағы 20 т жүк толық тасылғанымен B_5 тұтынушының қажеттігі қанағаттандырылмады, Демек, A_3 жолы кем жол болады. Дифференциалдық рента әдісін тағы қолданғанда төмендегі кесте алынады.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	7	12	[4] 120	8	5	180	+60
A_2	[2] 110	[9] 90	7	[6] 80	[4] 70	350	-60
A_3	6	13	8	7	[4] 20	20	-0
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	
Айырма	5	3	-	2	1		

Айырмалардың минимумы $\min(5,3,2,1)=1$ аралық рентаны анықтайды: $a=1$. Жаңа кестеде кем жолдың тарифтеріне аралық рентаны қосып жазамыз. Сонда әр бағандағы минимум тарифі бар торлар саны біреуге артып енді 7 болды. Дифференциалдық рента әдісін тағы қолданғанда төмендегі кесте алынады.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	7	12	[4]	8	[5]	180	0

			120		60		
A_2	[3] 110	[10] 90	8	[7] 80	[5] 70	350	0
A_3	7	14	9	8	[5] 20	20	0
Қажеттілік	110	90	120	80	150	550	

Тасымалдаудың берілген тарифі бойынша тасымалдау құны

$F = 120\cdot 4 + 60\cdot 5 + 110\cdot 1 + 90\cdot 8 + 80\cdot 5 + 70\cdot 3 + 20\cdot 4 = 2300$ теңге.

Практикалық сабақ
Дифференциалдық рента әдісі

Мысал: Мәліметтері келесі кестемен берілген көлік есебін қарастырайық

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	6	2	7	3	150
A_2	8	1	2	5	280
A_3	4	9	3	6	340
Қажеттілік	100	200	300	170	770

Осы көлік есебінің тиімді жоспарын дифференциалдық рента әдісімен анықтау керек. Бастапкы кестеден келесі кестеге көшеміз. Мұнда әр бағандағы минимум тариф [ ] арқылы белгіленіп, мұндай торларға мүмкін болған максимум мәндер жазылады. Мысалы, B_1 бағанындағы минимум тариф min(6,8,4)=4 A_3B_1 торында тұр, оны [4] деп белгілейді. Сол сияқты, B_2, B_3 және B_4 бағандарындағы минимум тарифтер сәйкесінше [1], [2], [3] болады. Белгіленген торларды толтыру керек. Демек, A_3 қоймасындағы жүктің қоры 340 т, ал B_1 тұтынушының қажеттігі 100 т болғандықтан A_3B_1 торына x_{31}=100 мәні жазылады. Осы сияқты A_2B_2, A_2B_3 және A_1B_4 торларына сәйкесінше x_{22}=200, x_{23}=80 және x_{14}=150 мәндерін жазады. Сонда шартты тиімді жоспар анықталған келесі кестені аламыз:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	6	2	7	[3] 150	150
A_2	8	[1] 200	[2] 80	5	280
A_3	[4] 100	9	3	6	340
Қажеттілік	100	200	300	170	770

Бұлай алынған жоспар бастапқы көлік есебінің барлық шектеулерін қанағаттандырмайтыны түсінікті. Сондықтан көлік есебін шешудің келесі қадамдарындада тасымалдау құны барынша минимум болатындай етіп тасымалданбаған жүкті бірте-бірте азайта беру керек. Ол үшін алдымен жоғарыда айтылғандай артық және кем жолдарды табу керек. Енді A_3 қоймасындағы 340 т жүктің тек 100 т жүгі тасылып алынғандықтан бұл қоймада әлі 240 т жүк қалып қойды, яғни A_3 жолы артық жол болады. Ал A_1 қоймасындағы барлық жүк (150 т) толық тасылып алынғанымен B_4 тұтынушының қажеттігінің бір бөлігі (20 т) өтелмей қалды. Демек, A_1 жолы кем жол болады. Сол сияқты, A_2 қоймадағы барлық жүк (280 т) толық тасылып алынса да B_3 тұтынушының қажеттігінің бір бөлігі (220 т) өтелмеді. Сондықтан A_2 жолы кем жол болатыны түсінікті.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	6	2	7	[3] 150	150	-20
A_2	8	[1] 200	[2] 80	5	280	-220
A_3	[4] 100	9	3	6	340	+240
Қажеттілік	100	200	300	170	770	

Бұл кестеден 770 т жүктің 240 т жүгі әлі тасымалданбағанын көреміз. Егер бағандағы белгіленген минимум тариф кем жолда жатса, онда әр баған үшін анықталған минимум тариф пен артық жолдағы оған жақын тарифтың арасындағы айырымның абсолют шамасы анықталады. Егер бағандағы белгіленген минимум тариф артық жолда жатса, онда мұндай айырым анықталмайды. Мысалы, B_1 бағанында минимум тариф артық жолға тиісті болғандықтан айырым анықталмайды, ал B_2, B_3 және B_4

бағандарында минимум тарифтер кем жолдарға тиісті болғандықтан келесі айырымдарды есептеп аламыз: 9-1=8, 3-2=1 және 6-3=3. Сонда мына кесте көрінеді:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	6	2	7	[3] 150	150	-20
A_2	8	[1] 200	[2] 80	5	280	-220
A_3	[4] 100	9	3	6	340	+240
Қажеттілік	100	200	300	170	770	
Айырым	-	8	1	3		

Табылған айырымдардың минимумын аралық рента дейді. Қарастырылған мысал үшін аралық рента a=min(8,1,3)=1. Жаңа кестедегі кем жолдардағы ескі тарифтерге аралық рентаны қосып, ал артық жолдардағы тарифтерді өзгеріссіз жазамыз.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	7	3	8	[4] 150	150
A_2	9	[2] 200	[3] 80	6	280
A_3	[4] 100	9	[3]	6	340
Қажеттілік	100	200	300	170	770

Соңғы кестеде белгіленетін торлар саны біреуге артқанын байқаймыз, енді мұндай торлардың саны төртеу емес, бесеу болды. Жаңа кестеге тағы бір рет дифференциалдық рента әдісін қолданғанымызда мынадай келесі кесте алынады:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	7	3	8	[4] 150	150	-20

A_2	9	[2] 200	[3] 80	6	280	+0
A_3	[4] 100	9	[3] 220	6	340	+20
Қажеттілік	100	200	300	170	770	
Айырым	-	-	-	2		

Енді 770 т жүктің 20 т жүгі әлі тасымалданбағаны байқалады. Демек, енді аралық рента a=2. Дифференциалдық рента әдісін тағы қолданғанымызда соңғы кестені аламыз:

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор	Артық (+), Кем (-)
A_1	9	5	10	[6] 150	150	0
A_2	9	[2] 200	[3] 80	[6]	280	0
A_3	[4] 100	9	[3] 220	[6] 20	340	0
Қажеттілік	100	200	300	170	770	

Қоймалардағы жүк толық тасып алынды және тұтынушылардың барлығы қанағаттандырылды. Бастапқы кестедегі тарифтер бойынша ең тиімді тасымалдау шығынын есептейміз:

$$F=150\cdot 3+200\cdot 1+80\cdot 2+100\cdot 4+220\cdot 3+20\cdot 6=1990 \text{ теңге.}$$

Лабораториялық сабақ
Дифференциалдық рента әдісі

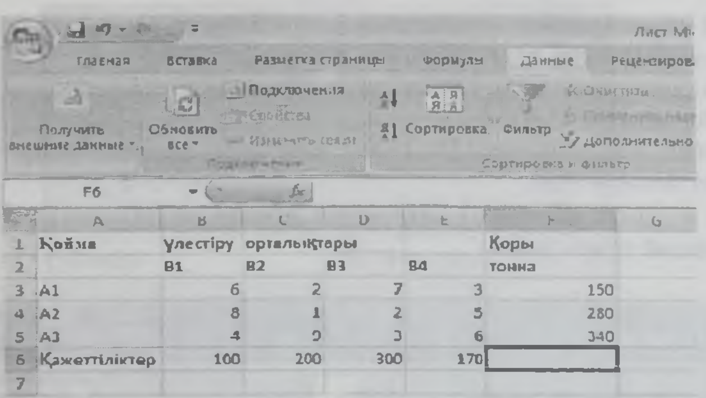
Ақпаратты модельдеу кезеңі

EXCEL парағын ашқаннан соң мынадай процедураларды орындаймыз.

- B3:E5 диапазонда километр/тоннаж бойынша тариф жазылған;
- F3:F5 диапазондарда ұсыныс көлемі көрсетілген;
- B6:F6 диапазондарда сұраныс көлемі көрсетілген.

Жалпы жағдайда кестенің ақпараттық мүмкіндіктерін, құрылымын кеңейтіп, оны жалпы тиімділендіру есептерін шешудің кіріспе-тор көзі деп атауға болады.

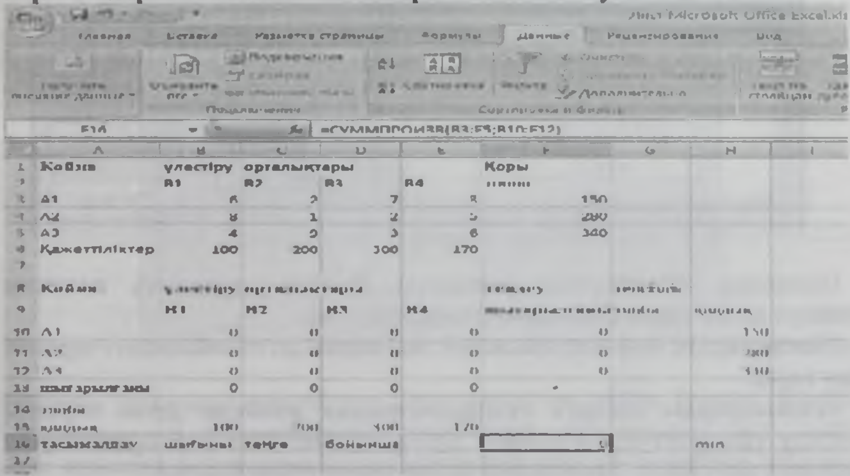
Берілгендер бойынша EXCEL парағына енгізу кестесі



	A	B	C	D	E	F
1	Қойма	үлестіру	орталықтары			Қоры
2		B1	B2	B3	B4	тонна
3	A1	6	2	7	3	150
4	A2	8	1	2	5	280
5	A3	4	9	3	6	340
6	Қажеттіліктер	100	200	300	170	

- Есептің талабы бойынша екінші есептеу кестесін толтырамыз. Бұл кестеде есептеу амалдары жүргізіледі.
- B10:E12 диапазонда тасымалдау матрицасы жазылады;
- B10:E10….B12:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, H10:H12 ұяшықтардың мәндеріне тең, олар шектеулерді береді.

Берілгендер бойынша EXCEL парағында есептеу кестесі



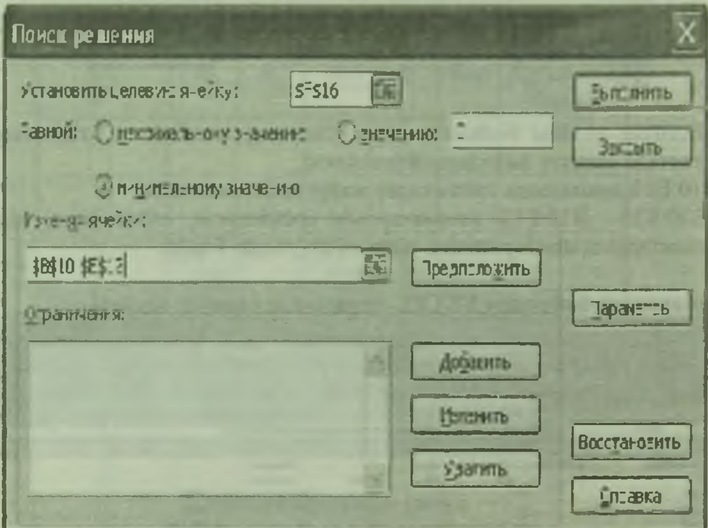
B10:B12….E10:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, B13-E13 ұяшықтардың мәндеріне тең;
- G10 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:
=сумм(B10:E10). Қалғандары «автотолтырылады».

- B13 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді;
  =сумм(B10:B12). Қалғандары «автотолтырылады».
- F16 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:

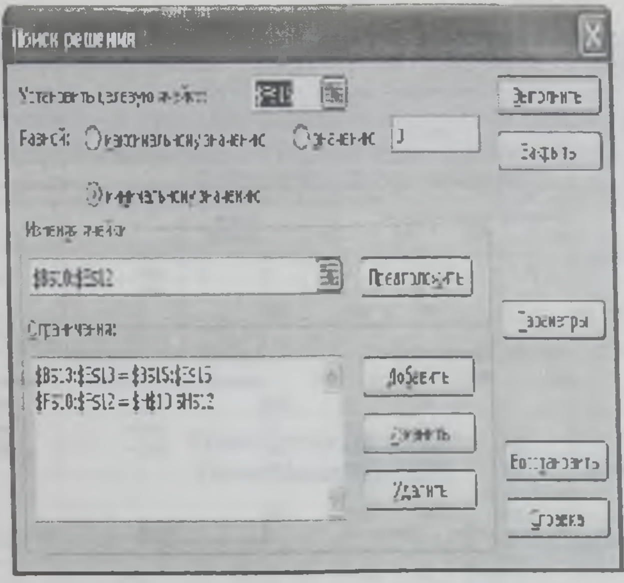
=суммпроизв(B3:E5;B10;E12).

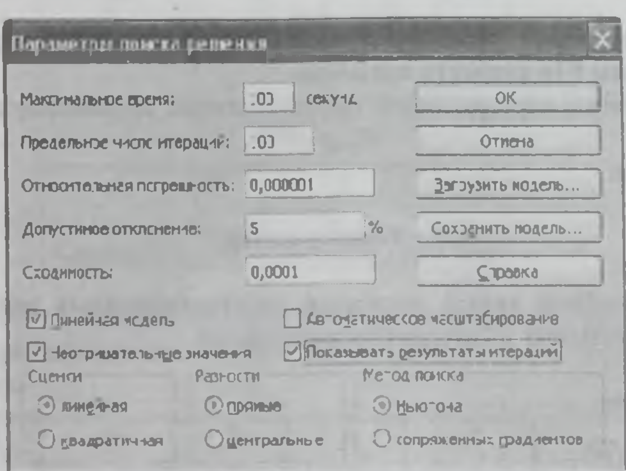
Осылайша көшірілу арқылы келесі есептерді шешуде, шешу процесі автоматтандырылады.

- Бас мәзірден **«Шешімді іздеу-поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай терезе пайда

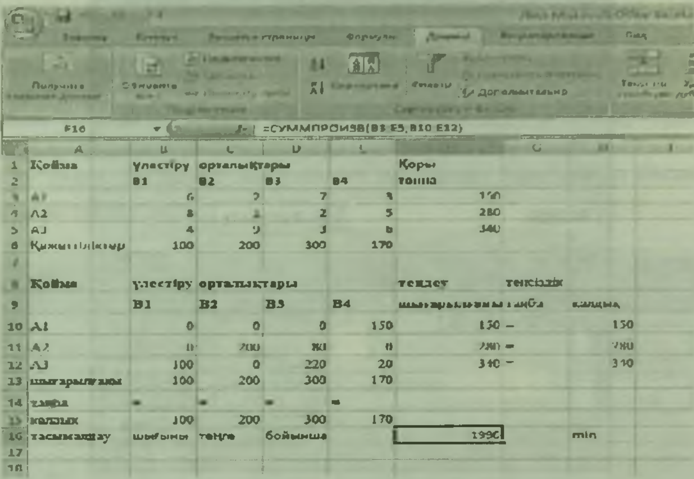


- Осындағы **«Мақсаттық ұяшықты анықта-установить целевую ячейку»** деген жерде F16 ұяшығы көрсетілуі тиіс.
- **«Минимумдық мән-минимальное значение»** деген сөйлемдегі терезені басу керек.
- **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-изменяя ячейки»** деген терезені толтыру үшін тінтуірді-курсорды B10-ға қойып, Shift F15 бұйрықтарын орындаса жеткілікті. Жоғарыдағы бейне-терезе пайда болады.
- Осы бейне терезедегі **«Шектеулер-Ограничения»** деген жердегі **«Енгізу-добавить»** батырмасын басу кажет.





Нәтижеде жоғарыда көрсетілген бейне-терезелер пайда болады. Бірінші бейне-терезедегі **«Параметрлер-параметры»** батырмасын басу қажет және ашылған бейне-терезеде: **«Сызықтық модель-линейная модель»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Теріс емес мән-неотрицательные значения»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Ия-ок»** батырмасын басамыз. Алдыңғы терезеге қайта ораламыз. Ондағы **«Орында – выполнить»** бұйрығын орындаймыз. Нәтижесінде мынадай көрініс пайда болады.



Ең тиімді маршрут тасымалдау матрицасында көрсетілген. Ал ең аз шығын сомасы F16 ұяшықта жазылған.

Демек, тиімді маршруттарды таңдай білгенде, тасымалдау шығыны

$$F_{min}=1990$$

теңге болады.

Тапсырмалар

Көлік есебінің тиімді жоспарын дифференциалдық рента әдісімен анықтаңыз, мұндағы n - студенттің жеке нөмірі.

1-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	2	4	7	9	$200+10n$
A_2	5	1	8	12	$270+20n$
A_3	11	6	4	3	$130+30n$
Қажеттілік	$120+15n$	$80+25n$	$240+5n$	$160+15n$	

2-есеп.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	Қор
A_1	4	5	2	8	6	$115+30n$
A_2	3	1	9	7	3	$175+25n$
A_3	9	6	7	2	1	$130+20n$
Қажеттілік	$70+10n$	$220+5n$	$40+25n$	$30+20n$	$60+15n$	

Практикалық сабақ
Потенциалдар әдісі

Бастапқы мәліметтер кестемен берілген көлік есебін қарастырайық.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	4	5	2	6	120
A_2	2	3	9	1	270
A_3	7	8	2	3	160
Қажеттілік	100	170	200	80	550

Бұл есептің тиімді шешуін потенциалдар әдісімен анықтау қажет.

Ең аз құн әдісімен осы көлік есебінің азғындалмаған тірек жоспарын жасап алайық.

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	4	5	2 120	6	120
A_2	2 100	3 90	9	1 80	270
A_3	7	8 80	2 80	3	160
Қажеттілік	100	170	200	80	550

Берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F=120\cdot 2+100\cdot 2+90\cdot 3+80\cdot 1+80\cdot 8+80\cdot 2=1590$$

теңге. A_1, A_2, A_3 қоймаларының потенциалдарын сәйкесінше α_1, α_2, α_3 деп, ал B_1, B_2, B_3, B_4 тұтынушыларының потенциалдарын сәйкесінше β_1, β_2, β_3, β_4 деп белгілейді. Жоғарғы кестенің толтырылған торлары үшін келесі системаны

$$\beta_3-\alpha_1=2,\ \beta_1-\alpha_2=2,\ \beta_2-\alpha_2=3,\ \beta_4-\alpha_2=1,\ \beta_2-\alpha_3=8,\ \beta_3-\alpha_3=2$$

алады. Бұл система 7 белгісізі бар 6 теңдеуден құралған. Мұндай системаның шексіз көп шешуі болатындықтан, мысалы, $\alpha_1=0$ деп алып сол мүмкін шешулердің біреуін анықтайды:

$$\alpha_2=5,\ \alpha_3=0,\ \beta_1=7,\ \beta_2=8,\ \beta_3=2,\ \beta_4=4.$$

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор	α
A_1	4	5	2 120	6	120	$\alpha_1=0$
A_2	2 100	3 90	9	1 80	270	$\alpha_2=5$
A_3	7	8 80	2 80	3	160	$\alpha_3=0$
Қажеттілік	100	170	200	80	550	
β_1	$\beta_1=7$	$\beta_2=8$	$\beta_3=2$	$\beta_4=6$		

Енді осы кестедегі бос торлар үшін $\alpha_{ij}=\beta_j-\alpha_i-c_{ij}$ мәндерін есептейді:

$$\alpha_{11}=7-0-4=3>0,\ \alpha_{12}=8-0-5=3>0,\ \alpha_{14}=6-0-6=0,$$
$$\alpha_{23}=2-5-9=-12<0,\ \alpha_{31}=7-0-7=0,\ \alpha_{34}=6-0-3=3>0.$$

Егер осылай табылған α_{ij} сандарының ішінде оң сандар болмаса, онда алынған тірек жоспары тиімді жоспар болар еді. Кемінде бір бос тор үшін $\alpha_{ij}>0$ болғандықтан бастапқы тірек жоспары тиімді жоспар болмайды. Қарастырылған мысалымызда $\alpha_{11}=3>0$, $\alpha_{12}=3>0$ және $\alpha_{34}=3>0$. Жаңа тірек жоспарына көшу үшін $\alpha_{ij}>0$ болатын бос торлар үшін α_{ij} сандарының максимумы жазылған торды тауып аламыз. Мысал есепте $\alpha_{11}=\alpha_{12}=\alpha_{34}=3>0$. Демек, қайта есептеуге арналған циклді (тізбекті) A_1B_1, A_1B_2, A_3B_4 торларының қайсысы үшін де құру тең құқықты болады. Әрі қарай қайта есептеуге арналған циклді (тізбекті) A_1B_2 торы үшін құрайық. Бұл тор үшін мына $A_1B_2 \to A_1B_3 \to A_3B_3 \to A_3B_2 \to A_1B_2$ тізбекті (циклді) алады. Тізбектің торларын таңбалаймыз: бос A_1B_2 торына плюс таңба берсек, қалған торлардың таңбасы тізбек бойымен кезектесіп ауыстырылады.

5 +	2 -120
8 -80	2 +80

Енді теріс таңбалы торлар үшін min(80,120)=80 мәнін анықтайды. Қайта есептеу тізбегі бойынша қозғалғанда мынаны

5 80	2 40
8 0	2 160

аламыз. Демек, жаңа тірек жоспары мына

	B_1	B_2	B_3	B_4	Қор
A_1	4	5 80	2 40	6	120
A_2	2 100	3 90	9	1 80	270
A_3	7	8	2 160	3	160
Қажеттілік	100	170	200	80	550

кестемен анықталады. Бұл жағдайда берілген тариф бойынша тасымалдау құны

$$F=80\cdot5+40\cdot2+100\cdot2+90\cdot3+80\cdot1+160\cdot2=1350$$

теңгені құрайды. Потенциалдар әдісін тағы бір рет колданып, соңғы жоспардың тиімді жоспар екенін анықтаймыз.

Лабораториялық сабақ
Потенциалдар әдісі

Ақпаратты модельдеу кезеңі

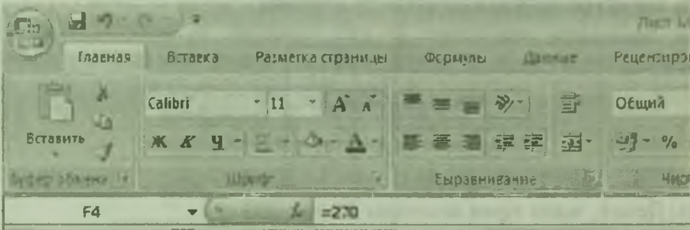
EXCEL парағын ашқаннан соң мынадай процедураларды орындаймыз.

- B3:E5 диапазонда километр/тоннаж бойынша тариф жазылған;

- F3:F5 диапазондарда ұсыныс көлемі көрсетілген;
- B6:F6 диапазондарда сұраныс көлемі көрсетілген.

Жалпы жағдайда кестенің ақпараттық мүмкіндіктерін, құрылымын кеңейтіп, оны жалпы тиімділендіру есептерін шешудің кіріспе-торкөзі деп атауға болады.

Берілгендер бойынша EXCEL парағына енгізу кестесі



	A	B	C	D	E	F	G
1	Қойма	үлестіру	орталықтары			Қоры	
2		B1	B2	B3	B4	тонна	
3	A1	4	5	2	6	120	
4	A2	2	3	3	1	270	
5	A3	7	8	2	3	160	
6	Қажеттіліктер	100	170	200	80		
7							

- Есептің талабы бойынша екінші есептеу кестесін толтырамыз. Бұл кестеде есептеу амалдары жүргізіледі.
- B10:E12 диапазонда тасымалдау матрицасы жазылады;
- B10:E10....B12:E12 ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, H10:H12 ұяшықтардың мәндеріне тең, олар шектеулерді береді.

Берілгендер бойынша EXCEL парағында есептеу кестесі

8	Қойма	үлестіру	орталықтары			өндеу	теңдік	
9		B1	B2	B3	B4	шығарылғаны	таңба	қалдық
10	A1	0	0	0	0	0	=	120
11	A2	0	0	0	0	0	=	270
12	A3	0	0	0	0	0	=	160
13	шығарылғаны	0	0	0	0			
14	таңба	–	–	–	–			
15	қалдық	100	170	200	80			
16	тасымалдау	шығыны	теңге	бойынша		0		min
17								

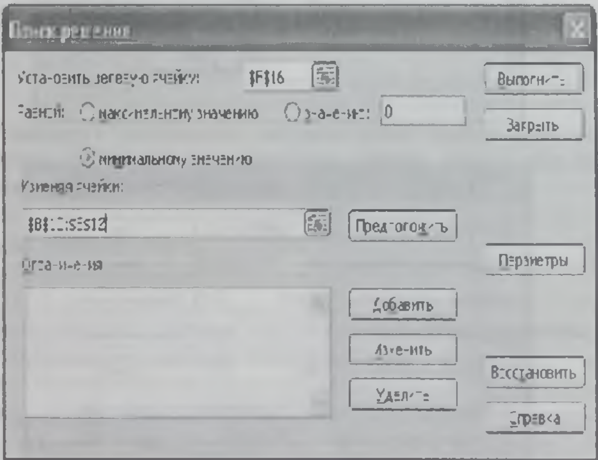
B10:B12....E10:E12 - ұяшықтардың қосындысы, сәйкесінше, B13-E13

ұяшықтардың мәндеріне тең;
- G10 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді: =сумм(B10:E10). Қалғандары «автотолтырылады».
- B13 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді; =сумм(B10:B12). Қалғандары «автотолтырылады».
- Ғ16 ұяшықтағы мәлімет былайша есептелінеді:

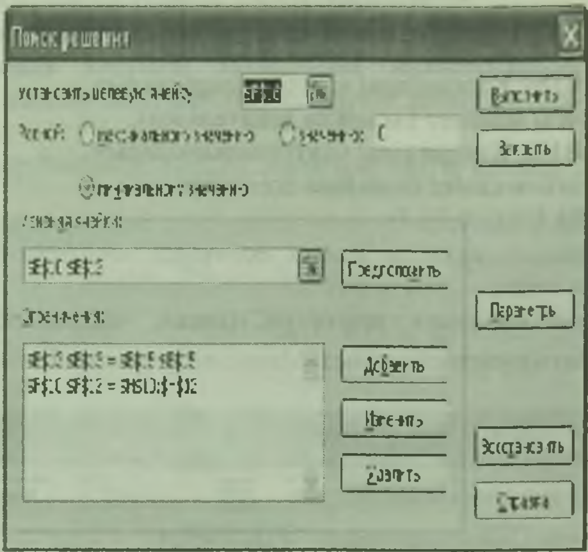
=суммпроизв(B3:E5;B10;E12).

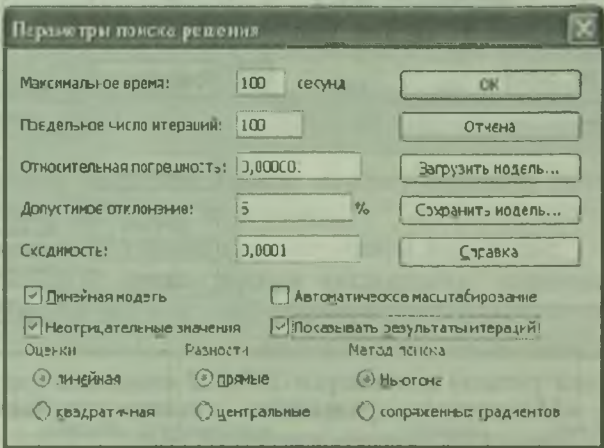
Осылайша көшірілу арқылы келесі есептерді шешуде, шешу процесі автоматтандырылады.

- Бас мәзірден **«Қызмет көрсету-Сервис»**, **«Шешімді іздеу-поиск решения»** батырмасын басамыз. Мынадай терезе пайда

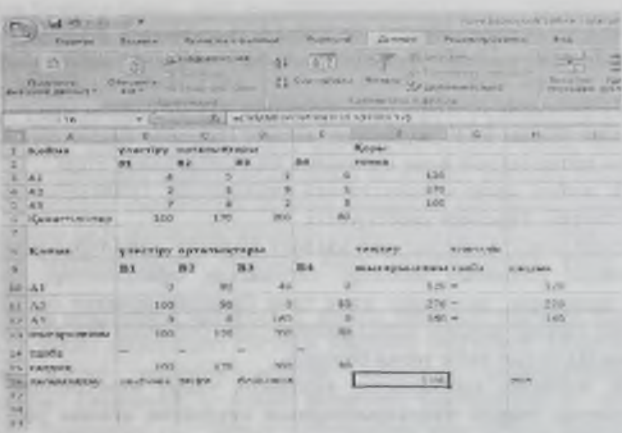


- Осындағы **«Мақсаттық ұяшықты анықта-установить целевую ячейку»** деген жерде Ғ16-ұяшығы көрсетілуі тиіс.
- **«Минимумдық мән-минимальное значение»** деген сөйлемдегі терезені басу керек.
- **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-изменяя ячейки»** деген терезені толтыру үшін тінтуірді-курсорды B10-ға қойып, Shift F15 бұйрықтарын орындаса жеткілікті. Жоғарыдағы бейне-терезе пайда болады.
- Осы бейне терезедегі **«Шектеулер-Ограничения»** деген жердегі **«Енгізу-добавить»** батырмасын басу кажет.





Нәтижеде жоғарыда көрсетілген бейне-терезелер пайда болады. Бірінші бейне-терезедегі **«Параметрлер-параметры»** батырмасын басу қажет және ашылған бейне-терезеде: **«Сызықтық модель-линейная модель»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Теріс емес мән – неотрицательные значения»** ұяшығына жалауша ілінуі тиіс. **«Ия-ок»** батырмасын басамыз. Алдыңғы терезеге қайта ораламыз. Ондағы **«Орында-выполнить»** бұйрығын орындаймыз. Нәтижесінде мынадай көрініс пайда болады.



Ең тиімді маршрут тасымалдау матрицасында көрсетілген. Ал ең аз шығын сомасы F16 ұяшықта жазылған. Демек, тиімді маршруттарды таңдай білгенде, тасымалдау шығыны

$$F_{min}=1350$$

теңге болады.

§10. Бұқаралық қызмет көрсету жүйесі туралы түсінік. Марков процесінің мысалы. Оқиғалар ағыны.

Оқиғалар ағыны әсер ететін жүйенің (системаның) мысалы ретінде бұқаралық қызмет көрсету (БҚК) жүйесін қараймыз. Мысалы, тапсырыстар бойынша қызмет көрсететін жөндеу шеберханалары, дүкендер, мейрамханалар мен кафелер, буфеттер, шаштараздар, телефон станциялары, билет кассалары, есептеу кешендері және тағы басқалары БҚК жүйелері болады. Бұл жүйелерге кездейсоқ немесе кездейсоқ емес уақыт мезеттерінде түсетін тапсырыстар мен сол тапсырыстарға жүйенің беретін жауабымен БҚК жүйесі анықталады.

Адам өмірінде арнайы қызмет көрсетуге жаппай тапсырыс берілетін жағдайлар үнемі кездеседі. Шектеулі қызмет көрсету мүмкіндігі бар қызмет көрсетуші түскен тапсырыстарды тез арада қанағаттандыра алмай қалуы мүмкін. Осы жерде тапсырысты қанағаттандыру үшін кезек пайда болады.

БҚК жүйесінің тиімділік көрсеткіші: 1)уақыт бірлігінде қызмет көрсетілетін тапсырыстардың орташа саны, 2)кызмет көрсетуді кутудің орташа уакыты, 3)кутусіз қызмет көрсету ыктималдығы, 4)кезектегі тапсырыстардың белгілі мәнге ие болу ыктималдығы. Әрине, қызмет көрсету бірліктерін арттыру БҚК жүйесінің жұмыс сапасы мен тиімділігін арттырады. Бірак БҚК жүйесінің қызмет көрсету бірліктерін арттыру косымша материалдык және каржылык шығынды кажет етеді.

БҚК жүйесі мына мәліметтермен анықталады: 1)тапсырыстар ағыны, 2)кезек тәртібі, 3)кызмет көрсету реті.

Қызмет көрсету бірліктерін **қызмет көрсету арналары** (каналдары) деп атайды. Байланыс желілері, сатушылар, официанттар, шеберлер, жұмыс орындары, кассирлер және тағы басқалар арналар болады. БҚК жүйесінің кызмет көрсету арналарының саны бойынша **бір арналы** және **көп арналы** болып екіге топка бөлінеді.

БҚК жүйесіне тапсырыстар кездейсоқ уақыт мезеттерінде түсетін болғандыктан оларды **тапсырыстардың кездейсок ағыны** деп атайды. Тапсырыстар ағынының түсу уақыттары мен қызмет көрсету уакытының ұзактығы кездейсоқ сипатты болғандыктан БҚК жүйесі бірқалыпты жүктелмейді. Кейде тапсырыстар саны шамадан тыс көп болып тапсырыстар кезекке тұрады немесе кезек күтпей кетіп калады, кейде тапсырыстар саны шамадан тыс аз болып БҚК жүйесі толык жүктелмейді немесе бос тұрып қалады.

БҚК жүйесі 2 класка бөлінеді: 1)Тапсырыстар ағыны **кезек күтпейтін** БҚК жүйесі (арналар бос емес кезде түскен тапсырыстар БҚК жүйесін бірден тастап кетіп, кызмет көрсету үдерісіне қатыспайды), 2)Тапсырыстар ағыны **кезек күтетін** БҚК жүйесі (арналар бос емес кезде түскен тапсырыстар БҚК жүйесін тастап кетпейді, кезекке тұрып, кызмет көрсету үдерісіне қатысады).

Тапсырыстар ағыны кезек күтетін БҚК жүйесі кезектін ұйымдастырылуына байланысты бірнеше түрге жіктеледі: тапсырыстар кезегінің ұзындығы 1) шектелген, 2)шектелмеген; күту уақыты 3)шектелген, 4)шектелмеген және т.б.

Тапсырыстарды іріктеп, бос арналарды жүктейтін кызмет көрсету тәртібі маңызды рөл аткарады. Бірінші келген тапсырыс алдымен орындалады ма, әлде соңынан келген тапсырыс алдымен орындалады ма, ол БҚК жүйесінде калыптаскан кызмет көрсету приоритетіне байланысты.

БҚК жүйесі жағдайының уақытқа катысты өзгеру процесін **кездейсок процесс** деп карайды. Егер процестің мүмкін болатын $S_1, S_2, S_3, ...$ жағдайлары алдын ала белгілі болса және бір жағдайдан екінші жағдайға өту лезде орындалса, онда бұл процесті **дискретті жағдайдағы процесс** деп атайды. Егер процестің бір жағдайдан екінші жағдайға өту уакыты алдын ала белгісіз болса, яғни кездейсоқтық орын алса, онда бұл процесті **үздіксіз уақытты процесс** деп атайды. БҚК жүйесінің жұмысы дискретті жағдайдағы және үздіксіз уақытты процесс болады. Мысалы, БҚК жүйесінің жағдайы тапсырыс кездейсоқ пайда болған сәтте өзгереді.

Егер кез келген t_0 уақыт мезеті үшін процестің ықтималдық сипаты болашақта тек қана сол уақыттағы жағдайына тәуелді болса және БҚК жүйесі осы жағдайға қашан және қалай келгеніне тәуелсіз болса, онда кездейсоқ процесс **марковтық** (немесе салдарсыз кездейсоқ) процесс деп аталады. Егер БҚК жүйесінің жұмысы марковтық процесс болса, онда бұл процестің математикалық моделін құру салыстырмалы түрде едәуір жеңілдейді.

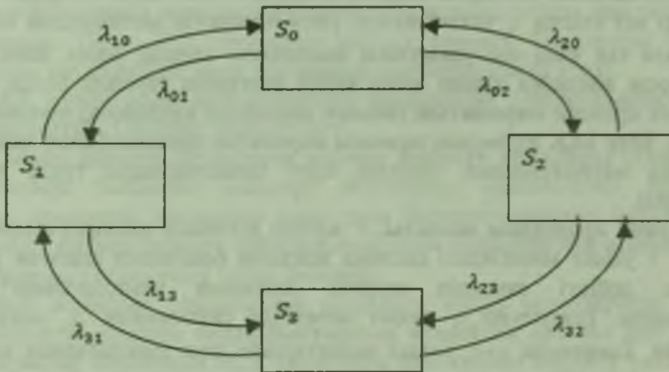
Марков процесінің мысалы. S жүйесі дегеніміз таксидің есептеуіші болсын. t уақыт мезетіндегі система жағдайы белгіленіп алынған уақыт мезетіне дейінгі таксидің жүрген жолының ұзындығымен (км) сипатталады. Есептеуіш t_0 уақыт мезетінде системаның S_0 жағдайын көрсетсін. Есептеуіш $t>t_0$ уақыт мезеттерінде жол ұзақтығының қандай мәнін көрсететіндігінің ықтималдығы S_0 мәніне тәуелді, бірақ t_0 уақыт мезетіне дейінгі есептеуіш көрсеткішіне тәуелсіз.

Көптеген процестерді жуық түрде марковтық процесс деп санауға болады. Мысалы, шахмат ойыны кезіндегі тақтадағы процесс. S системасы дегеніміз шахмат фигураларының тобы. Система жағдайы t_0 уақыт мезетінде тақтада сақталған қарсыластардың фигураларының санымен сипатталады. Системадағы $t>t_0$ уақыт мезеттеріндегі жағдай t_0 уақыт мезетіне дейінгі фигуралардың қашан және қандай ретпен жоқ болғанына емес, тақтада t_0 уақыт мезетінде қандай жағдай болғанына тәуелді.

Дискретті жағдайдағы кездейсоқ процесті талдау үшін **жағдай графтары** деп аталатын геометриялық сұлбаны (схеманы) пайдалануға болады. Әдетте система жағдайлары тіктөртбұрышпен (немесе дөңгелекпен), ал бір жағдайдан екінші жағдайға көшу жағдайларды байланыстыратын доғамен бейнеленеді.

Жағдай графының мысалы. Құрылғы екі тораптан тұрады. Олардың әрқайсысы уақыттың кездейсоқ мезеттерінде істен шығуы мүмкін. Бұдан кейін белгісіз уақытқа созылатын жөндеу жұмысы басталады. Системаның мүмкін жағдайлары: S_0 - екі торап та жөндеуден өткізілген; S_1 - бірінші торап жөнделуде, екінші торап жөндеуден өткізілген; S_2 - бірінші торап жөндеуден өткізілген, екінші торап жөнделуде; S_3 - екі торап та жөнделуде. Графта S_0 мен S_3; S_1 мен S_2

араларында байланыс көрсетілмеген, себебі екі тораптың бір мезетте істен шығуын және жөнделуін ескермеуге болады.



1-сурет

Уақыттың кездейсоқ мезетінде бірінің соңынан бірі келетін оқиғалар тізбегін **оқиғалар ағыны** деп атайды. Мысалы, тапсырыстар ағыны, сатып алушылар ағыны, телефон станциясына келген қоңырау шалулар ағыны.

Оқиғалар ағыны λ **қарқындылығымен** (уақыт бірлігінде БҚК жүйесіне түсетін оқиғалардың орташа саны) сипатталады.

Бірінің соңынан бірі бірдей уақыт өткеннен кейін көрінетін оқиғалар ағынын **тұрақты** оқиғалар ағыны деп атайды. Мысалы, құрастыру цехының конвейеріндегі өнімдер ағыны.

Көріну ықтималдығы уақытқа тәуелсіз болатын оқиғалар ағынын **стационар** оқиғалар ағыны деп атайды. Стационар ағынның қарқындылығы $\lambda(t)=\lambda$ тұрақты шама болады. Мысалы, қала көшесіндегі көлік ағыны тәулік бойына стационар ағын болмайды. Бірақ көлік ағынын белгілі бір уақыт аралығында (кешке немесе түсте) стационар ағын деп қарауға болады. Әрбір уақыт бірлігінде жүріп өткен көліктің саны әр түрлі болғанымен олардың орташа саны тұрақты және уақытқа тәуелсіз болады.

Қиылыспайтын τ_1 және τ_2 уақыт аралықтардың біріне тиісті оқиғалар саны екіншісіне тиісті оқиғалар санына тәуелсіз болатын оқиғалар ағынын **кейіннен әрекеті жоқ** оқиғалар ағыны деп атайды. Мысалы, автобусқа отыратын жолаушылар ағынын кейіннен әрекеті жоқ ағын деуге болады.

Аз уакыт аралығында бір оқиғаның пайда болу ықтималдығына қарағанда екі не одан да көп оқиғалардың пайда болу ықтималдығы аз болатын оқиғалар ағынын **кәдімгі** оқиғалар ағыны деп атайды. Мұндай оқиғалар бір-бірден пайда болады. Мысалы, станцияға жақындаған пойыз ағыны кәдімгі оқиғалар ағыны болса, вагондар ағыны кәдімгі ағын емес.

Бір мезгілде 1)стационарлы, 2)кәдімгі, 3)кейіннен әрекеті жоқ болатын оқиғалар ағынын **карапайым** оқиғалар ағыны деп атайды. Уақыт осінде карапайым оқиғалар ағыны кездейсоқ нүктелердің тізбегі ретінде қарастырылады.

Қарапайым оқиғалар ағынының кез келген τ уақыт аралығында m рет көріну саны дискретті кездейсоқ шама. Бұл кездейсоқ шама математикалық күтімі дисперсияға тең $a=\sigma^2=\lambda\tau$ болатындай Пуассон заңы $P_m(\tau)=\frac{(\lambda\tau)^m}{m!}e^{-\lambda\tau}$ бойынша үлестіріледі. Дербес жағдайда, τ уақыт аралығында оқиғаның бір рет те көрінбеу $(m=0)$ ықтималдығы $P_0(\tau)=e^{-\lambda\tau}$ болады.

§11. Колмогоров теңдеулер системасын құрастыру.

Графы 1-суретте берілген дискретті жағдайдағы және үздіксіз уакыттағы марковтық процестің математикалық сипаттамасын қарайық. БҚК жүйесінің S_i жағдайынан S_j жағдайына көшуі карапайым оқиғалар ағынының λ_{ij} $(i,j=\overline{0,3})$ қарқындылығымен орындалады дейік. t уақыт мезетінде БҚК жүйесінің S_i жағдайында болу ықтималдығын $p_i(t)$ деп белгілейік. Кез келген t уақыт мезетінде барлық жағдайлардың ықтималдығының қосындысы

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t)=1. \tag{1}$$

БҚК жүйесінің барлық жағдайлары үшін талдау жасай отырып А.Н.Колмогоровтың (1903-1987) дифференциалдық теңдеулер системасын алады:

$$\begin{aligned} p_0 &= \lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2-(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0, \\ p_1 &= \lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3-(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1, \\ p_2 &= \lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3-(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2, \\ p_3 &= \lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2-(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3. \end{aligned} \tag{2}$$

Колмогоров дифференциалдық теңдеулер системасын құру ережелері.

Барлық теңдеудің сол жағына калыптасқан жағдайдың ықтималдығының туындысы жазылса, барлық теңдеудің оң жағына – осы жағдайға әкелетін оқиғалар ағыны ықтималдығын сәйкес қарқындылыққа көбейтінділерінің қосындысынан осы жағдайдан әкететін оқиғалар ағыны ықтималдығын сәйкес қарқындылыққа көбейтінділерінің қосындысын алып тастаған кездегі мәндері жазылды.

Дифференциалдық теңдеулер системасын шешу үшін оны алғашқы шарттармен бірге карастырады. Бастапқыда БҚК жүйесі S_0 жағдайында тұр деп қарау керек, яғни алғашқы шарттар былай алынады:

$$p_0(0)=1,\ p_1(0)=0,\ p_2(0)=0,\ p_3(0)=0. \qquad (3)$$

Колмогоров теңдеулер системасында БҚК жүйесінің мүмкін әр түрлі жағдайларының ықтималдығы уақытқа тәуелді функция деп қарастырылады.

Уақыт шектеусіз өскенде, яғни $t\to\infty$ болғанда БҚК жүйесінің шектік стационар режимінің $p_i=const$ ықтималдығы анықталып зерттеледі. Шектік ықтималдықтар тұрақты болғандықтан Колмогоров теңдеулер системасында ықтималдықтардың туындылары нөлге тең. Бұл жағдайда стационар режимді сипаттайтын сызықтық алгебралық теңдеулер системасын аламыз. Жоғарыдағы (2) система былай жазылады:

$$\begin{aligned}
\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2&=(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0,\\
\lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3&=(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1,\\
\lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3&=(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2,\\
\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2&=(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3.
\end{aligned}$$

Дербес жағдайда, БҚК жүйесін бір жағдайдан екінші жағдайға көшіретін қарапайым оқиғалар ағынының қарқындылықтары $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2,\ \lambda_{10}=3,\ \lambda_{13}=3,\ \lambda_{20}=2,\ \lambda_{23}=1,\ \lambda_{31}=2,\ \lambda_{32}=3$ болсын. Сонда соңғы системаны былай жазамыз:

$$\begin{cases}
3p_0=3p_1+2p_2,\\
6p_1=p_0+2p_3,\\
3p_2=2p_0+3p_3,\\
5p_3=3p_1+p_2.
\end{cases} \qquad (5)$$

Осы (5) системадағы екінші және үшінші теңдеулерді мүшелеп қоссақ, онда $6p_1+3p_2=3p_0+5p_3$. Мұндағы $3p_0$ орнына бірінші теңдеуден $3p_1+2p_2$ қосындысын қоямыз, сонда осы системадағы төртінші теңдеуді аламыз. Демек, төртінші теңдеу артық. Оның орнына (1) формуладағы теңдеуді қоямыз:

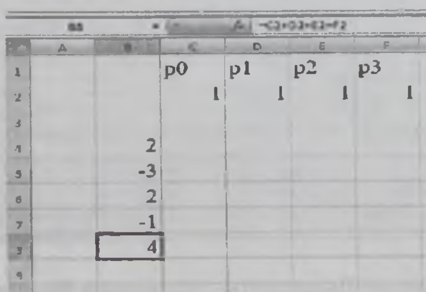
$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 2p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 2p_3, \\ 3p_2 = 2p_0 + 3p_3, \\ p_0 + p_1 + p_2 + p_3 = 1. \end{cases} \qquad (6)$$

Соңғы (6) жүйені шешіп, $p_0 = 0{,}365, p_1 = 0{,}108, p_2 = 0{,}385, p_3 = 0{,}142$ мәндерін алады. Демек, стационар режимде БҚК жүйесі уақыттың 36,5%-да S_0 жағдайында (екі торап та жөндеуден өткізілген), 10,8%-да S_1 жағдайында (бірінші торап жөндеуде, екінші торап жөндеуден өткізілген), 38,5%-да S_2 жағдайында (бірінші торап жөндеуден өткізілген, екінші торап жөндеуде), 14,2%-да S_3 жағдайында (екі торап та жөндеуде).

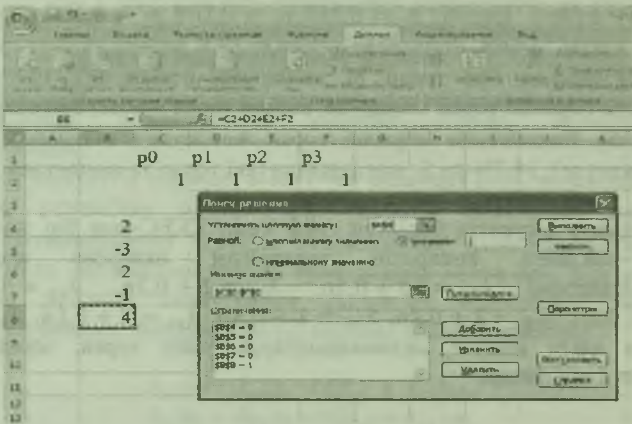
Жаттығу. 1-суретте берілген граф үшін ҚКЕС-сын бір жағдайдан екінші жағдайға көшіретін қарапайым оқиғалар ағынының қарқындылықтары $\lambda_{01} = 10 + 0{,}1n$, $\lambda_{02} = 2 + 0{,}2n$, $\lambda_{10} = 3 + 0{,}3n$, $\lambda_{13} = 3 + 0{,}1n$, $\lambda_{20} = 2 + 0{,}2n$, $\lambda_{23} = 1 + 0{,}3n$, $\lambda_{31} = 2 + 0{,}1n$, $\lambda_{32} = 3 + 0{,}2n$ деп алып шектік ықтималдықтарды табу керек, мұндағы n-студенттің жеке нөмірі.

Лабораториялық сабақ
Колмогоров теңдеулер жүйесін шешу

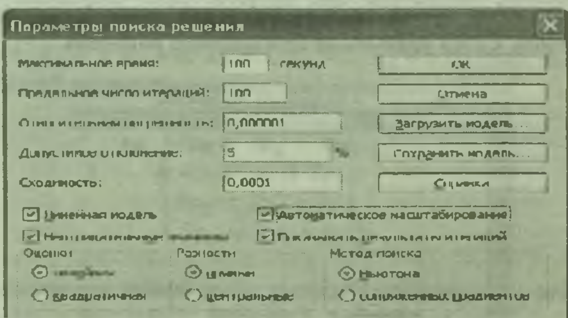
EXCEL парағын ашып, есептің берілгенін яғни теңдеулер жүйесін B4:B8 ұяшығына, C2:F2 аралығына белгісіздерді енгіземіз.



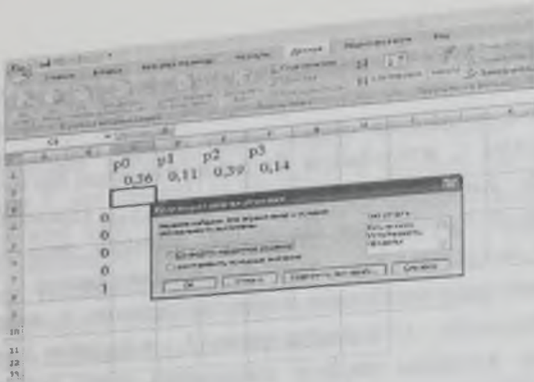
Мәліметтерді енгізіп болған соң **«Шешімді іздеу-Поиск решения»** таңдап алғанда пайда болатын терезеден **«Мақсаттық функцияны** орнату-Установить целевую ячейку» ұяшығына В8 адресін қоямыз, **«Мәнге-Значению»** деген ұяшыққа жалауша қойып 1 санын енгіземіз. **«Ұяшықтарды өзгерте отырып-Изменяя ячейки»** ұяшығына C2:F2 диапазонын белгілеп алып енгіземіз. **«Шектеулер-Ограничения»** ұяшығынан **«Енгізу-Добавить»** командасын басып, В4:В8 ұяшығында тұрған теңдеулер жүйесін 0-ге теңестіріп енгіземіз.



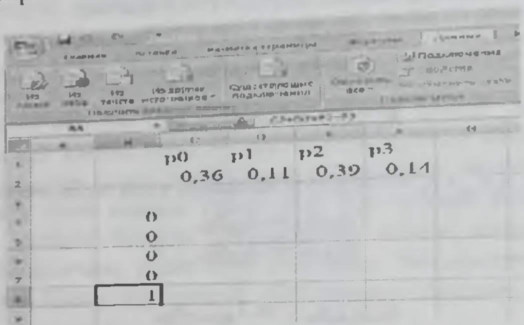
Бұдан соң **«Параметрлер-Параметры»** пернесін басып, төмендегі кестеде көрсетілгендей командаларды орындап, жалауша қойып **«Ия-ОК»** пернесін басамыз.



Бұдан кейін **«Орындау-Выполнить»** батырмасын басып есептің шешімін аламыз.



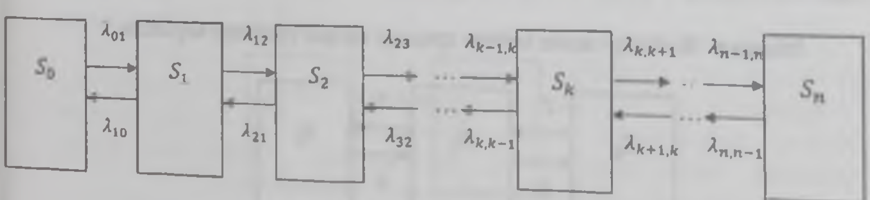
«Ия-Ок» батырмасын басып, есептің шешімін аламыз.



Жауабы: $p_0=0.36$, $p_1=0.11$, $p_2=0.39$, $p_3=0.14$.

§12. Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін бір және көп арналы бұқаралық қызмет көрсету жүйесі.

Жойылу және көбею процесі.



БҚК жүйесі жағдайларының реттелген $S_0, S_1, S_2, \dots, S_n$ жиынын қарастырамыз. Кез келген S_k жағдайдан S_{k-1} не S_{k+1} жағдайларына көшуге болады. Мысалы, популяция санын талдау кезінде популяция саны k болса, онда система S_k жағдайында. Егер популяцияның бір мүшесі туса, онда система S_k жағдайынан S_{k+1} жағдайына $\lambda_{k,k+1}$ қарқындылығымен көшеді. Ал егер популяцияның бір мүшесі жойылса, онда система S_k жағдайынан S_{k-1} жағдайына $\lambda_{k,k-1}$ қарқындылығымен көшеді.

Әрбір жағдай үшін алгебралық теңдеулер құрамыз. S_0 жағдайы үшін $\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1$ теңдеуін, S_1 жағдайы үшін $(\lambda_{12} + \lambda_{10})p_1 = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{21}p_2$ теңдеуін аламыз. Алғашқы теңдеуді пайдаланып, соңғы теңеуді $\lambda_{21}p_2 = \lambda_{12}p_1$ түрінде жазамыз. Басқа жағдайлардың шектік ықтималдықтары үшін осындай теңдеулерді жазып, келесі жүйенн аламыз:

$$\begin{gathered}\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{21}p_2 = \lambda_{12}p_1, \\ \dots \ \dots \ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n.\end{gathered}$$

Бұл жүйеге $p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1$ теңдеуін қосқанда жаңа жүйе алынады:

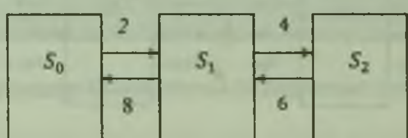
$$\begin{gathered}\lambda_{01}p_0 = \lambda_{10}p_1, \\ \lambda_{21}p_2 = \lambda_{12}p_1, \\ \dots \ \dots \ \dots \\ \lambda_{n-1,n}p_{n-1} = \lambda_{n,n-1}p_n, \\ p_0 + p_1 + \dots + p_n = 1.\end{gathered}$$

Осы системаның бірінші теңдеуін шешкенде $p_1 = (\lambda_{01}/\lambda_{10})p_0$ өрнегін, екінші теңдеуін шешкенде $p_2 = (\lambda_{12}\lambda_{01}/\lambda_{21}\lambda_{10})p_0$ өрнегін, қалған теңдеулерді шешуді жалғастырып, n-ші теңдеуін шешкенде $p_2 = (\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}/\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10})p_0$ өрнегін, ал соңғы теңдеуді шешкенде

$$p_0 = [1 + (\lambda_{01}/\lambda_{10}) + \dots + (\lambda_{n-1,n} \dots \lambda_{12}\lambda_{01}/\lambda_{n,n-1} \dots \lambda_{21}\lambda_{10})]^{-1}$$

өрнегін алады.

Мысал. Жойылу және көбею процесі келесі графпен берілсін.



Жоғарыда анықталған формула бойынша

$$p_0 = (1 + \frac{2}{8} + \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 8})^{-1} = 0{,}706\,,\quad p_1 = \frac{2}{8}0{,}706 = 0{,}176\,,\quad p_2 = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 8}0{,}706 = 0{,}118$$

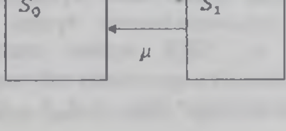
Демек, стационар режимде БҚК жүйесі 70,6% уақыт S_0 жағдайында, 17,6% уақыт S_1 жағдайында, 11,8% уақыт S_2 жағдайында болады.

Кезегі жоқ БҚК жүйесінің тиімділік көрсеткіштері: 1) A - БҚК жүйесінің абсолютті өткізу қабілеттілігі (уақыт бірлігінде қызмет көрсетілген тапсырыстар саны); 2) Q - БҚК жүйесінің салыстырмалы өткізу қабілеттілігі (қызмет көрсетілген тапсырыстар үлесі); 3) $\overline{P}$ - тапсырысты қабылдамау ықтималдығы; 4) $\bar{k}$ - бос емес арналардың орташа саны.

Біз екі түрлі БҚК жүйелерін қарастырамыз: 1) тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін жүйе (барлық арналар бос емес кезде түскен тапсырыс қабылданбағандықтан жүйені тастап кетеді) және 2) тапсырыстар ағыны кезек күтетін жүйе (барлық арналар бос емес кезде түскен тапсырыс қабылданбаса да жүйені тастап кетпейді, қызмет көрсетілуін күтіп кезекке тұрады). Егер сатушы бос емес кезде келген клиент дүкеннен шығып кетсе, онда бұл жағдай кезек күтпейтін БҚК жүйесін анықтайды. Ал егер сатушы бос емес кезде келген клиент дүкеннен шығып кетпей керек заттарын алу үшін кезекке тұрса, онда бұл жағдай кезек күтетін БҚК жүйесінің мысалы болады. Тапсырыстар ағыны кезек күтетін жүйе кезектің ұзындығына, кезек күту уақытына, тапсырыстардың орындалу ретіне, тағы басқа мәселелерге байланысты бірнеше түрге жіктелуі мүмкін.

Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін бір каналды БҚК жүйесін қарастырайық. Осы жүйеге түсетін тапсырыстар ағынының қарқындылығы λ, қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ болсын. Қарапайым оқиғалар ағыны қарастырылады. Қызмет көрсетудің орташа уақыты $\bar{t} = \frac{1}{\mu}$. БҚК жүйесі жағдайларының шектік ықтималдықтарын және оның тиімділік көрсеткіштерін анықтау керек.

БҚК жүйесінің 2 жағдайы бар: 1) S_0 - канал бос, 2) S_1 - канал бос емес.



Стационарлық режимде жағдайдың ықтималдығы үшін алгебралық теңдеулер системасы былай жазылады:

$$\begin{cases}\lambda p_0 = \mu p_1, \\ \mu p_1 = \lambda p_0.\end{cases}$$

Демек, система бір ғана теңдеуден тұрады. Егер $p_0 + p_1 = 1$ екенін ескерсек, онда келесі

$$\begin{cases}\lambda p_0 = \mu p_1, \\ p_0 + p_1 = 1.\end{cases}$$

системаны аламыз. Бұдан БҚК жүйесінің арнасы бос болу және бос болмау жағдайларының ықтималдықтары анықталады:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu}, \ p_1 = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}.$$

Олай болса, системаның салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = \frac{\mu}{\lambda + \mu}$, тапсырысты қабылдамау ықтималдығы $\bar{P} = \frac{\lambda}{\lambda + \mu}$, абсолютті өткізу қабілеттілігі $A = \lambda Q = \frac{\lambda\mu}{\lambda + \mu}$ өрнектерімен анықталады.

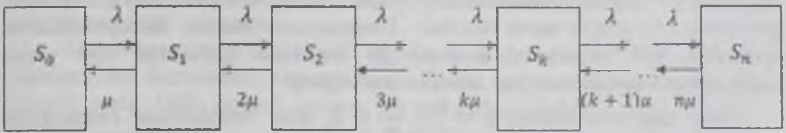
Мысал. Теледидар жөндеу шеберханасына телефонмен тапсырыстар сағатына $\lambda = 120$ қарқындылықпен түседі. Телефонмен сөйлесудің орташа ұзақтығы t=2 минут екені белгілі. Шеберханада бір телефон болса, онда телефон байланысы жүйесінің тиімділік көрсеткішін анықтау керек.

Қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ=1/t=0.5 (1/мин) = 30 (1/сағат). Жоғарыда анықталған формулалар бойынша БҚК жүйесінің салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = \frac{30}{120+30} = 0{,}2$, яғни тапсырыстардың 20%-ы телефонмен түседі; жүйенің тапсырысты қабылдамау ықтималдығы $\bar{P} = \frac{120}{120+30} = 0{,}8$; жүйенің абсолютті өткізу қабілеттілігі $A = \frac{120 \cdot 30}{120+30} = 96$, яғни орташа алғанда телефонмен қабылданған өтініштердің сағатына тек 96 тапсырысына қызмет көрсетіледі.

Эрланг есебі. Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін n арналы БҚК жүйесіне тапсырыстар λ қарқындылықпен түседі. Қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ. БҚК жүйесі жағдайының шектік ықтималдығын және оның тиімділік көрсеткішін табу керек.

S жүйесінің келесі жағдайлары бар: $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_n$, мұндағы S_k -

системаның k орнасы бос емес. Жойылу және көбею процесіне сәйкес БҚК жүйесінің графы суретте берілген.



Тапсырыстар ағыны системаны біртіндеп кез келген сол жак жағдайдан көршілес оң жактағы жағдайға бірдей λ каркындылыкпен көшіреді. Системаны кез келген оң жактағы жағдайдан сол жактағы көршілес жағдайға көшіретін қызмет көрсету ағынының қарқындылығы үнемі жағдайға қатысты өзгеріп отырады. Шынында, егер БҚК жүйесі S_2 жағдайында (екі арна бос емес) болса, онда ол S_1 жағдайына (бір арна бос емес) не бірінші арна, не екінші арна қызмет көрсетуін аяктағанда (яғни арналардың қызмет көрсету қарқындылыктарының суммасы 2μ болғанда) көше алады. Осыған ұқсас, БҚК жүйесін S_3 жағдайынан (үш арна бос емес) S_2 жағдайына (екі арна бос емес) көшіретін қызмет көрсету ағынының жалпы қарқындылығы 3μ болады, яғни үш арнаның кез келгені босауы мүмкін.

Жойылу және көбею процесі үшін жағдайдың шектік ықтималдығына арналған келесі өрнекті аламыз:

$$p_0 = (1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!})^{-1}.$$

Мұндағы $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ - тапсырыстар ағынының келтірілген қарқындылығы (бір тапсырысты орындауға кететін орташа қызмет көрсету уақытында келетін тапсырыстардың орташа саны). Әрі қарай, басқа шектік ықтималдықтарды табамыз:

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0,\ \ldots,\ p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Бұл формулаларды А.К.Эрланг (1878-1929) формулалары деп атайды.

БҚК жүйесінің барлық арналарының бос емес болуының шектік ықтималдығы БҚК жүйесінің тапсырысты қабыл алмау ықтималдығы болып табылады

$$\overline{P} = \frac{\rho^n}{n!} p_0.$$

Салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = 1 - \overline{P} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0$. Абсолютті өткізу қабілеттілігі $A = \lambda Q = \lambda(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0)$. Бос емес арналардың орташа саны $\bar{k} = \frac{A}{\mu}$.

Мысал Теледидар жөндеу шеберханасына телефонмен тапсырыстар сағатына $\lambda = 120$ қарқындылықпен түседі. Телефонмен сөйлесудің орташа ұзақтығы t=2 минут екені белгілі. Тоңазытқыш жөндеу шеберханасына түспекші 100 өтініштің кемінде 80 өтінішін қабылдап алу үшін шеберханаға қанша телефон нөмірін қою керек?

Есеп шартына сәйкес $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{120}{30} = 4$, яғни телефонмен сөйлесудің $t = 2$ мин орташа уақытында сөйлесу арқылы 4 өтініш түседі.

Егер $n=3$ болса, онда

$$p_0 = (1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!})^{-1} = (\frac{71}{3})^{-1} = \frac{3}{71};\ Q = 1 - \frac{4^3}{3!}\frac{3}{71} = \frac{39}{71} \approx 0,55;\ A = 80\frac{39}{71} \approx 43,94.$$

Осылай төмендегі кестені толтырамыз:

Қызмету көрсету сипаттамалары	Арналар саны					
	1	2	3	4	5	6
Салыстырмалы өткізу қабілеттілігі Q	0,2	0,38	0,55	0,67	0,80	0,96
Абсолютті өткізу қабілеттілігі A	16	30,77	43,94	55,15	64,07	76,88

Тиімділік шарты бойынша $Q \geq 0,80$, демек, тоңазытқыш жөндеу шеберханасына 5 телефон нөмірін орнату керек. Бұл кезде сағатына орташа алғанда 64 өтініш түседі, ал бос емес телефон нөмірлерінің орташа саны $\bar{k} = \frac{64,07}{30} = 2,1$.

Практикалық сабақ
Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін бір арналы БҚК жүйесі

БҚК жүйесі үшін келесі шарттар орындалсын:

1)БҚК жүйесінің қызмет көрсететін бір арнасы (каналы) бар;

2)Стационарлы пуассондық тапсырыстар ағынының қарқындылығы λ;

3)қызмет көрсету уақыты мүмкін мәндері $t \in [0;\infty)$ болатын көрсеткіштік

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad t > 0$$

заңымен үлестірілген T кездейсоқ шамасы, мұндағы μ – арнаның босау қарқындылығы.

4) Система бос емес кезде келген тапсырыс оны тастап кетеді.

Мұндай БҚК жүйесін тапсырыстар ағыны **кезек күтпейтін бір арналы БҚК жүйесі** деп атайды. БҚК жүйесінің өткізу қабілеттілігін және жүйеге t уақыт мезетінде келген тапсырыстың қабылданбау ықтималдығын табыңыз.

Қарастырылып отырған БҚК жүйесі жалғыз арнаның бос болмауымен (немесе бос болуымен) сипатталсын. Демек, кез келген оң мәнді t уақыт мезеті үшін БҚК жүйесі немесе S_0 жағдайында (арна бос), немесе S_1 жағдайында (арна бос емес) болады. Кезекті қызмет көрсету аяқталғанда арна босайды, яғни БҚК жүйесі S_1 жағдайынан S_0 жағдайына көшеді. Керісінше, БҚК жүйесіне жаңа тапсырыс түсіп, қызмет көрсету басталғанда БҚК жүйесі бірден S_0 жағдайынан S_1 жағдайына көшеді. БҚК жүйесінің S_0,S_1 жағдайларында болу ықтималдықтарын сәйкесінше $p_0(t), p_1(t)$ деп белгілейік. Бір арналы БҚК жүйесі міндетті түрде мына екі жағдайдың S_0,S_1 біреуінде болады. Демек, $p_0(t)+p_1(t)=1$. Сөйтіп, Коши есебін қарастырамыз:

$$\frac{dp_0(t)}{dt}+(\lambda+\mu)p_0(t)=\mu,$$
$$p_0(0)=1.$$

Бұл есепті шешіп, мынаны анықтаймыз:

$$p_0(t)=\frac{\mu}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}),$$

$$p_1(t)=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}(1-e^{-(\lambda+\mu)t}).$$

Уақыт шектеусіз өскенде табылған ықтималдықтар келесі шектерге ұмтылады:

$$P_0=\frac{\mu}{\lambda+\mu},P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}.$$

Егер БҚК жүйесі бос болмаса, яғни S_1 жағдайында болса, онда кез келген t уақыт мезетінде келген тапсырыс қабылданбайды, бұл оқиғаның ықтималдығы $p_1(t)$. Кез келген t уақыт мезеті үшін қызмет көрсетілетін тапсырыстардың барлық тапсырыстарға қатынасы $p_0(t)$ болады (жүйенің салыстырмалы өткізу қабілеттілігі). Уақыт бірлігінде қызмет көрсетілетін тапсырыстар саны $A=\lambda p_0(t)$ (жүйенің абсолютті өткізу қабілеттілігі).

БҚК жүйесінің негізгі сипаттамалары уақытқа қатысты өзгереді, бірақ уақыт өте келе λ мен μ параметрлерімен анықталатын мәндерге ұмтылады. Тапсырыстың қабылданбау ықтималдығы

$$P=P_1=\frac{\lambda}{\lambda+\mu},$$

БҚК жүйесінің салыстырмалы өткізу қабілеттілігі (яғни БҚК жүйесі қызмет көрсететін тапсырыстардың орташа үлесі)

$$Q = P_0 = \frac{\mu}{\lambda + \mu},$$

БҚК жүйесінің абсолютті өткізу қабілеттілігі (яғни уақыт бірлігі ішінде БҚК жүйесі қызмет көрсететін тапсырыстардың орташа саны)

$$A = \lambda P_0 = \lambda Q = \lambda \frac{\mu}{\lambda + \mu}.$$

Тапсырма

Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін $r = 1$ арналы БҚК жүйесінде тапсырыстар ағынының қарқындылығы $\lambda = 18 + n$, ал арнаның босау (қызмет көрсету) қарқындылығы $\mu = 8 + n$ болғанда тапсырыстың қабылданбай қалу ықтималдығын, БҚК жүйесінің салыстырмалы және абсолютті өткізу қабілеттіліктерін табу керек, мұндағы n – студенттің жеке нөмірі.

Мысал. $n = 0$ болғанда $\lambda = 18$, $\mu = 8$. Демек, тапсырыстың қабылданбау ықтималдығы

$$P = \frac{18}{18 + 8} = \frac{9}{13} \approx 0,692,$$

БҚК жүйесінің салыстырмалы және абсолютті өткізу қабілеттіліктері сәйкесінше

$$Q = \frac{8}{18 + 8} = \frac{4}{13} \approx 0.308, \quad A \approx 18 \cdot 0,308 = 5,544$$

болады.

Практикалық сабақ
Тапсырыстар ағыны кезек күтпейтін көп каналды БҚК жүйесі

БҚК жүйесі үшін келесі шарттар орындалсын:

1)БҚК жүйесінің қызмет көрсететін $r \geq 2$ арналары (каналдары) бар;

2) λ - стационарлы пуассондық тапсырыстар ағынының қарқындылығы;

3) қызмет көрсету уақыты мүмкін мәндері $t \in [0; \infty)$ болатын көрсеткіштік

$$f(t) = \mu e^{-\mu t}, \qquad t > 0$$

заңымен үлестірілген Т кездейсоқ шамасы, мұндағы μ – арнаның босау қарқындылығы.

4) система бос емес кезде келген тапсырыс оны тастап кетеді.

Мұндай БҚК жүйесін тапсырыстар ағыны **кезек күтпейтін көп арналы БҚК жүйесі** деп атайды. БҚК жүйесінің өткізу қабілеттілігін және жүйеге t уақыт мезетінде келген тапсырыстың қабылданбау ықтималдығын табыңыз.

Кезегі жоқ n арналы БҚК жүйесінің бос болу ықтималдығы

$$p_0 = (1+\rho+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!})^{-1},$$

ал n арнасының бос болмау ықтималдығы

$$p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0$$

А.К.Эрланг формулаларымен анықталады. БҚК жүйесінің тапсырысты қабыл алмау ықтималдығы

$$\overline{P} = \frac{\rho^n}{n!}p_0,$$

салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = 1-\overline{P} = 1-\frac{\rho^n}{n!}p_0$, абсолютті өткізу қабілеттілігі $A=\lambda Q$, ал бос емес арналардың орташа саны $\overline{k} = \frac{A}{\mu}$ формулаларымен табылады.

Тапсырмалар

$r=4$ арналы БҚК жүйесінде тапсырыстар ағынының қарқындылығы $\lambda = 18+n$, ал арнаның босау қарқындылығы $\mu = 8+n$ болғанда БҚК жүйесі жағдайының шектік ықтималдығын және оның тиімділік көрсеткішін табу керек, мұндағы n – студенттің жеке нөмірі.

Мысал. $n=0$ вариантын қарастырайық. БҚК жүйесіндегі арналар саны $r=4$, тапсырыстар ағынының қарқындылығы $\lambda=18$, арнаның босау қарқындылығы $\mu=8$. Олай болса, барлық арналардың бос болу ықтималдығы

$$P_0 = \frac{1}{1+\frac{\lambda}{\mu}+\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^2+\frac{1}{3!}\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^3+\frac{1}{4!}\cdot(\frac{\lambda}{\mu})^4} \approx \frac{1}{1+2{,}25+\frac{1}{2}\cdot 5{,}06+\frac{1}{6}\cdot 11{,}39+\frac{1}{24}\cdot 25{,}63} \approx 0{,}114$$

Сәйкесінше бір арнаның бос болмау ықтималдығы $P_1 \approx 0{,}257$, екі арнаның бос болмау ықтималдығы $P_2 \approx 0{,}289$, үш арнаның бос болмау ықтималдығы $P_3 \approx 0{,}217$, төрт арнаның бос болмау ықтималдығы $P_4 \approx 0{,}122$ өрнектерімен табылады. Демек, БҚК жүйесінің тапсырысты қабылдамау ықтималдығы $\overline{P} = P_4 \approx 0{,}122$.

Қарастырылған БҚК жүйесінің салыстырмалы өткізу қабілеттілігі

$Q = 1 - 0{,}122 = 0{,}878$, абсолютті өткізу қабілеттілігі $A = \lambda Q = 18 \cdot 0{,}878 = 15{,}8$ және бос емес арналардың орташа саны $\bar{k} = \frac{A}{\mu} = \frac{15{,}8}{8} \approx 2$.

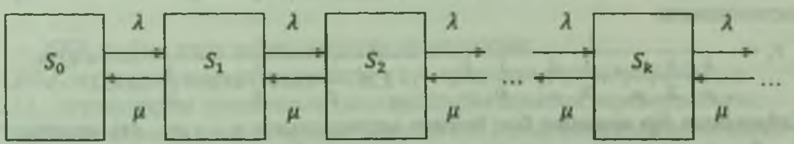
§13. Тапсырыстар ағыны кезек күтетін бір және көп арналы бұқаралық қызмет көрсету жүйесі.

Тапсырыстар ағыны кезек күтетін жүйеде барлық арналар бос емес кезде түскен тапсырыс қабылданбаса да жүйені тастап кетпейді, қызмет көрсетілуін күтіп кезекке тұрады, яғни қызмет көрсету процесіне қатысады. Тапсырыстар ағыны кезек күтетін жүйе кезектің ұзындығына, кезек күту уақытына, тапсырыстардың орындалу ретіне, тағы басқа мәселелерге байланысты бірнеше түрге жіктелуі мүмкін екені белгілі. Кезегі бар бір арналы БҚК жүйесінің мысалы ретінде бір сатушысы бар дүкенді қарастыруға болады.

Тапсырыстар ағыны кезек күтетін бір арналы БҚК жүйесін қарастырайық. Мұнда кезектің ұзындығына, кезекте күту уақытына ешқандай шектеу қойылмаған. БҚК жүйесіне түсетін тапсырыстардың қарқыны λ, ал қызмет көрсету (яғни арнаның босау) қарқындылығы μ болсын. Мұнда БҚК жүйесі жағдайларының шектік ықтималдықтарын және жүйенің тиімділік көрсеткіштерін табу керек.

БҚК жүйесі келіп түскен тапсырыстардың санына байланысты келесі жағдайлардың біреуінде болады: S_0 – арна бос; S_1 - арна бос емес, кезек жоқ; S_2 - арна бос емес, кезекте 1 тапсырыс бар; S_3 - арна бос емес, кезекте 2 тапсырыс бар; ...; S_k - арна бос емес, кезекте $k-1$ тапсырыс бар.

Жойылу және көбею процесіне сәйкес БҚК жүйесі жағдайларының графы суретте берілген.



Кезек күтетін БҚК жүйесіде тапсырыстар ағынының келтірілген қарқындылығы (немесе арнаның жүктелу қарқындылығы) $\rho = \frac{\lambda}{\mu} < 1$ болса, онда бұл жүйеде кезектің ұзындығы шектеулі болады. Керісінше, егер $\rho = \frac{\lambda}{\mu} \geq 1$ болса, онда мұндай БҚК жүйесінде кезек шектеусіз өседі.

Жойылу және көбею процесінің жалпы жағдайы үшін табылған формулалардан (к. $\S 12$) бір арналы жүйенің шектік ықтималдықтары

$$p_0 = (1 + \rho + \rho^2 + \cdots + \rho^k + \cdots)^{-1} = (1 - \rho),$$
$$p_1 = \rho p_0 = \rho(1-\rho), \ldots, p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1-\rho), \ldots$$

анықталады.

Осы жүйедегі тапсырыстардың орташа саны математикалық күтім ретінде

$$L_{\text{жүйе}} = \sum_{k=0}^{\infty} k p_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k = \frac{\rho}{1-\rho}$$

формуласымен анықталады. Жүйеде қызмет көрсетіліп жатырған тапсырыстардың орташа санын математикалық күтім ретінде анықталады:

$$L_{\text{қызм.көр.}} = 0p_0 + 1(1-p_0) = \rho.$$

Жүйенің бос болмау ықтималдығы $\bar{P} = L_{\text{қызм.көр.}} = \rho$. Олай болса, БҚК жүйесінде кезекте тұрған тапсырыстардың орташа саны (кезектің орташа ұзындығы)

$$L_{\text{кезек}} = L_{\text{жүйе}} - L_{\text{қызм.көр}} = \frac{\rho^2}{1-\rho}$$

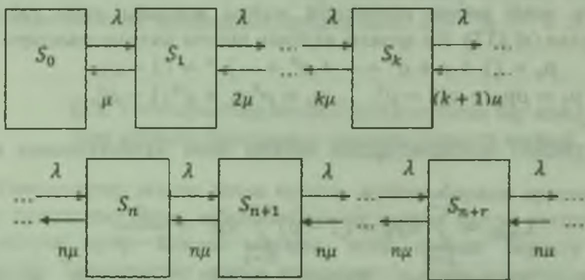
Тапсырыстың жүйеде және кезекте болуының орташа уақыты Литтл формулаларымен

$$T_{\text{жүйе}} = \frac{L_{\text{жүйе}}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \quad T_{\text{кезек}} = \frac{L_{\text{кезек}}}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$$

табылады.

Енді тапсырыстар ағыны кезек күтетін көп n арналы БҚК жүйесін қарастырайық. Мұнда кезектің ұзындығына, кезекте күту уақытына ешқандай шектеу коймаймыз. БҚК жүйесіне түсетін тапсырыстардың қаркыны λ, ал қызмет көрсету (яғни арнаның босау) қарқындылығы μ. БҚК жүйесі жағдайларының шектік ықтималдықтарын және жүйенің тиімділік көрсеткіштерін табу қажет.

БҚК жүйесі келіп түскен тапсырыстардың санына қарай келесі жағдайлардың біреуінде болады: S_0 – жүйеде тапсырыстар жоқ (арналар бос); S_1 – 1 арна бос емес, қалған арналар бос; S_2 – 2 арна бос емес, қалған арналар бос; S_3 – 3 арна бос емес, қалған арналар бос; ...; S_k – k арна бос емес, қалған арналар бос; ...; S_n – барлық n канал бос емес, кезек жоқ; S_{n+1} – барлық n канал бос емес, кезекте 1 тапсырыс бар; ...; S_{n+r} – барлық n канал бос емес, кезекте r тапсырыс бар.



Бұл жүйеде тапсырыстар ағынының қарқындылығы тұрақты λ болғанымен, қызмет көрсету қарқындылығы μ тұрақты болып қалмайды. Жүйедегі тапсырыстар саны 0-ден *n*-ге дейін өскенде қызмет көрсету қарқындылығы μ өседі, ал жүйедегі тапсырыстар саны *n*-нен артқанда қызмет көрсету қарқындылығы $n\mu$ шамасымен тұрақталады.

Кезек күтетін БҚК жүйесіде тапсырыстар ағынының келтірілген қарқындылығының арналар санына қатынасы $\frac{\rho}{n} < 1$ болса, онда жүйедегі кезектің ұзындығы шектеулі. Егер $\frac{\rho}{n} \geq 1$ болса, онда мұндай жүйеде кезек шектеусіз өседі.

Жойылу және көбею процесінің жалпы жағдайы үшін табылған формулалардан (қ. §12) көп арналы жүйенің шектік ықтималдықтары былай

$$p_0 = (1 + \frac{\rho}{1!} + \frac{\rho^2}{2!} + \cdots + \frac{\rho^n}{n!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)})^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!}p_0, \ldots, p_k = \frac{\rho^k}{k!}p_0, \ldots, p_n = \frac{\rho^n}{n!}p_0, p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!}p_0, \ldots, p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!}p_0,$$
$$\ldots$$

анықталады.

Тапсырыстың кезекке тұру ықтималдығы

$$P_{кезек} = \frac{\rho^{n+1}}{n!\,(n-\rho)}p_0.$$

Кезегінің ұзындығы шектеусіз болуы мүмкін n арналы БҚК жүйесі үшін бос емес арналардың орташа саны

$$\bar{k} = \rho,$$

кезектегі тапсырыстардың орташа саны

$$L_{кезек} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!\,(1-\frac{\rho}{n})^2}p_0.$$

жүйедегі тапсырыстардың орташа саны

$$L_{\text{жүйе}} = L_{\text{кезек}} + \rho,$$

тапсырыстың жүйеде және кезекте болуының орташа уақыты мына

$$T_{\text{жүйе}} = \frac{L_{\text{жүйе}}}{\lambda}, \quad T_{\text{кезек}} = \frac{L_{\text{кезек}}}{\lambda}$$

формулаларымен табылады.

Шектеусіз кезегі бар БҚК жүйесіне $\rho < 1$ болған жағдайда түскен кез келген тапсырысқа міндетті түрде қызмет көрсетіледі, өйткені жүйенің тапсырысты қабыл алмау ықтималдығы $\bar{P} = 0$, салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = 1$, ал абсолютті өткізу қабілеттілігі $A = \lambda$.

Практикалық сабақ
Тапсырыстар ағыны кезек күтетін бір каналды БҚК жүйесі

Тапсырмалар

Қоймада жүк көліктеріне жүктерді тиеп беретін кран бар. Тәулігіне жүк көліктерінің қоймаға келу қарқындылығы $\lambda = 8 + n$ болса, кранның қызмет көрсету (яғни жүк тиеп беру) қарқындылығы $\mu = 10 + n$ екені белгілі. Қойманың жүк тиеп беру қызметінің тиімділігін және 2 көліктің жүк тиеуді күтін қалу ықтималдығын анықтау керек, мұндағы n – студенттің жеке нөмірі.

Мысал. $n = 0$ вариантында $\lambda = 8$, $\mu = 10$, демек, $\rho = 0{,}8$. $\rho < 1$ болғандықтан қоймадағы жүк алуға келген көліктер кезегінің ұзындығы шектеулі болады. Қоймадағы кранның жұмыссыз тұру ықтималдығы $p_0 = (1 - \rho) = 0{,}2$ болса, кранның жүк тиеп тұру (яғни бос болмау) ықтималдығы $\bar{P} = \rho = 0{,}8$. Кранның жанында 1, 2, 3 (яғни жүк тиеуді күтіп 0, 1, 2) көліктің тұру ықтималдықтары сәйкесінше былай анықталады:

$$p_1 = 0{,}8(1 - 0{,}8) = 0{,}16, \; p_2 = 0{,}8^2(1 - 0{,}8) = 0{,}128, \; p_3 = 0{,}8^3(1 - 0{,}8) = 0{,}1024.$$

Кранның жанында жүк тиеуді күтіп көліктердің саны 2-ден артпауының ықтималдығы

$$P = p_1 + p_2 + p_3 = 0{,}16 + 0{,}128 + 0{,}1024 = 0{,}3904$$

болады.

Жүк тиетіп алуға кезекте тұрған көліктердің орташа саны

$$L_{\text{кезек}} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = 3,2$$

болса, жүк тиетіп алуды күтудің орташа уақыты

$$T_{\text{кезек}} = \frac{L_{\text{кезек}}}{0,8} = 4 \text{ (тәулік)}.$$

Сол сияқты, жүк тиетіп алуға 1 тәулікте қоймаға келген көліктердің орташа саны

$$L_{\text{жүйе}} = \frac{\rho}{1-\rho} = 4$$

болғанда жүк тиетін алатын көліктің қоймада болуының орташа уакыты

$$T_{\text{жүйе}} = \frac{L_{\text{жүйе}}}{\lambda} = \frac{4}{0,8} = 5$$

(тәулік). Әрине, қоймадағы жүк тиеп беру қызметінің тиімділігі төмен екені түсінікті. Жүк тиеп беру қызметінің тиімділігі арттыру үшін не кранның қызмет көрсету (яғни жүк тиеп беру) қарқындылығын, не жүк тиегіш крандар санын арттыру керек.

Практикалық сабак

Тапсырыстар ағыны кезек күтетін көп каналды БҚК жүйесі

Тапсырмалар

Коммуналдық қызмет үшін төлем ақы төлеу пунктіне тұтынушылар ағыны сағатына $\lambda = 162 + n$ қарқындылықпен келеді. Кассир бір тұтынушыға орта есеппен $t = 1$ минут қызмет көрсетеді. Тапсырыстар кезегі шексіз өсіп кетпеуі үшін тұтынушыларға кемінде қанша n_{min} кассир қызмет көрсетуі керек. Кезектің 3 тапсырыстан артып кетпеу ықтималдығын анықтау керек.

Мысал. Есептің шарты бойынша $n = 0$ вариантында $\lambda = 162$ (1/сағат), немесе $\lambda = 162/60 = 2{,}7$ (1/минут). Сондықтан $\rho = \lambda/\mu = \lambda \cdot t_{\text{қызм}} = 2{,}7$. Демек, $\frac{\rho}{n} < 1$, яғни $n > \rho = 2{,}7$ болғанда тапсырыстар кезегінің ұзындығы шектеусіз өспейді. Олай болса, төлем ақы төлеу пунктінде кемінде $n_{min} = 3$ кассир тұтынушыларға қызмет көрсетуі керек.

БҚК жүйесінің сипаттамаларын $n = 3$ болған жағдайы үшін анықтайық. Төлем ақы төлеу пунктіне тұтынушылардың болмай қалу ықтималдығы

$$p_0 = (1 + \frac{2,7}{1!} + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^4}{3!\,(3-2,7)})^{-1} = 0,025.$$

Жұмыс уақытының 2,5 пайызында кассирлер бос болады. Төлем ақы төлеу пунктінде кезектің болу ықтималдығы

$$P_{\text{кезек}} = \frac{2,7^{n+1}}{3!\,(3-2,7)} 0,025 = 0,735.$$

Кезекке тұрған тұтынушылардың орташа саны

$$L_{\text{кезек}} = \frac{2,7^4}{3 \cdot 3!\,(1-\frac{2,7}{3})^2} 0,025 = 7,35.$$

Кезекте күтудің орташа уақыты

$$T_{кезек} = \frac{7,35}{1,35} = 5,44 \text{ минут.}$$

Жүйедегі тұтынушылардың орташа саны

$$L_{\text{жүйе}} = L_{\text{кезек}} + \rho = 7,35 + 2,7 = 10,05.$$

Тұтынушыларға қызмет көрсетіп жатқан кассирлердің орташа саны $\bar{k} = \rho = 2,7.$

Кезектің 3 тапсырыстан артып кетпеу ықтималдығы

$$P(r \le 3) = p_1 + p_2 + p_3 + p_{3+1} + p_{3+2} + p_{3+3} =$$
$$= \frac{\rho^1}{1!} p_0 + \frac{\rho^2}{2!} p_0 + \frac{\rho^3}{3!} p_0 + \frac{\rho^{3+1}}{3^1 \cdot 3!} p_0 + \frac{\rho^{3+2}}{3^2 \cdot 3!} p_0 + \frac{\rho^{3+3}}{3^3 \cdot 3!} p_0 =$$
$$= \left(\frac{2,7^1}{1!} + \frac{2,7^2}{2!} + \frac{2,7^3}{3!} + \frac{2,7^{3+1}}{3^1 \cdot 3!} + \frac{2,7^{3+2}}{3^2 \cdot 3!} + \frac{2,7^{3+3}}{3^3 \cdot 3!}\right) 0,025 = 0,441.$$

§14. Сызықтық емес программалау есебін геометриялық әдіспен шешу.

Практикалық сабақ
Сызықтық емес программалау есебін геометриялық әдіспен шешу

Мысал.

$$F = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2 \to max, min,$$
$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 7, \\ 10x_1 - x_2 \le 8, \\ -18x_1 + 4x_2 \le 12, \end{cases}$$
$$x_1, x_2 \ge 0.$$

Шешуі: Есептің мүмкін шешімдер облысы ΔABC

$$10x_1 - x_2 \le 8 \; , \; (x_1-3)^2+(x_2-4)^2 = 63$$

$$(x_1-3)^2+(x_2-4)^2 = \frac{324}{101} \quad 3x_1+2x_2 \ge 7$$

Мақсаттық функцияның мәнін қандай да бір h санына тең деп есептеп, деңгейлік сызығын аламыз.

Дәл айтқанда $(x_1-3)^2+(x_1-4)^2 = h$ шеңберін $E(3;4)$ центрімен, $\sqrt{n}$ радиусымен h санының өсуімен (кемуімен) F функцияның мәні өседі (кем...).

L нүктесінен әр түрлі радиуспен шеңберлер жүргізіп, көретініміз: мақсаттық функция min нүктесін D нүктесінде қабылдайды, шеңбер шешімдер облысын жанайды. Бұл нүктенің координатасын сақтау үшін $10x_1 - x_2 = 8$ түзуінің және шеңберге D нүктесінде жүргізілген жанаманың бұрыштық коэффициентінің теңдігін пайдаланымыз.

$10x_2 = 10x_1 - 8$ түзуінің теңдеуінен көретініміз оның D нүктесіндегі бұрыш коэффициентін осы нүктесі x_1 айнымалысынан x_2 функцияның туындысының мәні ретінде анықтаймыз.

Шеңбердің теңдеуін дифференциалдап, мынаны аламыз.

$$2(x_1-3)+2(x_2-4)\cdot x_2^1 = 0 \qquad x_2^1 = -\frac{x_1-2}{x_2-4}$$

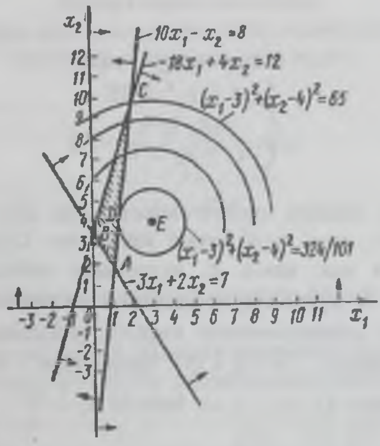
Табылған мәнді 10-ға теңестіріп, теңдеудің бірін аламыз, E нүктесінің координатасын табу үшін. Оған E нүктесі жатқан түзу теңдеуін косып, жүйе аламыз.

$$\begin{cases} x_1+10x_2 = 43 \\ 10x_1 - x_2 = 8 \end{cases} \quad x_1^* = \frac{123}{101}, \quad x_2^* = \frac{422}{101}, \quad F_{min} = \left(\frac{123}{101}-3\right)^2 + \left(\frac{422}{101}-4\right)^2 = \frac{324}{101}$$

мәнін C(2,12) нүктесінде қабылдайды. Оның координаталық C нүктесі тұрған түзулер теңдеулері жүйесінен

$$F_{max} = 65$$

алынады.



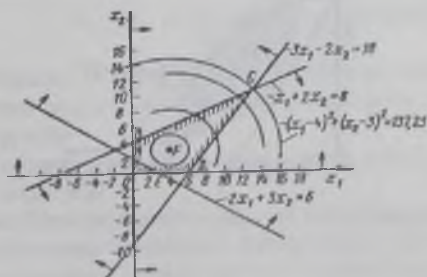
Мысал.

$$F = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 \to max, min,$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \geq 6, \\ 3x_1 - 2x_2 \leq 18, \\ -x_1 + 2x_2 \leq 8, \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Шешуі: *АВСДЕ* көпбұрышы мүмкін шешімдер облысының деңгейлік сызығы $-(x_1 - 4)^2 + (x_2 - 3)^2 = h$ шеңбері, оның центрі $E(4,3)$, ал радиусы $R = \sqrt{h}$

$$F = (4,3) - \min. \quad F_{min} = 0,$$
$$C(13,10,5) - \max) \quad F_{max} = 137,25$$



Мысал.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \rightarrow max$$

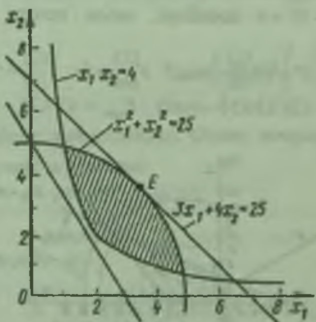
$$\begin{cases} x_1{}^2 + x_2{}^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 > 0, \end{cases}$$

Шешуі: Шешімдер облысы суретте көрсетілген Бұл суретте 2 деңгей сызығы көрсетілген, олар түзу болып табылады. Суреттен көретініміз, мақсаттық функция max мәнін Е нүктесінде қабылдайды, $x_1^2 + x_2^2 = 25$ шеңберін жанайды. Е нүктесінің координатасын анықтау үшін $3x_1 + 4x_2 = h$ түзуінің бұрыштық коффициентінің теңдігін пайдаланамыз x_2-ні айқын емес деп карастырып, $x_1^2 + x_2^2 = 25$ шеңберінің теңдеуін мүшелеп дифференциалдаймыз: $2x_1 + 2x_2 \cdot x_2' = 0$ немесе $x_2' = -\frac{x_1}{x_2}$. Табылған өрнекті $\left(-\frac{3}{4}\right)$-ке теңестіріп, теңдеудің бірін аламыз, Е нүктесінің координатасын анықтау үшін. Екінші теңдеу ретінде шеңбердің теңдеуін аламыз.

$$\begin{cases} 3x_1 - 4x_2 = 0 \\ x_1{}^2 + x_2{}^2 = 25 \end{cases}$$

$$x_1{}^* = 4, x_2{}^* = 3$$

$$F_{max} = 25.$$



Лабораториялық сабақ
Сызықтық емес программалау есебін геометриялық әдіспен MS Excel-ді пайдаланып шешу.

Мысал.

$$F = 3x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} {x_1}^2 + {x_2}^2 \le 25 \\ x_1 x_2 \ge 4, \\ x_1 + x_2 > 0, \end{cases}$$

Есепті Excel құралдарының көмегімен шешуге болады. Microsoft Excel-ді шақырыңыз.

1. **Excel электронды кестесіне математикалық модельді енгізу.**

Excel электронды кестесінің ұяшықтарына математикалық моделін енгізіңіз.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Шектеулер (Ограничения)		Оң жақ бөлігі		Шектеулер формуласы	
2		x1	x2				
3	Айнымалылар	=1	=1	=1			
4		=B3^2	=C3^2	25		=СУММ(B4;C4)	
5		=B3	=C3	4		=ПРОИЗВЕД (B5;C5)	
6		=B3	=C3	0		=СУММ(B6;C6)	
7	Мақсаттық функция	=3*B3	=4*C3			=СУММ(B7;C7)	
8							

1-сурет. Математикалық модельді жазу.

B4:B7 ұяшықтарына сол жақ бөліктегі қосылған шектеулерді және мақсаттық функцияны көрсететін формулалар енгізілген, олар x_1 және x_2 айнымалылардан тұрады.

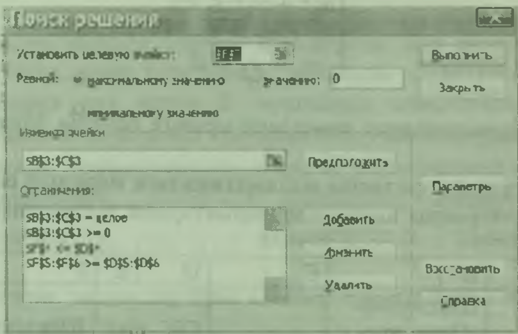
Анықтау қажетті, өзгеретін айнымалылар үшін, яғни x_1 және x_2 үшін, B3, C3 ұяшықтары қойылған.

2. **«Поиск решения-Шешімді іздеу» арқылы тиімді шешімін табу.**

F7 ұяшығында орналасқан мақсаттық функциясын есептеуге арналған формулаға тінтуір курсорын апарып қоямыз. Сервис мәзіріндегі «**Поиск**

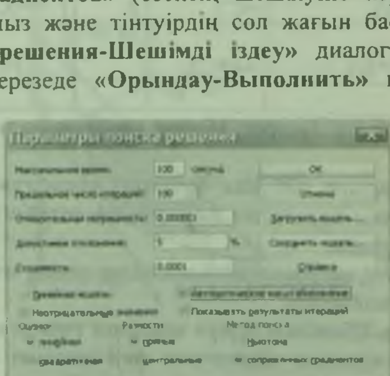
решения-Шешімді іздеу» командасы арқылы, **«Поиск решения-Шешімді іздеу»** диалогтық терезесін ашып, мынаны енгіземіз (2-сурет).

- максаттық функцияның ұяшығының адресі F7;
- максимизациялау-максимизировать пунктін басамыз;
- өзгеретін айнымалылар адрестері B3, C3 ұяшықтарында;



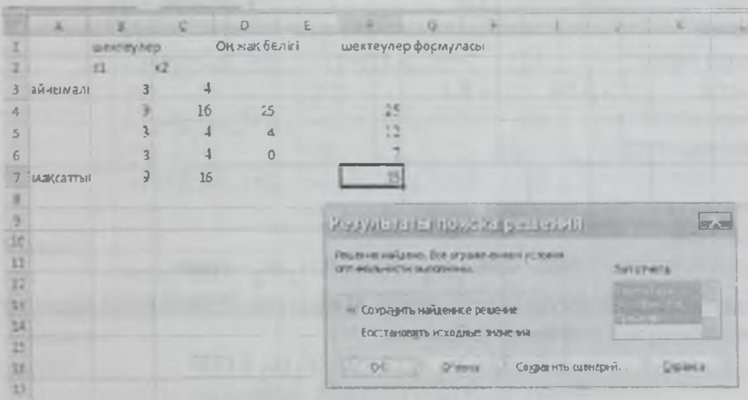
2-сурет. **«Поиск решения-Шешімді іздеу»** диалогтық терезесі.

«Поиск решения-Шешімді іздеу» панелінде **«Параметрлер-Параметры»** батырмасын басамыз. **«Параметры поиска решения-Шешімді іздеу»** параметрі диалогті терезесінде (3-сурет) **«Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование, сопряженных градиентов»** (есептің шешілуіне керек таңдалған әдіс) жалаушасын қоямыз және тінтуірдің сол жағын басып ОК таңдаймыз, сөйтіп, **«Поиск решения-Шешімді іздеу»** диалогті терезесіне қайта ораламыз. Бұл терезеде **«Орындау-Выполнить»** командасын таңдап, мынаны аламыз



3-сурет. **«Поиск решения-Шешімді іздеудің»** параметрлері

B_3 және C_3 ұяшықтарында ізделінді шешім $x_1=3$ және $x_2=4$ көрсетілген. Қосынды түріндегі максимум кіріс 25 F6 ұяшығында көрсетілген.



Сурет-4. Есептің тиімді шешімін табу нәтижесі.

Есеп. Кәсіпорын өнімнің екі түрін шығарады (j = 1, 2). Оның дайындалуына үш түрлі ресурс қажет (i = 1, 2, 3). Жарамсыздарын қосқанда j-ші түрдегі өндірілетін өнімнің бірлігіне кететін шығын $a_{ij} + k_{ij}x_j$ өрнегімен анықталады, ал өнім көлеміне тәуелді кіріс $p_j + l_jx_j$, мұндағы x_j – j-ші түрдегі өнімнің ізделінді өндірілу көлемі; a_{ij} – j-ші түрдегі өнімнің бірлігін өндіруге кететін i-ші ресурстың шығын нормасы; k_{ij} – жарамсыз бұйымның шығуын қоса есептегенде сәйкес ресурстың шығынының өзгеру коэффициенті; p_j – j-ші түрдегі өнімнің бірлігін реализациялағаннан келетін кіріс; l_j – j-ші түрдегі өнімнің өндірілу көлеміне әсер ететін, кірістің өзгеру коэффициенті. Кіріс максимум болатындай, өнімнің өндірілу көлемін табу керек.

Сандық деректері төмендегі кестеде:

Ресурс	j-ші түрдегі өнімге кететін ресурстардың (a_{ij}) шығын нормасы		Ресурс қосымшасы	j-ші түрдегі өнімге кететін ресурстардың (k_{ij}) шығын нормасының өзгеру коэффициенті	
	1	2		1	2

1	15	18	1350	0,1	0,05
2	12	16	1400	0,2	0,2
3	17	14	1580	0,1	0,15
Бірлік өнімнен келетін кіріс	100	120			
Кірістің өзгеру коэффициенті	– 0,08	– 0,1			

Математикалық моделі:

Мақсаттық

$$(100-0{,}08x_1)x_1+(120-0{,}1x_2)x_2 \to \max$$

функцияның максимумын табу керек. Мақсаттық функцияның максимумы мына шектеулер бойынша табылады:

$$(15+0{,}1x_1)x_1+(18+0{,}05x_2)x_2 \le 1350$$
$$(12+0{,}2x_1)x_1+(16+0{,}2x_2)x_2 \le 1400$$
$$(17+0{,}1x_1)x_1+(14+0{,}15x_2)x_2 \le 1580$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Excel-де қолдануға болатын математикалық модельге келтіреміз. Жақшаларды ашқаннан соң, алатынымыз:

$$100x_1-0{,}08x_1^2+120x_2-0{,}1x_2^2 \to \max$$
$$15x_1+0{,}1x_1^2+18x_2+0{,}05x_2^2 \le 1350$$
$$12x_1+0{,}2x_1^2+16x_2+0{,}2x_2^2 \le 1400$$
$$17x_1+0{,}1x_1^2+14x_2+0{,}15x_2^2 \le 1580$$
$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0$$

Есепті Microsoft Excel құралдарының көмегімен шешу.

Microsoft Excel шақырыңыз.

1. Excel электронды кестесіне математикалық модельді енгізу.

Excel электронды кестесінің ұяшықтарына математикалық моделін енгізіңіз. 1-кестеде көрсетілген.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Шектеулер (Ограничения)		Оң жақ бөлігі		Шектеулер формуласы	
2		x1	x2				
3		=15*B7+0,1*B7^2	=18*C7+0,05*C7^2	1350		=СУММ(B3;C3)	
4		=12*B7+0,2*B7^2	=16*C7+0,2*C7^2	1400		=СУММ(B4;C4)	
5		=17*B7+0,1*B7^2	=14*C7+0,15*C7^2	1580		=СУММ(B5;C5)	
6	Мақсаттық функция	=100*B7-0,08*B7^2	=120*C7-0,1*C7^2			=СУММ(B6;C6)	
7	Айнымалылар						

1-кесте. Математикалық модельді жазу.

B3:B6 ұяшықтарына сол жақ бөліктегі қосылған шектеулерді және мақсаттық функцияны көрсететін формулалар енгізілген, олар x_1 және x_2 айнымалылардан тұрады.

Анықтау қажетті, өзгеретін айнымалылар үшін, яғни x_1 және x_2 үшін, B7, C7 ұяшықтары қойылған.

B3 ұяшығындағы өрнектің мәнін түсінейік. Бірінші шектеуде алғашқы екі қосынды $15x_1 + 0{,}1x_1^2$ түрде. x_1 өзгеретін айнымалы мәні үшін B7 ұяшық қойылған, сондықтан B3 ұяшығына 15B7+0,1B7^2 өрнегі жазылған. Соған ұқсас басқа ұяшықтарға өрнектер жазылған.

F3:F6 ұяшықтарында x_1 және x_2 көлемді өнімнің өндірілуіне кететін ресурстың шығынын есептеуге арналған формулалар келтірілген. x_1 көлемді өнімнің бірінші түрінің өндірілуіне бірінші ресурсқа 15B7+0,1B7^2 кетеді. Ал x_2 көлемді екінші түрдегі өнімнің өндірілуіне сол ресурстан 18C7+0,05C7^2 кетеді және бұл шамалар B3 мен C3 ұяшықтарында орналасқан, онда бірінші ресурстың қосынды шығыны F3 ұяшығына жазылған, ол =СУММ(B3;C3) формуласымен көрсетілген. Соған ұқсас, F4 и F5 ұяшықтарына формулалар енгізілген. F6 ұяшығына өнімнің өндірілуінен келетін қосынды кіріс енгізілген (мақсаттық функция).

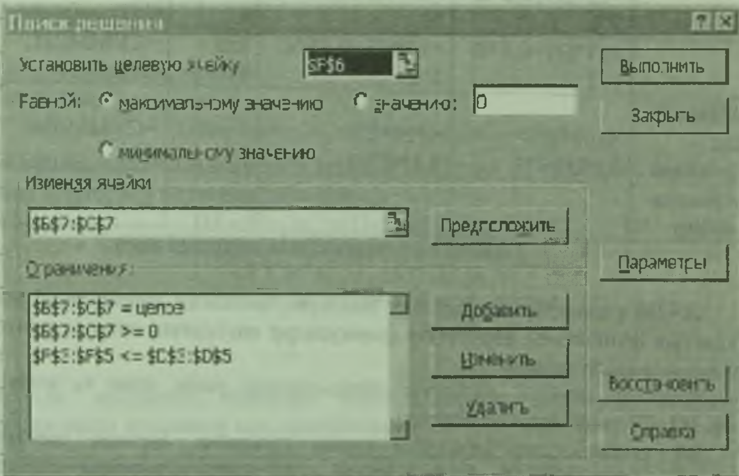
D3:D5 ұяшықтарына ресурстардың қосымшасы енгізілген.

2. «**Поиск решения-Шешімді іздеу**» арқылы тиімді шешімін табу.

F6 ұяшығында орналасқан мақсаттық функциясын есептеуге арналған формулаға тінтуір курсорын апарып қоямыз.

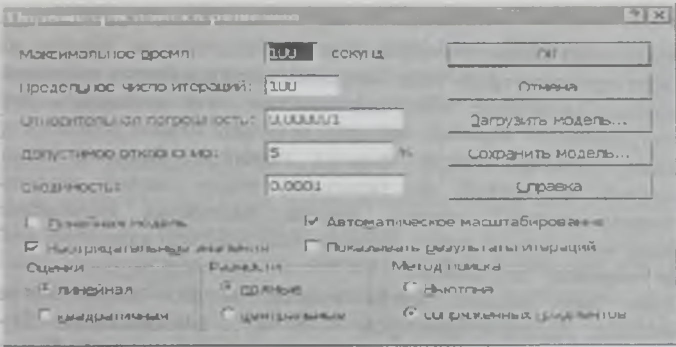
Сервис мәзіріндегі «**Поиск решения-Шешімді іздеу**» командасы арқылы, «**Поиск решения-Шешімді іздеу**» диалогтық терезесін ашып, мынаны енгіземіз (2-сурет).

- мақсаттық функцияның ұяшығының адресі F6;
- максимизациялау-максимизировать пунктін басамыз;
- өзгеретін айнымалылар адрестері B7, C7 ұяшықтарында;



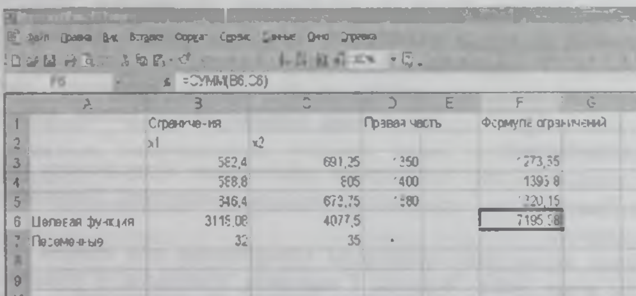
2-сурет. «**Поиск решения-Шешімді іздеу**» диалогтық терезесі

«**Поиск решения-Шешімді іздеу**» панелінде «**Параметрлер-Параметры**» батырмасын басамыз. «**Параметры поиска решения-Шешімді іздеу параметрі**» диалогтік терезесінде (3-сурет) «**Неотрицательные значения, Автоматическое масштабирование, сопряженных градиентов**» (есептің шешілуіне керек таңдалған әдіс) жалаушасын қоямыз және тінтуірдің сол жағын басып ОК таңдаймыз, сөйтіп, «**Поиск решения-Шешімді іздеу**» диалогті терезесіне қайта ораламыз. Бұл терезеде «**Орындау-Выполнить**» командасын таңдап, мынаны аламыз:



3-сурет «**Поиск решения-Шешімді іздеудің**» параметрлері

B7 және C7 ұяшықтарында өнімнің ізделінді көлемі $x_1 = 32$ және $x_2 = 35$ көрсетілген. Қосынды түріндегі максимум кіріс 7195,58 F6 ұяшығында көрсетілген.



4-сурет. Есептің тиімді шешімін табу нәтижесі.

§15. Ойын теориясы есебінің экономикалық және геометриялық түсіндірмесі.

Өмірде максаттары әр түрлі тараптардың (жеке адамдар, ұжымдар, мемлекеттер) өздерінің діттеген максатына жету жолында дауға ұрынатын жағдайлары көп кездеседі. Демек, дау - қоғамдық құбылыс. Дауды зерттегенде дауласушы тараптардың мүмкін әрекеттеріне талдау жасаудың маңызы зор. Сонда барынша тиімді шешім жасау мүмкін болады. Тараптардағы шешім кабылдаушылар өздерінің максатымен бірге карама-карсы тараптың да максатын еске алуы керек. Карама-карсы тарап туралы қосымша мәліметтер алу оңай емес.

Дауға қатысушы әрбір тарап операция жасаушы болып табылады. Ол өз мақсатын анықтайды және сол мақсатқа жету жолындағы активті құрал-жабдықтарын, берілген критерий бойынша мүмкін стратегияларын бағалайды, барынша тиімді әрекетті таңдайды. Басқаша айтқанда, қарсыласпен дауласудың не таласудың тиімді жолын анықтайды. “Амалдарды зерттеу” пәнінің даудың шарттарын математикалық модельдеу және даудың тиімді шешімін табу мәселесі қаралатын бөлімін “**Ойын теориясы**” деп атайды.

Ойын сөзі даудың математикалық моделі деген мағынада колданылады. Даудағы тараптарды A, B, C, ... деп белгілейді. Даудың мазмұнын анықтау үшін “Дауға қандай тараптар қатысады?”, “Тараптар қандай стратегиялар қолдана алады?”, “Стратегияны қолданудың нәтижесі қандай?”, тағы басқа сұрақтарға жауап табу керек.

Дауға қатысушылар, яғни операция жасаушы тараптар жиынын U деп белгілейік. Дауға қатысушы кездейсоқ $C \in U$ тараптың мүмкін стратегиялар жиыны $S_C = \{s_{1C}, s_{2C}, ...\}$ болсын. Дауласушы тараптардың әрқайсысының өз стратегияларының біреуін қолдануы даудың мүмкін нәтижелерінің J жиынының бір мәнін анықтайды. Жалпы жағдайда, мүмкін стратегиялардың кейбір комбинациясы қолдануға жарамай қалады. Сол себепті J жиынының элементтерінің санын алдын ала анықтау мүмкін емес.

Дау жағдайы келесі белгілермен сипатталады: 1)дауласушы тараптар құрамы; 2)дауласушы тараптардың мүмкін әрекетттері; 3)қарама-қарсы жақтың мақсаты.

Ойында дауласушы тараптарды **ойыншылар** деп атайды. Даудың нәтижесін **ұтыс** дейді. Ұсысты 1 санымен, ұтылысты 0 санымен, тең ойынды ½ санымен белгілейді. Көбінесе ойыншылар тең құқылы болып есептеледі.

Ойын белгілі бір ереже бойынша жүргізіледі. Ойыншының ережеге сәйкес жасаған әрекетін ойыншының **жүрісі** деп атайды. Мүмкін болатын әрекеттердің біреуін әдейі таңдау **дербес жүріс** деп аталады. Кездейсоқ жасалған әрекетті **кездейсоқ жүріс** деп атайды.

Ойыншы жүрісін таңдауды қалыптасқан жағдайға байланысты бірмәнді анықтайтын ережелер жүйесін **стратегия** деп атайды. Басқаша айтқанда, ойын кезінде ойыншының кез келген мүмкін әрекеті ойыншының **таза стратегиясы** деп аталады.

A ойыншының $m \geq 1$ стратегиясы бар болсын, осы стратегиялар жиынын $S_A^C = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ деп белгілейік, мұндағы C әрпі ағылшынша clean – таза сөзінің бірінші әрпі. Дауда әрбір ойыншы өз жүрісін жасайды, яғни өзінің кандай да бір стратегиясын таңдайды. Нәтижесінде **даудың жағдайы** деп аталатын ойыншылардың x стратегиялар жиыны құрылады.

Мысалы, A және B ойыншылары ойынға өздерінің $S_A^C = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ және $S_B^C = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ стратегияларымен қатысты. Кезектің жүрістің нәтижесінде ойыншылар A_i және B_j стратегияларын таңдаса, онда $x = (A_i, B_j)$ реттелген жұбы осы жүрістен кейінгі жағдай болып табылады.

D және E жиындарының барлык (d, e) реттелген жұптарының жиынын $D \times E = \{(d, e) : d \in D, e \in E\}$ **декарттық көбейтінді** деп атайды. A ойыншысының таза S_A^C стратегиялар жиыны мен B ойыншысының таза S_B^C стратегиялар жиынының декарттық көбейтіндісі $X = S_A^C \times S_B^C = \{(A_i, B_j), i = \overline{1,m}, j = \overline{1,m}\}$ барлық жағдайлар жиынын аныктайды.

Ойын бірнеше рет кайталанғанда ойыншыға барынша көп мүмкін болатын орташа ұтысқа кепілдік беретін стратегия **тиімді стратегия** деп аталады.

Ойындарды мына сипаттамалары бойынша жіктейді.1)ойыншылар саны (**жұп** немесе **көптік** ойын); 2)ойыншының стратегияларының саны (**ақырлы** немесе **ақырсыз** ойын); 3)ойын нәтижесі (**нөлдік** және **нөлдік емес** косындылы ойын); 4)ойыншылардың өзара карым-катынасы (ойыншылар карама-карсы мақсатты көздесе **антогонистік** ойын; **коалициялы** және **коалициясыз** ойын); 5)ұтыс функциясы (**матрицалық**, биматрицалық, үзіліссіз, дөңес, сепарабельді және тағы баска ойын).

A ойыншының барлығы $S_A^C = \{A_1, A_2, ..., A_m\}$ стратегиясы, B ойыншының барлығы $S_B^C = \{B_1, B_2, ..., B_n\}$ стратегиясы болатын ойынды $m \times n$ өлшемді ойын деп атайды. Жалпы жағдайда, m және n сандары өзара тәуелсіз. Ойыншылар өз кезекті жүрістерін жасағанда ойынның a_{ij} корытындысы бірмәнді аныкталады. Бұл сан A ойыншының ұтысын, B ойыншының ұтылысын сипаттайды. Егер $a_{ij} \succ 0$ болса, онда A ойыншы ұтады және B ойыншы ұтылады. Егер $a_{ij} \prec 0$ болса, онда B ойыншы ұтады және A ойыншы ұтылады.

Егер A және B ойыншылары ойында кездейсок жүрістер жасаса, онда A_i және B_j стратегияларындағы ұтыс та кездейсок ұтыс болады. Бізге $m \times n$ ойынының барлык a_{ij} мәндері белгілі болсын. Матрицаның жолдарына A ойыншының A_i стратегияларын, матрицаның бағандарына B ойыншының B_j стратегияларын сәйкес коюға болады.

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m1}	...	a_{m1}

Егер жол мен бағанның қиылысуына A ойыншының (A_i, B_j) жағдайына сәйкес F_A ұтыс функциясының $F_A(A_i, B_j) = a_{ij}$ мәнін қойсақ, онда A ойыншының ***A* ұтыс матрицасы** алынады. Осы сияқты, B ойыншының F_B ұтыс функциясының $F_B(B_j, A_i) = b_{ji}$ мәндері бойынша B ойыншының $\boldsymbol{B=-A^T}$ ұтыс матрицасы алынады, яғни $\boldsymbol{B}$ матрицасы дегеніміз қарама-қарсы таңбамен алынған $\boldsymbol{A}$ матрицасының транспонирленген матрицасы. Кез келген ақырлы антагонистік ойын тек қана бір ұтыс матрицасымен сипатталады. Осы ойынды **матрицалық** ойын деп атайды.

Ойынды A ойыншының тұрғысынан қарастырады. A ойыншы өзінің $A_1, A_2, ..., A_m$ стратегияларының ең жақсы стратегиясын таңдасын. Сонда A ойыншының A_i стратегиясына сәйкес B ойыншы A ойыншының ұтысы минимум ету мақсатымен өзінің B_j стратегиясымен жауап береді. Ізделінді B_j стратегиясын табу үшін ұтыс матрицасындағы A_i стратегиясына сәйкес жолдағы a_{ij} сандардың ішіндегі ең кішісін табу керек $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}$, $i = \overline{1,m}$. α_i - A_i стратегиясының **тиімді көрсеткіші** деп аталады. A ойыншының стратегиясы өзгергенде оларға сәйкес тиімді көрсеткіштер де өзгереді. A ойыншыға α_i максимум мән қабылдайтындай A_i стратегиясын таңдағаны дұрыс $v = \max\limits_i \alpha_i$. Табылған $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) мәнін **ойынның төменгі құны** немесе максимум ұтысы (максимин) деп атайды. Бұл B ойыншының кез келген стратегиясындағы A ойыншының кепілденген ұтысы. Максиминге, яғни $\underline{v}$ санына сәйкес келетін A_i стратегиясын A ойыншының максиминді стратегиясы деп атайды.

Сол сияқты **ойынның жоғарғы құны** немесе минимум ұтылысы (минимакс) деп аталатын $\overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$ ($i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$) санын табуға болады. Бұл A ойыншының кез келген стратегиясындағы B ойыншының кепілденген ұтысы. Минимакске, яғни $\overline{v}$ санына сәйкес келетін B_j стратегиясын B ойыншының минимаксті стратегиясы деп атайды. Ойында максиминді немесе минимаксті стратегиялар бірнешеу болуы мүмкін.

Кез келген матрицалық ойын үшін $\underline{v} \le \bar{v}$. Егер, дербес жағдайда, $\underline{v} = \bar{v}$ болса, онда максиминді және минимаксті стратегиялар A және B ойыншылардың **тиімді стратегиялары** деп аталады. Тиімді стратегиялардың жиынтығын **ойынның тиімді шешімі** деп атайды. Сонда **ойынның таза құны** $v = \underline{v} = \bar{v}$ болады. Бұл жағдайда A ойыншы B ойыншының жүрісіне тәуелсіз кепілденген барынша көп v ұтысын алса, B ойыншы A ойыншының жүрісіне тәуелсіз кепілденген v ұтылысқа жетеді.

Тиімді стратегияларды i^*, j^* арқылы белгілейді. Егер $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*}$ $(i = \overline{1,m})$ теңсіздігі орындалса, онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы A ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдай деп аталады. Егер $a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ $(j = \overline{1,n})$ теңсіздігі орындалса, онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы B ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдай деп аталады. Егер $a_{ij^*} \le a_{i^*j^*} \le a_{i^*j}$ $(i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n})$ орындалса, онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы ойынның **тепе-теңдік жағдайы** деп, сол жагдайға сәйкес келетін ұтыс $a_{i^*j^*}$ **ер нүктесі** деп аталады.

Мысал. Ойын ұтыс матрицасымен берілген:

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	0	-1
A_2	3	4	2
A_3	4	6	3
A_4	5	7	5

Ойынның төменгі құнын, жоғарғы құнын, ер нүктесін, тиімді стратегиясын анықтау керек.

Егер A ойыншы A_1 стратегиясын таңдаса, онда ол ең кем дегенде $\alpha_1 = \min(2;0;-1) = -1$ ұтысты, A_2 стратегиясын таңдаса, онда ол ең кем дегенде $\alpha_2 = \min(3;4;2) = 2$ ұтысты, A_3 стратегиясын таңдаса, онда ол ең кем дегенде $\alpha_3 = \min(4;6;3) = 3$ ұтысты, A_4 стратегиясын таңдаса, онда ол ең кем дегенде $\alpha_4 = \min(5;7;5) = 5$ ұтысты алады. Алынған мәндерді матрицаның оң жағына әр жолдың тұсына жазады.

	B_1	B_2	B_3	
A_1	2	0	-1	**-1**
A_2	3	4	2	**2**
A_3	4	6	3	**3**
A_4	5	7	5	**5**

A ойыншы өзінің ең аз ұтысын максимизациялау мақсатында келесі стратегияны таңдайды $\underline{v} = \max\alpha_i = \max(-1;2;3;5) = 5$. Ойынның төменгі құны $\underline{v} = 5$ - A ойыншының кепілденген ұтысы. Осы $\underline{v} = 5$ ұтысты қамтамасыз ететін A_4 стратегиясы – минимаксті стратегия. Сонымен A ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3).

Осы сияқты B ойыншының ең жақсы стратегиясын анықтаймыз. Егер B ойыншы B_1 стратегиясын таңдаса, онда ол ең көп дегенде $\beta_1 = \max(2;3;4;5) = 5$ ұтылысқа, B_2 стратегиясын таңдаса, онда ол ең көп дегенде $\beta_2 = \max(0;4;6;7) = 7$ ұтылысқа, B_3 стратегиясын таңдаса, онда ол ең көп дегенде $\beta_3 = \max(-1;2;3;5) = 5$ ұтылысқа кез келеді. Алынған мәндерді матрицаның төменгі жағына әр бағанның тұсына жазады.

	B_1	B_2	B_3
A_1	2	0	-1
A_2	3	4	2
A_3	4	6	3
A_4	5	7	5
	5	**7**	**5**

B ойыншы ең көп ұтылысын минимизациялау үшін келесі стратегияны таңдайды $\bar{v} = \min\beta_j = \min(5;7;5) = 5$. Ойынның жоғарғы құны $\bar{v} = 5$ - B ойыншының кепілденген ұтылысы. Осы $\bar{v} = 5$ ұтылысты қамтамасыз ететін B_1 және B_3 стратегиялары – максиминді стратегиялар. Сонымен B ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_3, B_1), (A_4, B_1), (A_1, B_3), (A_2, B_3), (A_3, B_3), (A_4, B_3).

Ойынның төменгі және жоғарғы құндары өзара тең $\underline{v} = \bar{v} = v = 5$, яғни ойынның таза стратегиялар жиынында шешімі бар $v = 5$. Демек, ойынның екі тиімді стратегиясы (ер нүктесі) бар (A_4, B_1), (A_4, B_3).

Жаттығу. Ойын ұтыс матрицасымен берілген. Ойынның төменгі құнын, жоғарғы күнін, ер нүктесін, тиімді стратегиясын анықтау керек (n - студенттің жеке нөмірі).

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6
A_1	4	5	$4+n$	4	4	6
A_2	$3+n$	4	2	$2+n$	3	3
A_3	4	$8-n$	3	5	$2+n$	9
A_4	2	7	$3+n$	9	3	$6-n$

§16. Матрицамен берілген ойынның аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін анықтау.

Таза стратегиялардың бірін кездейсок таңдаудан тұратын ойыншының стратегиясы **аралас стратегия** деп аталады.

A ойыншының аралас стратегиясын матрица түрінде былай жазады $S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_m \end{pmatrix}$ немесе $S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$.

B ойыншының аралас стратегиясын матрица түрінде былай жазады $S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_n \end{pmatrix}$ немесе $S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, $\sum_{j=1}^{m} q_j = 1$.

Таза стратегия аралас стратегияның дербес жағдайы болады, себебі A ойыншының әрбір A_i, $i = \overline{1,m}$ таза стратегиясын $A_1 = (1,0,0,\dots,0,0)$, $A_2 = (0,1,0,\dots,0,0)$, $A_3 = (0,0,1,\dots,0,0)$, ... , $A_m = (0,0,0,\dots,0,1)$ түріндегі аралас стратегия ретінде карайды. Мұнда A_i, $i = \overline{1,m}$ таза стратегия $p_i = 1$ ыктималдыкпен, ал калған стратегиялар нөлге тең ыктималдыкпен таңдалынды.

Минимакс принципінің көмегімен ойынның тиімді шешімі анықталады: егер бір ойыншы өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, онда екінші ойыншыға өзінің стратегиясынан бас тарту тиімді болмайтындай S_A^*, S_B^* тиімді стратегиялар жұбы болады. Тиімді шешімге сәйкес ұтыс **ойын құны** деп аталады. Ойынның v құны $\underline{v} \le v \le \overline{v}$ теңсіздігін канағаттандырады, мұндағы $\underline{v}$ және $\overline{v}$ ойынның сәйкесінше төменгі және жоғарғы құндары.

Кез келген шектеулі кем дегенде бір тиімді шешімі бар болады және ол аралас стратегияларда болуы мүмкін. $S_A = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $S_B = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ тиімді стратегиялар жұбы болсын. Егер таза стратегия нөлдік ықтималдықтан өзге тиімді аралас стратегияға енетін болса, онда ол **белсенді стратегия** деп аталады.

Егер ойыншылардың біреуі өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, ал екінші ойыншы өзінің белсенді стратегияларынан тыс кетпесе, онда ұтыс өзгеріссіз қалады және ойынның v құнына тең болады.

Ойын $n \times m$ өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін. Ойыншылардың сәйкесінше P, Q аралас стратегиялары белгілі болсын. Осы жағдайлардағы ойыншылардың ұтысын немесе ұтылысын анықтау керек.

A ойыншының (P,Q), $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $Q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ жағдайындағы ұтысы $H(P,Q) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j$ немесе $H(P,Q) = PAQ^T$ формулаларының біреуімен анықтауға болады, мұндағы $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$ - $1 \times m$ өлшемді вектор-жол;

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- $m\times n$ өлшемді ойын матрицасы (таза стратегиядағы A ойыншының ұтыс матрицасы);

$$Q^T=\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$$

- $n\times 1$ өлшемді вектор-баған.

A ойыншының (P,B_l) жағдайындағы, яғни A ойыншы P аралас стратегиясын, ал B ойыншы B_l таза стратегиясын ұстанған жағдайдағы ұтысы

$$H(P,B_l)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i a_{il}=P(a_{1l},a_{2l},...,a_{ml})^T$$

формуласымен есептеледі.

B ойыншының (A_k,Q) жағдайындағы ұтылысы

$$H(A_k,Q)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}q_j=(a_{k1},a_{k2},...,a_{kn})Q^T$$

формуласымен есептеледі.

Мысал. 2×4 өлшемді ойынның ұтыс матрицасы

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	4	5	3	8
A_2	8	4	5	3

және A, B ойыншыларының сәйкесінше $P=(0,25;0,75)$, $Q=(0,2;0,0,6;0,2)$ аралас стратегиялары берілсін. A ойыншының (P,Q), (P,B_1), (P,B_2), (P,B_3), (P,B_4) жағдайларындағы ұтысын, A ойыншының P аралас стратегиясының $\underline{v}$ тиімділік корсеткішін, B ойыншының (A_1,Q), (A_2,Q) жағдайларындағы ұтылысын, B ойыншының Q аралас стратегиясының $\bar{v}$ тиімділік емес көрсеткішін анықтау керек.

$$H(P,Q)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}p_i a_{ij}q_j=\sum_{i=1}^{2}p_i\sum_{j=1}^{4}a_{ij}q_j=\sum_{i=1}^{2}p_i(a_{i1}q_1+a_{i2}q_2+a_{i3}q_3+a_{i4}q_4)=$$

$$=p_1(a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3+a_{14}q_4)+p_2(a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3+a_{24}q_4)=\frac{99}{20}=4,95;$$

$$H(P,B_2)=\sum_{i=1}^{2}p_i a_{i2}=p_1a_{12}+p_2a_{22}=\frac{17}{4}=4{,}25\,;$$

$$H(P,B_3)=\sum_{i=1}^{2}p_i a_{i3}=p_1a_{13}+p_2a_{23}=\frac{9}{2}=4{,}5\,;$$

$$H(P,B_2)=\sum_{i=1}^{2}p_i a_{i2}=p_1a_{12}+p_2a_{22}=\frac{17}{4}=4{,}25\,;$$

$$\underline{v}(P)=\min\{H(P,Q),H(P,B_1),H(P,B_2),H(P,B_3),H(P,B_4)\}=\min\{7;4{,}25;4{,}5;4{,}25\}=4{,}25\,;$$

$$H(A_1,Q)=\sum_{j=1}^{4}a_{1j}q_j=a_{11}q_1+a_{12}q_2+a_{13}q_3+a_{14}q_4=\frac{21}{5}=4{,}2\,;$$

$$H(A_2,Q)=\sum_{j=1}^{4}a_{2j}q_j=a_{21}q_1+a_{22}q_2+a_{23}q_3+a_{24}q_4=\frac{26}{5}=5{,}2\,;$$

$$\bar{v}(Q)=\max\{H(A_1,Q),H(A_2,Q)\}=\max\{4{,}2;5{,}2\}=5{,}2\,.$$

Жаттығу. 3×4 өлшемді ойынның ұтыс матрицасы

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	$4+n$	5	3	$8-n$
A_2	8	$4+n$	$5-n$	3
A_3	$3-n$	1	$-3+n$	1

және A, B ойыншыларының сәйкесінше $P=(0{,}45;0{,}25;0{,}3)$, $Q=(0{,}2;0{,}1;0{,}3;0{,}4)$ аралас стратегиялары берілсін. A ойыншының (P,Q), (P,B_1), (P,B_2), (P,B_3), (P,B_4) жағдайларындағы ұтысын, A ойыншының P аралас стратегиясының $\underline{v}$ тиімділік көрсеткішін, B ойыншының (A_1,Q), (A_2,Q), (A_3,Q) жағдайларындағы ұтылысын, B ойыншының Q аралас стратегиясының $\bar{v}$ тиімділік емес көрсеткішін анықтау керек.

Ұтыс матрицасының өлшемі үлкен болғанда ер нүктесі жоқ ойынның шешімін табу қиын. Кейде ойынды күрделі матрицадан қарапайым матрицаға келтіру арқылы ықшамдауға (редукциялауға) болады.

Редукциялаудың бір әдісі – **доминациялау принципі**.

Ойын $m\times n$ өлшемді ұтыс матрицасы берілсін.

	B_1	B_2	...	B_n
A_1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
A_2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...	...	...	...	...
A_m	a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}

Егер ұтыс матрицасы жолдарының

$$(\sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{im}), \; p'_i \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i = 1 \qquad (1)$$

және

$$(\sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{im}), \; p''_i \geq 0, \; i = \overline{1,m}, \; \sum_{i=1}^{m} p''_i = 1 \qquad (2)$$

дөңес комбинациялары үшін

$$\sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i1} \leq \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i1}, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i2} \leq \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i2}, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{im} \leq \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{im}$$

болса, онда (2) жол (1) жолды **доминациялайды**, (1) жол (2) жолмен **доминацияланады** деп атайды.

Егер

$$\sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i1} = \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i1}, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i2} = \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i2}, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{im} = \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{im}$$

болса, онда (1), (2) жолдар бірін бірі **дубльдейді** деп атайды.

Егер

$$\sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i1} \prec \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i1}, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{i2} \prec \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{i2}, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{m} p'_i a_{in} \prec \sum_{i=1}^{m} p''_i a_{im}$$

болса, онда (2) жол (1) жолды **қатаң доминациялайды**, (1) жол (2) жолмен **қатаң доминацияланады** деп атайды.

Егер (2) жол (1) жолды доминацияласа, дубльдесе, қатаң доминацияласа, онда $P'' = (p''_1, p''_2, \ldots, p''_m)$ стратегиясы $P' = (p'_1, p'_2, \ldots, p'_m)$ стратегиясын **доминациялайды, дубльдейді, қатаң доминацияланады** деп атайды.

Егер ұтыс матрицасы бағандарының

$$(\sum_{i=1}^{n} q'_j a_{1j}, \sum_{i=1}^{n} q'_j a_{2j}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} q'_j a_{mj})^T, \; q'_i \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \; \sum_{i=1}^{n} q'_i = 1 \qquad (3)$$

және

$$(\sum_{i=1}^{n} q''_j a_{1j}, \sum_{i=1}^{n} q''_j a_{2j}, \ldots, \sum_{i=1}^{n} q''_j a_{mj})^T, \; q'_i \geq 0, \; j = \overline{1,n}, \; \sum_{i=1}^{n} q''_i = 1 \qquad (4)$$

дөңес комбинациялары үшін

$$\sum_{i=1}^{n} q'_j a_{1j} \leq \sum_{i=1}^{n} q''_j a_{1j}, \sum_{i=1}^{n} q'_j a_{1j} \leq \sum_{i=1}^{n} q''_j a_{1j}, \; \ldots, \; \sum_{i=1}^{n} q'_j a_{1j} \leq \sum_{i=1}^{n} q''_j a_{1j}$$

болса, онда (3) баған ($Q = (q'_1, q'_2, \ldots, q'_n)$ стратегия) (4) бағанды (сәйкесінше $Q'' = (q''_1, q''_2, \ldots, q''_n)$ стратегияны) **доминациялайды**, (4) баған ($Q'' = (q''_1, q''_2, \ldots, q''_n)$ стратегия) (3) бағанмен ($Q = (q'_1, q'_2, \ldots, q'_n)$ стратегиямен) **доминацияланады** деп атайды.

Екі дубльденетін таза стратегиялардың кез келген біреуін жазбай тастап кетуге болады. Егер ойын матрицасының k -жолы басқа бір жолмен доминацияланса, онда k -жолды жазбай тастап кетуге болады.

Мысал. Ойын 5×5 өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	8	6	6	5
A_2	7	5	4	4	3
A_3	6	9	9	5	7
A_4	7	5	4	4	3
A_5	3	6	6	4	5

Осы ойын матрицасын редукциялау керек.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	8	6	6	5
A_2	7	5	4	4	3
A_3	6	9	9	5	7
A_4	7	5	4	4	3
A_5	3	6	6	4	5

A_2 және A_4 стратегиялары дубльденеді.

	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	10	8	6	6	5
A_2	7	5	4	4	3
A_3	6	9	9	5	7
A_5	3	6	6	4	5

B_2 стратегия B_1 стратегиямен доминацияланады.

	B_1	B_3	B_4	B_5
A_1	10	6	6	5
A_2	7	4	4	3
A_3	6	9	5	7
A_5	3	6	4	5

B_3 стратегия B_4 стратегиямен доминацияланады.

	B_1	B_4	B_5
A_1	10	6	5
A_2	7	4	3
A_3	6	5	7
A_5	3	4	5

A_3 стратегия A_5 стратегияны қатаң доминациялайды.

	B_1	B_4	B_5
A_1	10	6	5
A_2	7	4	3
A_3	6	5	7

B_1 стратегия B_4 стратегиямен қатаң доминацияланады.

	B_4	B_5
A_1	6	5
A_2	4	3
A_3	5	7

A_1 стратегия A_2 стратегияны қатаң доминациялайды.

	B_4	B_5
A_1	6	5
A_3	5	7

Редукциялау нәтижесінде 2×2 өлшемді матрицасы алынды.
Ойын ұтыс матрицасымен берілсін:

$$P = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Егер ер нүкте жоқ болса, онда шешімді аралас стратегияда $(P(p_1, p_2), Q(q_1, q_2))$ іздейміз. A ойыншының тиімді стратегиясын қолдану B ойыншының кез келген стратегиясында v ұтысты иемденетінін білдіреді. Осы айтылгандардың негізінде B ойыншының сәйкес B_1 және B_2 стратегияларын ұстағанда келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v, \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

Осы системаны шешеміз

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\ p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\ v = \frac{a_{22}a_{11} - a_{12}a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

В ойыншының орташа ұтылысының ойынның құныны тең екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін алады

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v, \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v, \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Сонда В ойыншының тиімді стратегиясы мына формулалармен анықталады

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}},\ q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}.$$

2 × 2 ойынының геометриялық шешімі.

1)Абсцисса осінде бірлік A_1A_2 кесіндісін тұрғызамыз. A_1 нүктесі A_1 стратегиясын бейнелейді. Осы кесіндідегі басқа аралық нүктелер бірінші ойыншының S_A аралас стратегияларын береді. S_A мәнінен оң жақ шетіне дейінгі ара қашықтық - A_1 стратегиясының p_1 ықтималдығын, сол жақ шетіне дейінгі ара қашықтық - A_2 стратегиясының p_2 ықтималдығын береді.

2) A_1A_2 кесіндісінің ұштарында оған екі перпендикуляр: A_1 стратегиясына сәйкес сол жақ перпендикуляр және A_2 стратегиясына сәйкес оң жақ перпендикуляр тұрғызады.

3)Сол жақ перпендикулярда A матрицасының бірінші жолының a_{11}, a_{12} элементтерін белгілейді.

4)Оң жақ перпендикулярда A матрицасының екінші жолының a_{21}, a_{22} элементтерін белгілейді.

Ескерту. Сол және оң жақ перпендикулярлардағы масштабтар бірдей болу керек, бірақ $[0;1]$ горизонталь кесіндісінің масштабымен бірдей болуы міндетті емес.

5)Екінші индекстері бірдей элементтерді кесінді арқылы қосамыз. Нәтижесінде $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерін аламыз.

5.1)Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділері кемімелі емес болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$

кесінділері өспелі емес болса, онда A_1 стратегиясы A_2 стратегиясын доминациялайды.

5.2)Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен төмен орналаспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен жоғары орналасса және онымен қиылыспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

6)$a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышын табамыз.

7)Төменгі орайжанауыштың жоғарғы нүктесін табамыз.

8)$[0;1]$ горизонталь кесіндісіне олардың ортогоналды проекциясын түсіреміз.

9)Алынған p проекциясы A ойыншының $P=(1-p,p)$ аралас стратегиясын анықтайды.

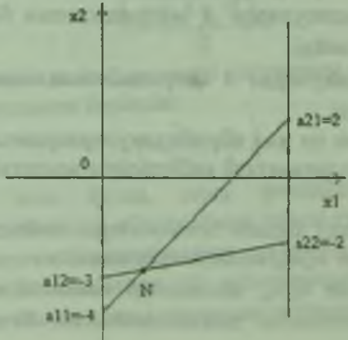
10)Орайжанауыштың перпендикулярларда жататын ең жоғарғы нүктесінің ординатасы ойынның V құнын береді.

11)Төменгі орайжанауыштың екі шетінің жоғарғысы таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құқын береді.

12)$a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің екі жоғарғы ұштарының төменгісі таза стратегиялардағы ойынның $\bar{v}$ жоғарғы құнын береді.

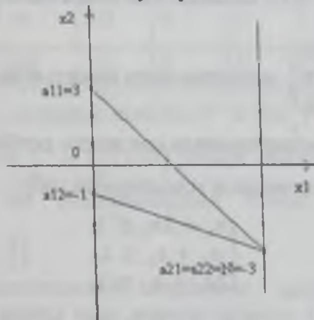
13)Егер элемент өзі орналасқан перпендикулярдағы кішісі және өзі орналасқан $a_{11}a_{21}$ немесе $a_{12}a_{22}$ кесіндісінің жоғарғы ұшы болса, онда бұл элемент ойынның ер нүктесі болып табылады. Бұл жағдайда нөмірі ер нүктенің екінші индексімен бірдей болатын B ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

Мысал. $P=\begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.



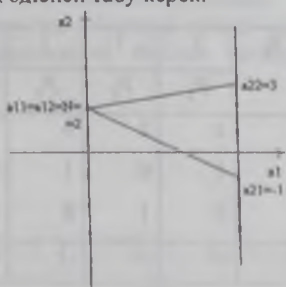
$a_{11}Na_{22}$ орайжанаушының максимум нүктесі оң жақ перпендикулярда орналасқан a_{22} нүктесі. Сондықтан A ойыншының $A_2=(0,1)$ таза стратегиясы оның тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $v=\underline{v}=\bar{v}=a_{22}=-2$. Демек, a_{22} элементі P матрицасының ер нүктесі және ойынның таза стратегияда шешімі бар.

Мысал. $P=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.



$a_{12}a_{22}$ төменгі орайжанаушының максимум нүктесі a_{12} сол жақ перпендикулярда, ал $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. Сондықтан A ойыншының $A_1=(1,0)$ таза стратегиясы оның тиімді стратегиясы болып табылады. Демек, a_{12} элементі P матрицасының ер нүктесі. B ойыншының B_2 стратегиясы тиімді стратегия болып табылады. Ойынның құны $v=a_{12}=-1$.

Мысал. $P=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.



$a_{11}a_{21}$ төменгі орайжанаушының максимум нүктесі a_{11}, $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі сол жақ перпендикулярда жатыр. Сондықтан A ойыншының $A_1 = (1,0)$ таза стратегиясы оның тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $v = a_{12} = 2$. Демек, a_{11} элементі ойынның ер нүктесі.

Практикалық сабақ
Матрицамен анықталған ойын есебін шешу.

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасымен анықталған ойын шешімін табу.

Шешімі. Сызықтық бағдарламаның қос жақты есебін құрамыз: Тура есеп:

$F = x_1 + x_2 + x_3$ функциясының максимумын табу:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0;$$

Қос есеп: $F^* = y_1 + y_2 + y_3$ функциясының минимумын табу:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 2y_1 + y_3 \ge 1, \\ y_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

Тура және қос жақты есептің тиімді жоспарын табамыз (1-кесте).

1-кесте.

i	Базис	$C_б$	P_0	1	1	1	0	0	0
				P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_5	0	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			0	-1	-1	-1	0	0	0

1	P_4	0	1	1	2	0	1	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	1	2	1	0	0	0	1
			1	0	-1	0	0	1	0
1	P_2	1	½	½	1	0	½	0	0
2	P_3	1	1	1	0	1	0	1	0
3	P_6	0	½	3/2	0	0	-1/2	0	1
			3/2	1/2	0	0	1/2	1	0

Кестеден көретініміз, алғашкы есептің $X^* = \left(0; \frac{1}{2}; 1\right)$ тиімді жоспары бар, ал кос жакты есептің $Y^* = \left(\frac{1}{2}; 1; 0\right)$ тиімді жоспары бар. Сәйкес, ойын құны $\vartheta = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3}$, ал ойыншылардың тиімді стратегиялары $U^* = \left(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; 0\right)$; $Z^* = \left(0; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

Жоғарыда көрсетілгендей, кезкелген матрицалық ойын үшін симметриялық қос жақты есеп жазуға болады. Оған керісі де орынды: кезкелген симметриялық қос жақты есепке матрицалық ойын жазуға болады.

Симметриялык кос жакты есеп берілсін: тура есеп: $F = CX, AX \leq B, X \geq 0$; кос жакты есеп: $F^* = BY, YA \geq C, Y \geq 0$. онда осы симметриялык кос жакты есепке,

$$D = \begin{pmatrix} 0 & A & -B \\ -A^T & 0 & C^T \\ B^T & -C & 0 \end{pmatrix}$$

матрицамен аныкталатын ойын сәйкес коюға болады. Мұндағы ^{T} индексі транспонирлеу операциясын анықтайды.

Егер әрбір матрицалык ойынның тиімді стратегиялары бар болса, онда сызықтық бағдарламаның барлық есептерінің шешімдері бола бермейтінін ескертейік.

Лабораториялық жұмыс
Матрицамен анықталған ойын есебін шешу.

Мысал. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ матрицасымен анықталған ойын шешімін табу.

Шешімі. Сызықтық бағдарламаның қос жақты есебін құрамыз: Тура есеп:

$F = x_1 + x_2 + x_3$ функциясының максимумын табу:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ x_1 + x_3 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \end{cases}$$

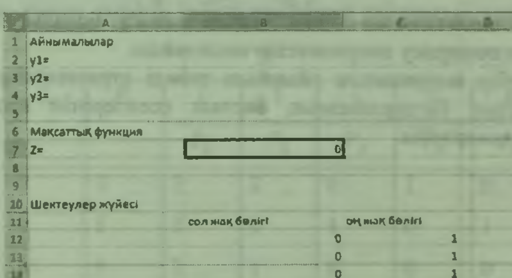
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0;$$

Қос есеп: $F^* = y_1 + y_2 + y_3$ функциясының минимумын табу:

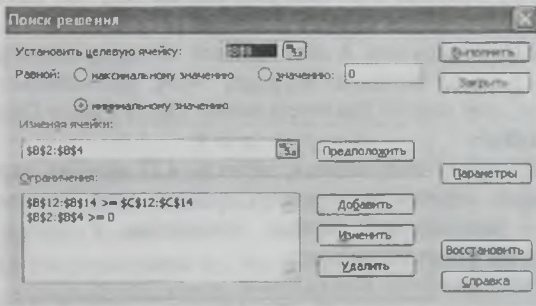
$$\begin{cases} y_1 + y_2 + 2y_3 \ge 1, \\ 2y_1 + y_3 \ge 1, \\ y_2 \ge 1, \end{cases}$$

$$y_1, y_2, y_3 \ge 0.$$

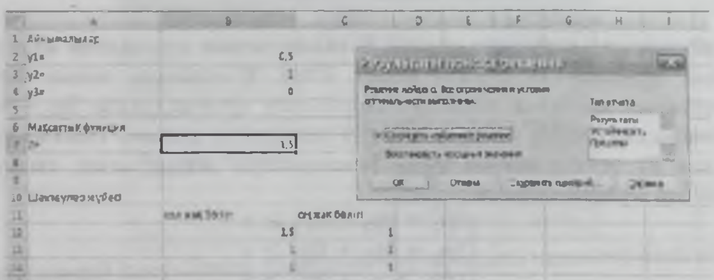
Есепті MS Excel арқылы шешеміз.
Әр ұяшыққа = арқылы формулаларды жазып шығамыз:
Мысалы B12 ұяшығына: =B2+B3+2*B4
B13: =2*B2+B4
B14: =B3
Мақсаттық функция үшін: =B2+B3+B4



B7 ұяшығын басып **«Шешімді іздеу-Поиск решения»** басамыз. Пайда болған терезеде қажетті жұмыстарды орындаймыз.



Нәтижеде мына шешім пайда болады.



Есептің максимум мәні – 1,5 тең.

Аралас стратегиялы матрицалық ойынды шешу әдістері.

Екі тарап үш объектіге іргелі енгізу орнатуы мүмкін. Тараптардың стратегиялары: і-ші стратегия і-ші объектінің қаражаттаудан тұрады (i = 1, 2, 3). Үлестің ерекшеліктерін және жергілікті шарттарды ескеріп, бірінші тараптың кірісі келесі матрицамен анықталады:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 6 \\ 5 & 2 & -3 \\ -2 & 4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Бірінші тараптың кіріс көлемі екінші тараптың шығынының шамасына тең – бұл ойын нөлдік суммалы екі ойыншының ойыны ретінде қарастырылады.

1. **Матрицалық ойынды СП есебі ретінде жазып, MS Excel арқылы шешеміз.**

А ойыншыны қарастырамыз. А ойыншының тиімді аралас стратегиясын іздейміз: $X^*(p_1, p_2, p_3)$, мұндағы p_1, p_2, p_3 – А ойыншының өзінің і-стратегиясын қолдану жиілігі (ықтималдығы). Ойын құнын (орташа ұтыс) ν арқылы белгілейміз.

А ойыншысы үшін матрицалық ойынды СП есебіне келтіру үшін төлем матрицасын барлық элементтері нөлден өзге болатындай етіп түрлендіреміз – матрицаның барлық элементіне 4 санын қосамыз. Түрленген төлем матрицасын аламыз:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 10 \\ 9 & 6 & 1 \\ 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

А ойыншының орташа ұтысы В ойыншының кез келген жүрісінде ν ойын құнынан аз болмау керек. Егер, В ойыншы өзінің бірінші стратегиясын қолданса, онда А ойыншының орташа ұтысы $3p_1 + 9p_2 + 2p_3$болады,сөйтіп $3p_1 + 9p_2 + 2p_3 \geq \nu$ теңсіздігін аламыз. Осыған ұқсас, B_2 және B_3 стратегиялары үшін теңсіздіктерді жазып алып, сызықтық шектеулер жүйесін аламыз.

$$\begin{cases} 3p_1 + 9p_2 + 2p_3 \geq \nu \\ 5p_1 + 6p_2 + 8p_3 \geq \nu \\ 10p_1 + p_2 + 9p_3 \geq \nu \end{cases}$$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$ шартынан, теңдеудің екі жағын да $\nu > 0$ бөліп (ойын құны нөлден үлкен, себебі түрленген матрицаның барлық элементтері нөлден үлкен), $Z = \frac{p_1}{\nu} + \frac{p_2}{\nu} + \frac{p_3}{\nu} = \frac{1}{\nu}$ мақсаттық функцияны аламыз. А ойыншының мақсаты – максимальді орташа ұтыс алу, яғни $\nu \to max$, онда $\frac{1}{\nu} \to min$. Егер $\frac{p_i}{\nu} = x_i$ $(i = 1, 2, 3)$ деп белгілесек, онда мақсаттық функция $Z = x_1 + x_2 + x_3 \to min$ болады.

Шектеулер жүйесінде әрбір теңсіздікті $\nu > 0$ бөліп, x_i айнымалыларына көшеміз:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 10x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 1 \end{cases}$$

Сөйтіп, А ойыншының тиімді стратегиясын табу үшін СП есебін шешу қажет:

$$\begin{cases} 3x_1 + 9x_2 + 2x_3 \geq 1 \\ 5x_1 + 6x_2 + 8x_3 \geq 1 \\ 10x_1 + x_2 + 9x_3 \geq 1 \end{cases}$$

шектеулер жүйесін және

$$x_1 \geq 0, \qquad x_2 \geq 0, \qquad x_3 \geq 0$$

шартын канағаттандыратын

$$Z = x_1 + x_2 + x_3$$

минимум мән қабылдайтындай x_1, x_2, x_3 айнымалылар мәнін табу керек.

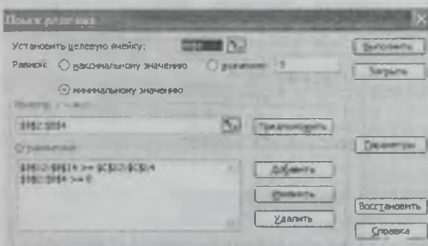
Есепті MS Excel кестелік редакторда шешеміз.

1. Есептеу кестесін жасаймыз:

– B2, B3, B4 ұяшықтары x_1, x_2, x_3 қызметін аткарады;

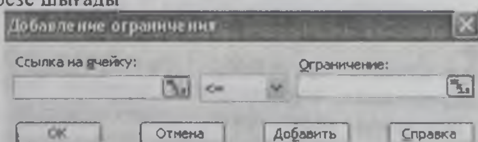
– B8 ұяшығында максаттык функцияның мәні есептеледі;

– B12, B13, B14 ұяшыктарында шектеулердің сол жактары есептеледі.



«Шешімдерді іздеу-Поиск решения» терезесіндегі параметрлерді енгізу.

– **«Добавить-Енгізу»** батырмасын басып, шектеулер жүйесін енгіземіз. Сонда **«Шектеулерді енгізу-Добавление ограничения»** диалогтік терезе шығады



Бірінші шектеу:

- **«Ұяшыкка сілтеме-Ссылка на ячейку»** жолында есептің шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктердің сол бөліктері есептелінген диапазонды енгіземіз (барлық үш теңсіздікті бірден енгізуге болады, себебі олардың мәнісі бір – үлкен немесе тең) – B12:B14;

- ашылған тізімде теңсіздік белгісін таңдаймыз;
- **«Шектеу-Ограничения»** жолына есептің шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктердің оң бөліктері сақталатын диапазонды енгіземіз – C12:C14;
- **«Енгізу-Добавить»** батырмасын басамыз (сонымен бірге терезе жоқ болып кетпейді және жаңа шектеу енгізуге болады).

Екінші шектеу (айнымалылардың теріс еместік шарты):
- **«Ұяшыққа сілтеме-Ссылка на ячейку»** жолына айнымалылар рөлін атқарып тұрған ұяшықтар диапазонын енгіземіз – B2:B4;
- ашылған тізімде теңсіздік белгісін таңдаймыз;
- **«Шектеу-Ограничения»** жолына пернетақта арқылы 0 енгіземіз;
- **«Ия-Ок»** батырмасын басамыз.

2. **«Шешімдерді іздеу-Поиск решения»** терезесінде **«Орындау-Выполнить»** батырмасын басамыз және есептің шешім нәтижесін көреміз:

	A	B	C	D
1	Переменные			
2	x1=	0,0787		
3	x2=	0,0816		
4	x3=	0,0146		
5				
6				
7	Целевая функция			
8	Z=	0,1749		
9				
10	Система ограничений			
11		левая часть	правая часть	
12		1	1	
13		1	1	
14		1	1	

Мынаны аламыз: $Z(0{,}0787; 0{,}0816; 0{,}0146) = 0{,}1749$. $\nu = \frac{1}{Z}$ және $p_i = x_i\nu$ болғандықтан,

$$\nu = 5{,}7167, \qquad p_1 = 0{,}45, \qquad p_2 = 0{,}47, p_3 = 0{,}08$$

- бұл В матрицасымен (түрлендірілген матрица) берілген ойынның шешімі. А матрицасы үшін: аралас стратегиялардың компоненттері өзгермейді; ал ойын құны А матрицасының барлық элементтеріне қосқан санға кем, яғни 4-ке кем. Соңғы нәтиже:

$$X^*(0{,}45;\ 0{,}47;\ 0{,}08), \nu = 1{,}72.$$

Әдебиет

1. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. Москва, 1986.
2. Афанасьев М.Ю., Суворов Б.П. Исследование операций в экономике: модели, задачи, решения. Москва, 2003.
2. Вентцель Е.С. Исследование операций. Москва, 2001.
3. Вентцель Е.С. Исследование операций. Задачи, принципы, методология. Москва, 1980.
4. Горелик В.А., Ушаков И.А. Исследование операций. Москва, 1986.
5. Гусманова Ф.Р. Амалдарды зерттеудің негіздері. Алматы, 2011.
6. Дегтярев Ю.И. Исследование операций. Москва, 1986.
7. Зайченко Ю.П. Исследование операций. Киев, 1986.
8. Исследование операций в экономике. Под ред. Кремера Н.Ш. Москва, 2000.
9. Конюховский П. Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-петербург, 2000.
10. Математические методы и модели исследования операций. Под ред. Колемаева В.А. Москва, 2008.
11.Морозов В.В., Сухарев А.Г., Федоров В.В. Исследование операций в задачах и упражнениях. Москва, 1986.
12. Протасов И.Д. Теория игр и исследование операций. Москва, 2003.
13. Сабыров Т. Амалдарды зерттеу. Алматы, 2011.
14. Шикин Е.В. Исследование операций. Москва, 2006.

Мазмұны

Дильман Т.Б., Маделханова А.Ж., Серикбол М.С.
Исследование операций.
Методическое пособие на казахском языке. - Кызылорда. 2013 г. - 160 стр.

Аннотация

Данное методическое пособие на казахском языке предлагается студентам технических и экономических специальностей высших учебных заведений как вспомогательное учебное пособие по дисциплине "Исследование операций".

Жауапты редактор: Жанмолдаев Б.Ж.
Тех.редактор: Есім Ж.Е.
Корректор: Маделханова Ә.Ж.

«Қызылорда-Қанағаты» баспаханасында басылды.
Қызылорда қаласы, З.Шүкіров көшесі, 62
Тел./факс: 8 (7242) 24-84-56. Таралымы: 300 дана