ҚР Жоғары оқу орындарының қауымдастығы

Ф. Р. Гусманова

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУДІҢ НЕГІЗДЕРІ

Алматы, 2011

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ
БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ

Ф.Р. Гусманова

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУДІҢ НЕГІЗДЕРІ

ОҚУЛЫҚ

*Қазақстан Республикасы
Білім және ғылым министрлігі бекіткен*

АЛМАТЫ, 2011

ӘОЖ 510 (075.8)
КБЖ 22.18 я73
Г 94

Баспаға Абай атындағы Қазақ ҰПУ-нің жанындағы «Білім» тобындағы мамандықтар бойынша оқу-әдістемелік секциясы және ҚР БҒМ Республикалық оқу-әдістемелік Кеңесі ұсынған

Хаттама №15. 10.06.2011 ж.

Пікір жазғандар:

М.Ә. Бектемесов, Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі Білім және ғылым саласындағы бақылау комитеті төрағасының міндетін атқарушы, физика-математика ғылымдарының докторы, профессор;

Б. Рысбайұлы, Қазақстан-Британ техникалық университеті Жоғары математика және кибернетика кафедрасының профессоры, физика-математика ғылымдарының докторы;

М.Ж. Бекпатшаев, Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті «Физика-математика» факультетінің деканы, физика-математика ғылымдарының кандидаты, доцент.

Гусманова Ф.Р.

Г 94 **Амалдарды зерттеудің негіздері:** Жоғары оқу орындарының студенттеріне арналған оқулық. – Алматы: ЖШС РПБК «Дәуір», 2011. – 472 бет.

ISBN 978-601-217-228-7

Оқулықта амалдарды зерттеу саласында кездесетін негізгі түсініктер, сызықтық, сызықтық емес, дөңес және динамикалық программалау модельдері, ойындар теориясы және амалдарды зерттеудің арнайы модельдері – желілік жоспарлау мен басқару және жаппай қызмет көрсету жүйелері қарастырылған. Әрбір теориялық мағлұматтар практикамен ұштастыру мақсатында мысалдармен толықтырылған. Тараулардың соңында өзін-өзі тексеруге арналған бақылау сұрақтары мен есептер де берілген.

Жоғары оқу орындарында «Информатика» мамандығы және физика-математика бағытындағы басқа да мамандықтар бойынша білім алушыларға және осы салада қызығушылық білдіретін мамандарға біліктілігін арттыруға арналған.

ӘОЖ 510 (075.8)
КБЖ 22.18 я73

ISBN 978-601-217-228-7

АЛҒЫ СӨЗ

Оқулық Қазақстан Республикасының Білім және ғылым министрлігімен бекітілген Жалпыға міндетті мемлекеттік білім беру стандартына сәйкес 050111 – «Информатика» мамандықтарына арнап жазылған типтік оқу бағдарламасының талаптарына сай, осы мамандық бойынша оқытылатын жоғары оқу орындарының студенттеріне («Амалдарды зерттеу» пәні) дайындалды.

Амалдарды зерттеу – жас мамандарды дайындау жүйесінде маңызды әдіснамалық мәні бар кешенді ғылыми пән.

Оқулықта келтірілген материалдар теорияның принциптік мазмұнын ашады және әр түрлі салаға қатысты мысалдар мен есептер арқылы өтілген сабақты пысықтауға мүмкіндік береді. Мысалдар мен есептерді таңдаған кезде автор қолданылыстағы жұмыс оқу жоспарына, жұмыс оқу бағдарламасына сүйенді.

Келтірілген әдебиеттер тізімінің де студенттер үшін маңызы зор. Ол студенттердің өз бетінше ғылыми жұмыспен айналысуы үшін, «Амалдарды зерттеу» пәнін терең оқу үшін, дипломдық жұмысты орындау үшін де пайдасы зор болады.

Оқулық төрт бөлімнен тұрады.

Бірінші бөлімде (1-4 тараулар) сызықтық программалу модельдері қарастырылған. Типтік есептердің қойылуы мен мысалдары, теориялық негіздер, есепті шығарудың симплекс әдісі, оның ерекше жағдайлары, жасанды базис әдісі, тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімін табудың «солтүстік-батыс бұрыш» әдісі мен «ең кіші элемент» әдісі және тиімді шешімін табудың үлестірімділік әдісі мен потенциалдар әдісі берілді.

Екінші бөлімде (5-9 тараулар) сызықтық емес программалау модельдері жөнінде сөз қозғалады. Оңтайландырудың классикалық әдістері – бір айнымалы және көп айнымалы функциялардың экстремумдарын анықтау әдістері, соның ішінде Лагранждың көбейткіштер әдісі келтіріледі. Дөңес программалау элементтері мен динамикалық программалау модельдері де қарастырылып, сызықтық емес программалау есептерін шығарудың итеративті әдістері де келтірілді.

Үшінші бөлімде (10-14 тараулар) ойындар теориясы қарастырылады. Бұл бөлімде ойындардың түрлері, олардың жіктелуі, таза және аралас стратегиялардағы ойын құнын анықтау мәселелері келтіріледі. Сонымен қатар, бәсекелестік күрес жағдайындағы нарықытық қатынастың дау-жанжал жағдайында тиімді шешімді қабылдайтын математикалық модельдердің теориялық негіздері беріледі. Осындай жағдаймен қатар, шешімді қабылдау теориясында тиімді шешімді таңдаудың әр түрлі критерийін талап ететін, әр түрлі модельдері бар тәуекел жағдайы мен анықталмағандық жағдай да қарастырылады.

Төртінші бөлімде (15-16 тараулар) амалдарды зерттеудің арнайы модельдері келтіріледі. Бұл бөлімде желілік жоспарлау мен басқару модельдері, жаппай қызмет көрсету жүйесінің элементтері туралы мәселелерге қысқаша көңіл бөлінеді.

Оқулықтың соңында глоссарий мен әдебиеттер тізімі де келтіріледі.

Білім алушылар өздерінің алған білімдерін тексеру мақсатында әрбір тараудың соңында бақылау сұрақтары мен теорияны практикамен пысықтау мақсатында 5 есептен беріледі.

Оқулықта шығарылған мысалдар мен есептер жеткілікті түрде берілгендіктен осы оқулықты практикалық сабақтарда да пайдалануға болады.

Оқулықты жазу барысында Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университетінде (ҚазҰПУ) аталған оқу пәні және арнайы (эллективті) курстар бойынша көрсетілген мамандықта білім алатын студенттер мен магистранттарды дайындау барысындағы дәрістер мен практикалық сабақтарды өткізу кезіндегі, жеке ғылыми жұмыстарын зерттеудегі жинақталған тәжірибелер пайдаланылды.

Амалдарды зерттеу саласын қалыптастыруға және дамытуға шет елдік Г. Данциг, Р. Беллман, Дж. Нейман, Г. Кун, ресейлік Л.В. Канторович, қазақстандық С.А. Айсағалиев, Т.Н. Бияров және т.б. ғалымдар зор үлестерін қосты.

КІРІСПЕ

Ғылыми-техникалық прогресстің шапшаң өсуі – жағдай туралы және бар ресурстар туралы белгілі ақпараттар негізінде тиімді шешімді қабылдауды және жүзеге асыруды қамтамасыз ететін басқару жүйесін жетілдіруді талап етеді. Осы мәселелермен амалдарды зерттеу теориясы шұғылданады.

Амалдарды зерттеу – әр түрлі ұйымдастыру жүйелерін тиімдірек басқаратын дайындау және практикалық қолданысы бар әдістермен айналысатын ғылыми пән.

Кез келген жүйені басқару белгілі бір заңдылықтарға бағынатын үрдіс ретінде жүзеге асырылады. Оны білу осы үрдісті жүзеге асыру үшін қажетті және жеткілікті шарттарды анықтауға мүмкіндік береді. Ол үшін үрдісті және сыртқы шарттарды сипаттайтын барлық параметрлер сандық, анықталған және өлшенетін болуы керек. Осыдан амалдарды зерттеудің мақсатын алуға болады.

Амалдарды зерттеудің мақсаты – басқаруды ұйымдастыру бойынша қабылданатын шешімдердің сандық негізделуі.

Басқарудың накты есебін шығару барысында амалдарды зерттеу әдістерін қолдану мына мәселелерді ұсынады:

– күрделі жағдайларда немесе анықталмағандық жағдайларда есептің шешімін қабылдау үшін экономикалық және математикалық модельді құру;

– шешімді қабылдау нәтижесінде және қандай да бір әрекеттің нұсқасының артықшылығын бағалауға мүмкіндік беретін тиімділік критерийін белгілеу нәтижесінде анықталатын өзара байланысты зерттеу керек.

Негізгі ұғымдар мен амалдарды зерттеу анықтамасын меңгеру қажет.

Амалдар – мақсатқа жетуге көзделген кез келген басқарылатын іс-шара. Амалдардың нәтижесі оны өткізу, ұйымдастыру тәсілдерінен, басқаша айтқанда – қандай да бір параметрлерді таңдаудан тәуелді болады.

Параметрлерді қандай да бір әдіспен таңдау *шешім* деп аталады. Шешімнің басқа шешімдерге қарағанда қандай да бір пайыммен қарастырғанда артықшылығы болса мұндай шешімдер *оңтайлы шешім* болып есептелінеді. Сондықтан тиімді шешімдердің сандық негізделуі *амалдарды зерттеудің негізгі мәселелері* болып табылады.

Амалдарды зерттеу пәні қолданбалы математиканың бір саласы ретінде қарастырылатындықтан математикалық әдістер ұғымын жиі кездестіреміз.

«Математикалық әдістер» ұғымы «математикалық модель» ұғымымен тығыз байланысты. Расында да, математикалық әдістерді бірден кез келген нысанға (мысал ретінде экономикалық нысандарды алсақ, ел экономикасы, өндірістер, мекемелер, жер шары және т.б.) қолдану мүмкін бола бермейді. Бірақ оларды осы нысанның математикалық моделінің бейнесіне қолдануға болады.

Модель – түпнұсқаны алмастырады және берілген зерттеу үшін ең маңызды кескін мен түпнұсқаның қасиеттерін бейнелейді. Математикалық қатынастардан тұратын модель *математикалық модель* деп аталады.

Зерттеудің сандық әдістерін қолдану үшін *амалдардың математикалық моделін* құру талап етіледі. Модельді құру кезінде амалдар қысқартылады, жүйелендіріледі және амал сұлбесі қандай да бір математикалық аппараттың көмегімен сипатталады. *Амалдың моделі* – математикалық аппараттың (функциялар, теңдеулер, теңсіздіктер, теңдеулер және теңсіздіктер жүйесі және т.б.) көмегімен амалдардың жеткілікті түрде дәл сипатталуы. Амалдың моделін құру үшін сипатталатын құбылыстың мәнін түсіну және математикалық аппаратты білу талап етіледі.

Амалдың тиімділігі – есепті орындаудағы оның бейімділік дәрежесі – тиімділік критерийі – мақсат функциясы түрінде сандық өрнектеледі. Тиімділік критерийін таңдау зерттеудің практикалық құндылығын анықтайды.

I - бөлім

СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУ МОДЕЛЬДЕРІ

1 - тарау. СЫЗЫҚТЫҚ ПРОГРАММАЛАУ МОДЕЛЬДЕРІ ЖӘНЕ ОНЫҢ ҚОСЫМШАСЫ

1.1. Экономикалық-математикалық модельдер

«Модель» ұғымы біздің әрқайсысымызға белгілі. Мысалы, ойыншық тік ұшақты, немесе балалық кезде қағаздан жасайтын көгершінді тік ұшақтың моделі деп қарастыруға болады. Мектепте математика, физика сабақтарында қолданылатын көптеген формулалар ($s = vt$, $s = ab$ және т.б.) – математикалық модель болып табылады. Жалпы *модель* деп нысанды қандайда бір тілдің көмегімен жуықтап жаңадан жасайтын осы нысанның шартты бейнесі түсініледі, ал модельді құру үрдісі *модельдеу* деп аталады.

Модельдеу бұл – накты өмірдегі үрдістерді және құбылыстарды үйренудің әмбебап тәсілі. Оның ерекше мәні тікелей бақылау және зерттеу мүмкіндігі болмаған жағдайдағы нысандарды оқып білуде болып табылады. Дербес жағдайда, оған әлеуметтік-экономикалық құбылыстар мен үрдістерді жатқызуға болады.

Модельдеудің вербальды, геометриялық, физикалық және ақпараттық модельдеу түрлері кездеседі.

Вербальды модельдеу – сөйлеу тілді пайдалану негізіндегі модельдеу.

Геометриялық модельдеу – макеттік немесе нысандық модельдерде жүзеге асырылады. Бұл модельдер нысанға кеңістіктік форманы, пропорцияны және т.т. береді.

Физикалық модельдеу – түпнұсқада пайда болатын физикалық-химиялық, технологиялық, биологиялық үрдістерді оқып білу үшін қолданылады.

Ақпараттық модельдеу – ғылымның барлық саласында іргелі маңызы бар.

Кез келген нысанды, қозғалыстың кез келген формасын зерттеу оның сапалық заңдылығымен қатар, математикада оқылатын сандық заңдылықтарын да ашады. Ал бұл болса, айтылғандардың экономикаға қатысты екенін білдіреді.

Экономикалық-математикалық модель – зерттелетін экономикалық үрдістің (нысанның) математикалық сипатталуы. Бұл модель математикалық қатынастардың көмегімен абстрактілі түрде экономикалық үрдістің заңдылығын өрнектейді.

Экономикалық нысандарды сипаттайтын параметрлер модельде не белгілі, не белгісіз шамалар ретінде беріледі. Белгілі шамалар модельден тыс есептеледі де оған дайын түрінде енгізіледі, сондықтан оларды *экзогенді* деп атайды. Модельді шешу нәтижесінде анықталатын шамалар *эндогенді* деп аталады.

Экономикалық-математикалық модельдеудің негізгі үш кезеңі:

1-кезең. Зерттеу есебінің мақсаты қойылады; экономикалық модель түрінде объектіні сапалы сипаттау жүргізіледі.

2-кезең. Зерттелетін нысанның математикалық моделі құрылады; зерттеу әдістеріне таңдау (немесе арнайы әдіс жазылады) жүргізіледі; модельді ЭЕМ-да жүзеге асыру мақсатында программалар дайындалады, бастапқы деректер дайындалады.

3-кезең. Математикалық модельге талдау жүргізіледі; алынған нәтижелер өңделінеді және талдау жүргізіледі.

Экономикалық-математикалық модельдердің топтастырылуы:

– *мақсаттық тағайындалу* белгісі бойынша теориялық және қолданбалы модельдер болып бөлінеді;

– зерттелетін экономикалық нысанның *масштаб* (*шамалар*) белгісі бойынша модельдер макроэкономикалық және микроэкономикалық болып бөлінеді;

– *уақытқа тәуелді сипатының* белгісі бойынша статикалық және динамикалық модельдер болып бөлінеді;

– *уақытты бейнелеу тәсілінің* белгісі бойынша үзіліссіз және дискретті модельдер болып бөлінеді;

– *себеп-салдарды бейнелеу сипаты* бойынша детерминирленген және теориялық-ойындық модельдер болып бөлінеді.

Теориялық модельдер қарастырылатын экономикалық жүйелердің жалпы заңдылықтары мен қасиеттерін оқып білуге арналған.

Қолданбалы модельдер нақты экономикалық нысандардың қызмет атқаратындай параметрлерін анықтау мен бағалауға және шаруашылық практикалық шешімдерді қабылдау үшін ұсыныстарды дұрыстап қабылдауға мүмкіндік береді.

Макроэкономикалық модельдер ірілендірілген материалдық-заттық және қаржы көрсеткіштерін: жалпы ұлттық өнімді, ұлттық табысты, біріктірілген сұранысты, біріктірілген тұтынуды, инвестицияларды, бос емес болуды, инфляцияның пайыздық мөлшерін, ақша санын және т.б. өзара байланыстыра отырып мемлекеттің экономикасын біртұтас ретінде сипаттайды

Микроэкономикалық модельдер экономиканың құрылымдық және функционалдық құраушыларының не кейбір құраушылардың (сала, аймақ, фирма, тұтынушы және т.б.) шаруашылық ретінің өзара әрекетін сипаттайды.

Статикалық модельдер – барлық параметрлердің мәндерін уақыттың бір квантына (мезгілге немесе аралыққа) жатқызатын модельдер.

Динамикалық модельдер – уақытқа қатысты параметрлері өзгеретін модельдер.

Үзіліссіз модельдер – уақыт үзіліссіз фактор ретінде қарастырылатын модельдер.

Дискретті модельдер – уақыт кванттталған модельдер.

Детерминирленген модельдер – қатаң функционалды байланыстармен берілген модельдер.

Стохастикалық модельдер – зерттелетін көрсеткіштерге кездейсоқ әсердің болуы мүмкін және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың ортасын пайдалануға болатын модельдер.

Теориялық-ойындық модельдер стохастикалық дәрежеге қарағанда анықталмағандық дәрежесі жоғары факторлардың әсерін ескереді.

Экономикалық-математикалық модельдерді құру алгоритмі

1. Зерттеу нысаны (мемлекеттің, саланың, мекеменің, цехтың, зауыттың, қандай да бір әлеуметтік-экономикалық үрдістің, технологиялық экономикалық үрдістің және т.б.) анықталады.

2. Зерттеу мақсаты дайындалады.

3. Қарастырылатын экономикалық нысанда құрылымдық және

функционалдық элементтері көрсетіледі және қойылған мақсатқа жетуге әсер ететін осы элементтердің маңыздырақ сапалы сипаттамалары ерекшеленеді.

4. Экономикалық нысанның сипаттамасын ескеру үшін символдық белгілеулер енгізіледі. Олардың қайсысы эндогенді ретінде, қайсысы экзогенді ретінде; қайсысы тәуелді шамалар ретінде, қайсысы тәуелсіз шамалар ретінде; қайсысы белгісіз (ізделінді) ретінде, қайсысы белгілі ретінде қарастырылатыны анықталады.

5. Модельдердің белгілі бір параметрлерінің арасындағы өзара байланыстар, яғни экономикалық-математикалық модель құрылады.

6. Модель бойынша есептеулер және олардың нәтижелеріне талдау жүргізіледі.

7. Егер модельденетін үрдістің немесе құбылыстың бейнесінің барабар еместігінің тұрғысынан алғанда нәтижелер қанағаттандырылмаса, онда алдыңғы қадамдардың біріне қайтадан оралып, үрдісті қайтадан жалғастыру керек.

1.2. Сызықтық программалау есептеріне мысалдар

Сызықтық программалау теориясында жиі кездесетін мысалдардың экономикалық-моделін құрайық.

Өндірісті жоспарлау есебі (ресурстарды пайдалану жайындағы есеп).

Кәсіпорын төрт түрлі P_1, P_2, P_3, P_4 өнім өндіру керек. Өнімдерді дайындау үшін шикі заттардың қажет болатыны белгілі. Айталық v_1, v_2, v_3, v_4, v_5 бес түрлі шикі зат пайдаланылсын және олардың қорлары b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 бірлік сандарымен шектелген болсын. Шикі заттардың қорлары, өнімнің бір бірлігін даярлауға жұмсалатын шикі заттың a_{ij} (i-өнім түрі, j-шикі зат түрі) бірлік саны 1.1-кестеде келтірілген.

Әрбір өндірілген өнім бірлігінен кәсіпорынға сәйкес c_1, c_2, c_3, c_4 пайда түседі.

Өндірілген өнімді жүзеге асырғанда пайда ең көп (максималды) болатындай өнімді өндіру жоспарын құру керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін

1.1-кесте

Өндірісті жоспарлау есебіне қажетті мәліметтер

Шикі зат түрі	Шикі зат қоры	Өнімнің бір бірлігін даярлауға жұмсалатын шикі заттың бірлік саны			
		P_1	P_2	P_3	P_4
ν_1	b_1	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}
ν_2	b_2	a_{21}	a_{22}	a_{23}	a_{24}
ν_3	b_3	a_{31}	a_{32}	a_{33}	a_{34}
ν_4	b_4	a_{41}	a_{42}	a_{43}	a_{44}
ν_5	b_5	a_{51}	a_{52}	a_{53}	a_{54}

құру (есепті сызықтық программалау есебі түрінде жазу) керек.

x_1, x_2, x_3, x_4 арқылы өндіруге жоспарланған сәйкес P_1, P_2, P_3, P_4 өнім бірліктерінің санын белгілейміз.

Өнімді өндіру үшін бізге шикі заттардың қоры жеткілікті болу керек. Яғни өнімді даярлау үшін v_1 ресурсының $a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4$ бірлігі, v_2 ресурсының $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4$ бірлігі, v_3 ресурсының $a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4$ бірлігі, v_4 ресурсының $a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4$ бірлігі, v_5 ресурсының $a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4$ бірлігі талап етіледі; $\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \nu_5$ ресурстарын тұтыну олардың қорларынан, сәйкес b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 сандарынан аспау керек болғандықтан, ресурстарды тұтынумен олардың қорларының арасындағы байланыс келесі шектеулер-теңсіздіктер арқылы өрнектеледі:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 \le b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 \le b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 \le b_3, \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 + a_{43}x_3 + a_{44}x_4 \le b_4, \\ a_{51}x_1 + a_{52}x_2 + a_{53}x_3 + a_{54}x_4 \le b_5. \end{cases} \quad (1.1)$$

Сонымен қатар есептің мағынасы бойынша өндіруге жоспарланған өнім бірліктерінің саны теріс болуы мүмкін емес болғандықтан:

$$x_i \geq 0 \ (i = \overline{1, 4}). \tag{1.2}$$

(x_1, x_2, x_3, x_4) жоспарымен түсетін пайда келесі түрде анықталады:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + c_3 x_3 + c_4 x_4. \tag{1.3}$$

Сонымен, есептің экономикалық-математикалық моделі: *(1.1) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын, (1.2) шарттары орындалатындай және (1.3) функция максимум мәнді қабылдайтындай өнім өндірудің* $X = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ *жоспарын табу керек.*

Шикі затпен қамтамасыздандыру туралы есеп.

Белгілі бір шикі заттармен қамтамасыздандыруды қажет ететін P_1, P_2, P_3 үш өндірістік кәсіпорын бар болсын. Әрбір кәсіпорынға сәйкес a_1, a_2, a_3 бірлікке тең шикі зат қажет. Шикі зат сақтайтын S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 бес қойма бар. Олар кәсіпорыннан белгілі бір қашықтықта орналасқан және әр түрлі тарифтермен кәсіпорындарға қатынау мүмкіндігі бар. P_i кәсіпорын S_i қоймадан шикізат алу үшін c_{ij} ақша бірлігі жұмсалады, мұндағы i-кәсіпорынның, j-қойманың нөмірін көрсетеді. Қажетті мәліметтер 1.2-кестеде келтірілген.

1.2-кесте

Кәсіпорынды қажетті шикі затпен қамтамасыздандыру туралы мәліметтер

Кәсіпорын	Қойма				
	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5
P_1	c_{11}	c_{12}	c_{13}	c_{14}	c_{15}
P_2	c_{21}	c_{22}	c_{23}	c_{24}	c_{25}
P_3	c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	c_{35}

Әрбір қойманың өндірістік қуаттылығына байланысты қоймадағы шикі заттың саны шектеулі: S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 қоймаларында сәйкес b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 бірліктегі шикі заттар бар. Аз шығын жұмсап кәсіпорындарды қажетті шикізатпен қамтамасыздандыратындай жоспар (қай қоймадан, қайда және қанша мөлшерде шикізат жеткізу керек) құру керек.

Шығарылуы. Есептің экономикалық-математикалық моделін құрамыз. x_{ij} арқылы j-қоймадан i-кәсіпорынға алынатын шикі заттың санын белгілейміз. Жоспар шешімнің 15 элементінен тұрады:

$$\begin{matrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} & x_{25} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} & x_{35} \end{matrix}$$

Әрбір кәсіпорынға қаншалықты шикі заттың қажеттілігін ескеріп шектеу енгіземіз:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} + x_{15} = a_1 \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} + x_{25} = a_2 \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} + x_{35} = a_3 \end{cases} \qquad (1.4)$$

Енді қойманың мүмкіндіктерінен алынатын шектеулерді жазамыз, яғни қойманың өндірістік қуаттылығына байланысты қоймадағы шикі заттардың санының шектеулілігін ескереміз:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} + x_{31} \le b_1 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} \le b_2 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} \le b_3 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} \le b_4 \\ x_{15} + x_{25} + x_{35} \le b_5 \end{cases} \qquad (1.5)$$

Минимизациялау талап етілетін шикі затқа жұмсалынатын жалпы шығынды жазамыз. Ол үшін 1.2-кестедегі мәліметтерді пайдаланамыз:

$$F = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{5} c_{ij} x_{ij} . \qquad (1.6)$$

Сонымен, есептің экономикалық-математикалық моделі: (1.4) *шектеулер-теңдіктер жүйесін,* (1.5) *шектеулер-теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын, және* (1.6) *сызықтық функция минимум мәнді қабылдайтындай* x_{ij} *айнымалыларының теріс емес мәндерін табу керек.*

1.3. Сызықтық программалау есебінің қойылуы және оның құрылымы

m сызықтық теңдеулер мен теңсіздіктерден тұратын, n айнымалысы бар

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \le b_k, \\ a_{k+1,1}x_1 + a_{k+1,2}x_2 + \ldots + a_{k+1,n}x_n = b_{k+1}, \\ a_{k+2,1}x_1 + a_{k+2,2}x_2 + \ldots + a_{k+2,n}x_n = b_{k+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{1.7}$$

жүйе және

$$F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \tag{1.8}$$

функциясы берілсін.

(1.7) жүйеде алдымен k теңсіздік, содан кейін $m–k$ теңдік берілген. Егер осы теңсіздіктер мен теңдіктер бастапқы берілуінде басқаша орналасса, орындарын ауыстыру нәтижесінде айтылған түрге келтіруге болады. Жүйенің сол жағы оң жағынан кіші не тең болсын дейміз, егер қандай да бір теңсіздікте керісінше болса, онда сол теңсіздікті «-1»-ге көбейту арқылы қажетті таңбамызды аламыз.

Осы берілгендерді ескеріп сызықтық программалау есебінің қойылуын жазайық.

(1.8) сызықтық функция тиімді (яғни, максималды немесе минималды) мәнді қабылдайтындай және

$$x_j \ge 0, \ (j = 1, 2, \ldots, l; \quad l \le n) \tag{1.9}$$

шартын қанағаттандыратындай (1.7) жүйенің $X = (x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n)$ шешімін табу қажет.

(1.7) жүйе *шектеулер жүйесі* деп, (1.8) – F функциясы *сызық-*

тық функция немесе *мақсат функциясы* деп, ал (1.9) шарт *теріс еместік шарты* деп аталады.

Экстремумды іздеу типін таңдау салыстырмалы сипатта болады. Себебі, $F = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j$ функциясының максимумын іздеу $-F = -(c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n) = \sum_{j=1}^{n} (-c_j)x_j$ функциясының минимумын іздеумен пара-пар.

(1.9) шартты қанағаттандыратын, (1.8) сызықтық функция тиімді мәнді (максималды немесе минималды) қабылдайтындай (1.7) шектеулер жүйесінің шешімі *тиімді шешім* (немесе *тиімді жоспар*) деп аталады.

Егер *n* айнымалысы бар *m* сызықтық теңдеулер жүйесінің *m*<*n* айнымалыларының коэффициенттерінен құрылған матрицаның анықтауышы нөлден өзге болса, онда кез келген *m* айнымалысы *негізгі* (немесе *базистік*) деп аталады. Қалған *n* – *m* айнымалы *негізгі емес* (немесе *бос*) айнымалы деп аталады.

Егер сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандырса және (1.7) шектеулер жүйесі:

а) тек қана теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *стандартты* немесе *симметриялы;*

ә) тек қана теңдіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *канондық* немесе *негізгі;*

б) теңдеулер мен теңсіздіктерден тұрса, онда сызықтық программалау есебі *жалпы түрде берілген* деп аталады.

Кез келген сызықтық программалау есебін канондық түрге келтіруге болады. Айталық, сызықтық программалау есебі стандартты түрде берілсін:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases}$$

Стандартты программалау есебін канондық түрге келтіру үшін шектеулер жүйесіне теріс емес $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+m}$ (теңсіздіктің саны қанша болса, қосымша айнымалылар саны да сонша) қосымша айнымалыларын енгіземіз.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n + x_{n+1} & = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n \quad + x_{n+2} & = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n \quad + x_{n+m} & = b_m. \end{cases}$$

Қарастырылып отырған есепте барлық теңсіздіктердің таңбасы «$\leq$» болғандықтан, қосымша айнымалылар «+» таңбасымен енгізіледі, ал егер теңсіздіктердің таңбасы «$\geq$» болса, онда қосымша айнымалылар «–» таңбасымен енгізіледі.

1.4. Сызықтық программалау есебінің геометриялық интерпретациясы

Екі айнымалысы (n =2) бар стандартты формада берілген (1.7)-(1.9) есепті қарастырайық. n айнымалылар саны m теңдеулер санынан 2-ге артық, яғни $n - m$ =2 болған жағдайдағы канондық формадағы есепті осындай стандартты формаға келтіруге болады.

Шектеулер жүйесінің геометриялық бейнеленуі қандай да бір көпбұрыш болсын. Осы көпбұрыштың нүктелерінің ішінен $F = c_1x_1 + c_2x_2$ сызықтық функциясы максималды (немесе минималды) мәнді қабылдайтындай нүктені табу қажет.

F сызықтық функцияның *деңгей сызығы* деп аталатын сызықты қарастырайық. Осы сызықтың бойында F мақсат функция бекітілген бір ғана a мәнін қабылдайды, немесе

$$c_1x_1 + c_2x_2 = a. \qquad (1.10)$$

Деңгей сызығы өмірде кеңінен қолданылады, мысалы, ауа райының карталарындағы ирек сызық – изотермалар деңгейінің, географиялық карталардағы параллельдер – ендік деңгейінің сызығы және т.б.

Айталық, қандай да бір облыстың, мысалы елдің немесе материктің ең шеткі солтүстік нүктесін табу керек болсын. Бұл ең үлкен ендігі бар нүкте болады, яғни ең үлкен ендігі (деңгейі) бар параллельдер (деңгей сызығы) арқылы өтетін нүкте.

Сызықтық программалау есебін геометриялық шығарған кезде де дәл осылай қарастыру керек. F функциясының ең үлкен деңгейі (егер сызықтық функция максимизацияланатын болса) немесе ең кіші деңгейі (егер сызықтық функция минимизацияланатын болса) болатындай деңгей сызығы өтетін шешімнің көпбұрышындағы нүктені табу керек.

Функцияның деңгей сызығының (1.10) теңдеуі – түзу сызықтың деңгейі. Әр түрлі a деңгейде сызықтың бұрыштық коэффициенттері тек қана c_1 және c_2 коэффициенттерінің арасындағы қатынастармен анықталады және демек, тең болатындықтан деңгей сызықтары параллель болады. Сонымен, F функциясының деңгей сызығы көбінесе координаталар осіне қандай да бір бұрыш жасап орналасқан «параллельдер» болып табылады.

Сызықтық функцияның деңгей сызығының маңызды қасиеті – осы сызықты бір жаққа қарай параллель жылжытқанда тек қана өседі, басқа жаққа жылжытқанда тек қана кемиді.

Сонымен, екі айнымалымен берілген сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығаруды қарастырайық.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

шектеулер жүйесін, теріс еместік шартты қанағаттандыратындай

$$F = c_1x_1 + c_2x_2$$

мақсат функциясының экстремумын табу керек.

Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару алгоритмі

1. X_1OX_2 жазықтығында жарамды шешімдер облысын құру керек. Ол үшін сызықтық программалау есебінің шектеулер жүйе-

сіндегі барлық теңсіздіктерді теңдеу түрінде ($a_{i1}+a_{i2}x_2= b_i$, $i=\overline{1,m}$) жазамыз да, осы теңдеулердің сәйкес түзулерін тұрғызамыз. Осы түзудің әрқайсысы X_1OX_2 жазықтығын екі жартыжазықтыққа бөледі. Берілген шектеуді қанағаттандыратын жартыжазықтықты анықтау үшін кез келген нүктені, мысалы, көбінесе (0, 0) координатасымен берілген нүктені қарастырған ыңғайлы болады. Егер осы нүкте теңсіздікті қанағаттандырса, онда осы нүкте ізделінді жартыжазықтықта жататынын білдіреді және өзімізге ыңғайлы болу үшін осы жартыжазықтықты белгілейміз. Егер теңсіздік орындалмаса, онда ізделінді жартыжазықтық берілген нүктеге қарама-қарсы орналасқан жартыжазықтық болып табылады да, оны белгілейміз.

2. Компоненттері мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттері болатын $\bar{c}=(c_1, c_2)$ векторын тұрғызамыз.

3. Жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін $\bar{c}$ векторына перпендикуляр деңгей сызығының үйірін тұрғызамыз.

4. $\bar{c}=(c_1, c_2)$ векторының бағытында (минимум есебінде не $\bar{c}$ векторының бағытына қарама-қарсы орналасқан, не ең жақын қашықтықта орналасқан), жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең алыс қашықта орналасқан деңгей сызығын таңдау керек. Осы деңгей сызығы өтетін облыстың бұрыштық нүктелерін таңдаймыз.

5. Экстремум нүктелерінің координаталарын және осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін табу керек.

Ескерту: Бұл жерде алгоритмнің бірінші қадамына қатысты келесі жағдайлар болуы мүмкін.

1. Жарамды шешімдер облысы – құр жиын. Бұл жағдайда шектеулер жүйесінің үйлесімсіздігінен сызықтық программалау есебінің тиімді шешімі болмайды.

2. Жарамды шешімдер облысы – жалғыз нүктеден тұрады. Бұл жағдайда сызықтық программалау есебінің жалғыз ғана тиімді шешімі болады.

3. Жарамды шешімдер облысы – дөңес көпбұрыш. Бұл жағдайда есептің тиімді шешімін табу үшін көпбұрыштың барлық бұрыштық нүктелерінің координаталарын тауып, барлық бұрыштық нүктелердегі мақсат функциясының мәнін есептеп, солардың ішіндегі ең үлкенін (немесе ең кішісін) таңдау керек. Сәйкес бұрыштық нүктенің координаталары тиімді шешім болып табылады.

Әрине, тиімді шешімге сәйкес бұрыштық нүктені графикалық түрде бірден табуға болатын басқа да тәсіл бар. Айталық, c_0 – қандай да бір сан болсын. $c_1x_1 + c_2x_2 = c_0$ түзуі мақсат функциясының деңгей сызығы болып табылады. Осы түзудің әрбір нүктесінде мақсат функция c_0 мәніне тең бір ғана мәнді қабылдайды. Мақсат функцияның

$$\bar{c} = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}; \frac{\partial F}{\partial x_2} \right) = (c_1, c_2)$$

векторы деңгей сызықтарына перпендикуляр және осы функция ең үлкен жылдамдықпен өсетін бағытты көрсетеді. $\bar{c}$ векторының бағытында (немесе минимизациялау есебінде – қарама-қарсы бағытта орналасқан), ең алыс қашықта орналасқан жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін деңгей сызығын таңдай отырып мақсат функция максималды (минималды) мәнді қабылдайтындай бұрыштық нүктені анықтаймыз. Егер экстремум бірден екі сыбайлас бұрыштық нүктелерде болса, онда осы екі нүктені қосатын

$$\bar{x}_{тиім} = t\bar{x}_{1тиім} + (1-t)\bar{x}_{2тиім}, \ t \in [0; 1]$$

кесіндінің кез келген нүктесі тиімді шешім болады.

4. Жарамды шешімдер облысы – дөңес шектелмеген облыс. Бұл жағдайда максимизациялау есебінде мақсат фкнкциясы жоғарыдан шектелмегендіктен, ал минимизациялау есебінде төменнен шектелмегендіктен, немесе жарамды шешімдер облысының бұрыштық нүктелерінің біреуінде жатқандықтан экстремум болмауы мүмкін.

1.1-мысал.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \ge 12 \\ x_1 + x_2 \le 9 \\ 3x_1 - x_2 \le 15 \\ 3x_1 + 6x_2 \ge 24 \end{cases}$$

шектеулеріндегі

$$F = 4x_1 + 2x_2 \to extr$$

сызықтық функциясының минимум және максимум мәндерін табу керек.

Шығарылуы.

1. Жарамды шешімдер облысын құрамыз.

1.1. Шектеулердегі теңсіздіктерді теңдіктерге алмастырамыз

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 12 \\ x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 15 \\ 3x_1 + 6x_2 = 24 \end{cases}$$

1.2. Алынған теңдеулер бойынша түзулер тұрғызамыз (1.1-сурет)

1.3. Ыңғайлы болу үшін берілген теңсіздіктер жүйесін нөмірлейміз:

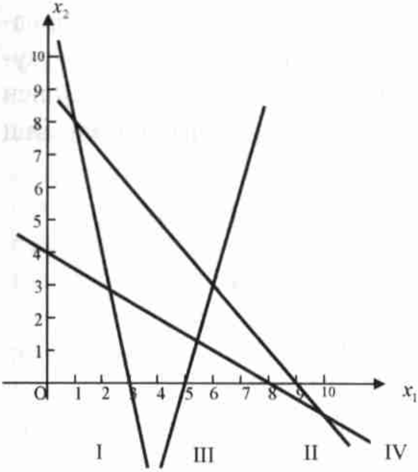
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 12 & (\mathrm{I}) \\ x_1 + x_2 \leq 9 & (\mathrm{II}) \\ 3x_1 - x_2 \leq 15 & (\mathrm{III}) \\ 3x_1 + 6x_2 \geq 24 & (\mathrm{IV}) \end{cases}$$

1.4. Әрбір теңсіздіктің шешімі жартыжазықтықты беретіні белгілі. Шектеулерді қанағаттандыратын сәйкес жартыжазықтықтарды анықтау үшін кез келген бақылау нүктесін аламыз. Берілген шектеулер-теңсіздіктер үшін (0,0) нүктесі ыңғайлы болып табылады. Бақылау нүктесін теңсіздіктердің орнына қойып теңсіздіктің шешімі қай жартыжазықтықта екенін айқындаймыз. Алынған жартыжазықтықтарды белгілеудің нәтижесінде дөңес $ABCD$ төртбұрышын аламыз (1.2-сурет).

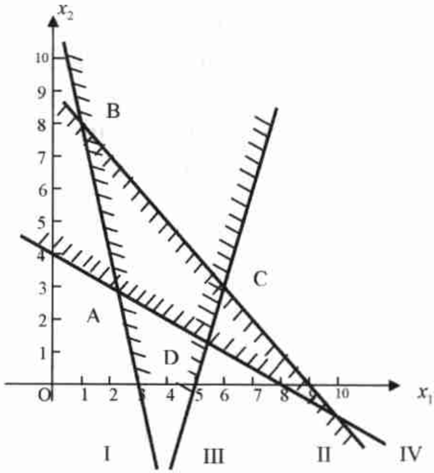
2. $F = 4x_1 + 2x_2$ мақсат функциясының $\vec{c} = (4, 2)$ векторын (ол үшін (4, 2) нүктесін белгілеп координаталар бас нүктесімен қосамыз) тұрғызамыз.

3. Жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін $\vec{c}$ векторына перпендикуляр деңгей сызығының үйірін тұрғызамыз.

4. Максимум және минимум мәндерді беретін деңгей сызықтарын анықтауымыз керек.



1.1-сурет



1.2-сурет

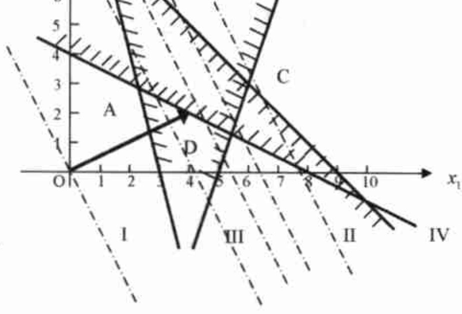
4.1. Мақсат функциясын максимизациялау есебінде $\vec{c} = (4, 2)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең алыс қашықта орналасқан деңгей сызығын (максимум мәнді береді) таңдау керек. 1.3-суреттен көріп отырғанымыздай бұл C нүктесі арқылы өтетін деңгей сызығы.

4.2. Мақсат функциясын минимизациялау есебінде $\vec{c} = (4, 2)$ векторының бағытында жарамды шешімдер облысы арқылы өтетін ең жақын қашықта орналасқан деңгей сызығын (минимум мәнді береді) таңдаймыз. Ол A нүктесі арқылы өтетін деңгей сызығы болатынын 1.3-суреттен байқауға болады.

5. Экстремум нүктелерін және мақсат функциясының максимум, минимум мәндерін анықтау керек.

5.1. Экстремум (C және A) нүктелерінің координаталарын табу керек.

A нүктесінің координата-



1.3-сурет

ларын табу үшін A нүктесі қандай түзулердің қиылысуында орналасқанын анықтаймыз. Біздің есепте A нүктесі (I) және (IV) түзулердің қиылысуында орналасқан. Осы түзулердің теңдеулерінен алынған теңдеулер жүйесін шешеміз. Алынған шешім A нүктесінің координаталарын береді.

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 = 12 \\ 3x_1 + 6x_2 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ 3x_1 + 6 \cdot (12 - 4x_1) = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ -21x_1 = -48 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 12 - 4x_1 \\ x_1 = \dfrac{48}{21} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = \dfrac{20}{7} \\ x_1 = \dfrac{16}{7} \end{cases}$$

Осыдан A нүктесінің координаталары: $A\left(\dfrac{16}{7}, \dfrac{20}{7}\right)$.

Осылайша C нүктесінің координаталарын анықтаймыз. C нүктесі (II) және (III) түзулердің қиылысуында орналасқан.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 3x_1 - x_2 = 15 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 9 \\ 4x_1 = 24 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 9 - x_1 \\ x_1 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = 3 \end{cases}.$$

C нүктесінің координаталары $C(6, 3)$.

5.2. Осы нүктелердегі мақсат функциясының мәндерін табамыз.

$$F\left(\frac{16}{7}, \frac{20}{7}\right) = 4 \cdot \frac{16}{7} + 2 \cdot \frac{20}{7} = \frac{104}{7}; \; F(6, 3) = 4 \cdot 6 + 2 \cdot 3 = 30.$$

Жауабы: $F_{\min} = \dfrac{104}{7}, \; F_{\max} = 30$.

1.2-мысал.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases}$$

шектеулеріндегі

$$F = x_1 + 2x_2 + x_5 \to extr$$

сызықтық функциясының минимум және максимум мәндерін графикалық әдістің көмегімен табу керек.

Шығарылуы. Графикалық әдісті айнымалылардың саны екіге тең болған жағдайда қолданған ыңғайлы екені бізге мәлім. Әйтсе де, мақсатымыз осы мысал арқылы айнымалылар саны екіден артық, атап айтқанда және n айнымалылар саны m теңдеулер санынан 2-ге артық болған жағдайда да графикалық әдісті қолдануға болатынын көрсету.

Есепті графикалық әдіспен шығару керек болғандықтан біз жазықтықта жұмыс істейміз. Шектеулер жүйесінде кездесетін барлық айнымалыларды (негізгі айнымалылар) x_1, x_2 (негізгі емес айнымалылар) айнымалылары арқылы өрнектейміз.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5 \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = 5 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \\ x_4 = 2 - x_2 - x_3 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = 5 - x_1 - x_2 - (1 + x_4 - x_5) - x_4 \\ x_4 = 2 - x_2 - (1 + x_4 - x_5) + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 \\ x_4 = 1 - x_2 - x_4 + 2x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - x_1 - x_2 - 2x_4 \\ 2x_4 = 1 - x_2 + 2x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = 4 - x_1 - x_2 - (1 - x_2 + 2x_5) \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_5 = 3 - x_1 \\ x_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 + x_5 \\ x_3 = 1 + x_4 - x_5 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \\ x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = 1 + 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_5 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 \\ x_4 = 2 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ x_3 = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_2 \end{cases}$$

Айнымалылардың теріс еместік шартын пайдалансақ,

$$\begin{cases} x_5 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ x_4 = 2 - \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ x_3 = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_1 \geq 0 \\ 2 - \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 \geq 0 \\ \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}x_2 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{1}{2}x_1 \leq \dfrac{3}{2} \\ \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 \leq 2 \\ \dfrac{1}{2}x_2 \leq \dfrac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \leq 3 \\ x_1 + x_2 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \end{cases}$$

$$F = x_1 + 2x_2 + \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}x_1 + 2x_2 .$$

1.1-мысалды шығарған алгоритм бойынша есепті әрі қарай шығарамыз.

1. Жарамды шешімдер облысын құрамыз.

Ол үшін шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктерді теңдеулерге алмастырамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \\ x_2 = 3 \end{cases}$$

Алынған теңдеулер бойынша түзулер тұрғызамыз.

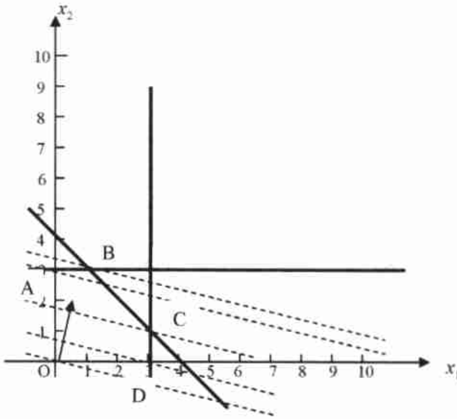
(0,0) бақылау нүктесінің көмегімен әрбір теңсіздік бойынша жартыжазықтықтарды анықтаймыз. Алынған жартыжазықтықтарды біріктіру нәтижесінде дөңес *OABCD* – көпбұрышты аламыз. Мақсат функциясының $\left(\dfrac{1}{2}, 2\right)$ векторының көмегімен экстремум нүктелерін анықтаймыз. 1.4-суреттен көріп отырғанымыздай бұл *B* (max) және *O* (min) нүктелері.

Экстремум (O және B) нүктелерінің координаталарын табу керек.

O нүктесі координаталар бас нүктесі; B нүктесі $x_2 = 3$ және $x_1 + x_2 = 4$ түзулерінің қиылысуында орналасқан.

O нүктесінің координаталары (0, 0).

В нүктесінің координаталарын табу үшін



1.4-сурет

$\begin{cases} x_2 = 3 \\ x_1 + x_2 = 4 \end{cases}$ теңдеулер жүйесін шешеміз: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$. $B(1, 3)$.

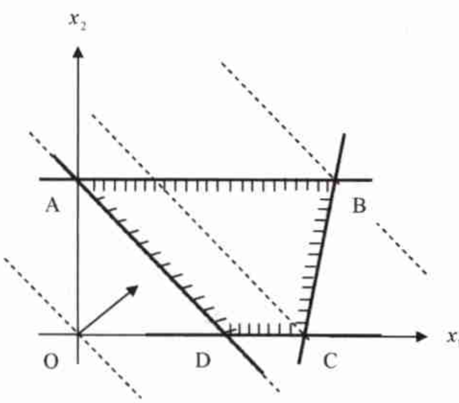
Осы нүктелердегі мақсат функциясының мәнін табамыз.

$$F(0, 0) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 \cdot 0 = \frac{3}{2}, \; F(1, 3) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 \cdot 3 = 8.$$

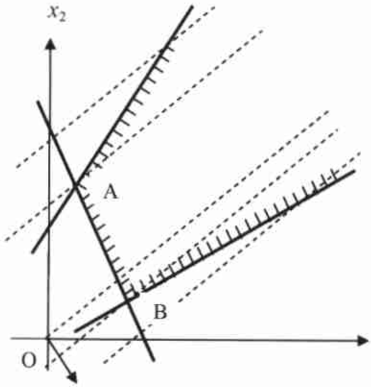
Жауабы: $F_{\min} = \dfrac{3}{2}$, $F_{\max} = 8$.

Практикада сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару барысында кездесетін жағдайларды қарастырайық.

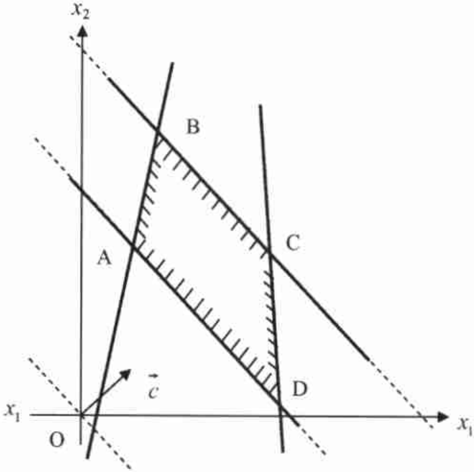
1.5-суретте $\bar{c} = (c_1, \; c_2)$ векторға жүргізілген перпендикуляр деңгей сызығының үйірінің бірі жарамды шешімдер облысы – ABCD төртбұрышының бір қабырғасымен беттеседі. Бұл, айталық, мақсат функциямыз жалпы жағдайда $F = c_1x_1 + c_2x_2$ түрінде берілсе, онда жарамды шешімдер облысының ($ABCD$ төртбұрышының) деңгей сы-



1.5-сурет



1.6-сурет

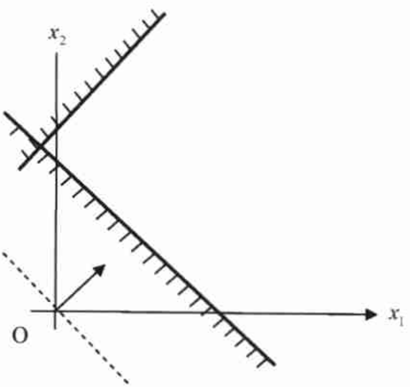


1.7-сурет

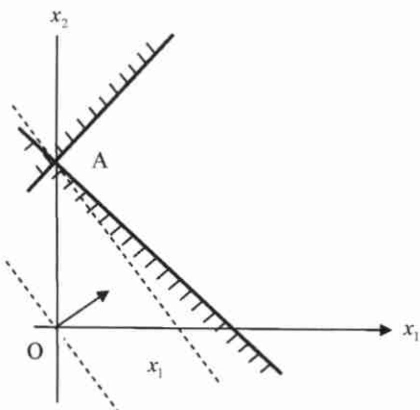
зығымен беттесетін қабырғасы (AD) өзара параллель, яғни $c_1x_1 + c_2x_2 = d$ түрінде берілгенін байқауға болады.

1.6-суретте минимизациялау есебін қарастырсақ, онда деңгей сызығын сызықтық функцияның кему ($\overline{c}$ =(c_1, c_2) векторға қарама-қарсы бағытта) бағытында жылжытсақ, онда деңгей сызығы барлық кезде шешімнің көпбұрышымен қиылысады, демек, сызықтық функция шексіз кемиді.

Сонымен сызықтық функцияның ақырлы оптимумы жоқ, яғни $F_{\min} = -\infty$. Осы жағдайда максимизациялау есебін қарастырсақ,



1.8-сурет



1.9-сурет

онда деңгей сызығын сызықтық функцияның өсу ($\bar{c}$ =(c_1, c_2) вектормен бағыттас) бағытында жылжытсақ, онда деңгей сызығы барлық кезде шешімнің көпбұрышымен қиылысады, демек, сызықтық функция шексіз артады және бұл жағдайда да сызықтық функцияның ақырлы оптимумы болмайды, яғни $F_{max} = \infty$.

1.7-суретте 1.5-суреттегі жағдайға ұқсас. Бұл жағдайда минимизациялау есебінің шешімі AD кесіндісінің барлық нүктелері; максимизациялау есебінің шешімі BC кесіндісінің барлық нүктелері болып табылады.

Әрі қарай талдауды оқырмандардың өздеріне ұсынамыз.

1.8-суретте жарамды шешімдер облысы бос жиын, демек шексіздіктер жүйесі үйлесімсіз, яғни есептің оптимумы жоқ.

1.9-суретте жарамды шешімдер облысы A нүктесін береді және бұл нүктеде сызықтық функцияның оптимумы болады.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Модельдеу ұғымын қалай түсінесіз?

2. Модельдеудің қандай түрлері кездеседі? Қысқаша сипаттама беріңіз.

3. Экономикалық-математикалық модельдеудің кезеңдеріне тоқталыңыз.

4. Экономикалық-математикалық модельдердің топтастырылуы.

5. Экономикалық-математикалық модельдерді құру алгоритмі.

6. Сызықтық программалау есебінің қойылуы.

7. Тиімді шешімнің, негізгі және негізгі емес айнымалыларының анықтамаларын беріңіз.

8. Сызықтық программалау есебінің түрлері.

9. Сызықтық программалау есебін графикалық әдіспен шығару алгоритмі.

10. Сызықтық функцияның деңгей сызығының маңызды қасиеті.

11-15-есептеріндегі берілген сызықтық программалау есептерін графикалық әдіспен шығару керек.

11. $F(x) = 6x_1 + 10x_2 \rightarrow extr$,

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \geq 20, \\ 4x_1 + 3x_2 \leq 40, \\ 4x_1 + 15x_2 \geq 88, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.$$

12. $F(x) = 4x_1 + 7x_2 \to \max$,

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 27, \\ 2x_1 + 4x_2 \le 28, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 23. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

13. $F(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 11, \\ -x_1 + x_2 \le 10, \\ -x_1 + x_2 \le 1. \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \ \ x_2 \ge 0.$$

14. $F(x) = x_1 + 2x_2 + x_5 \to \min$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 5, \\ x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 2, \\ x_3 - x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1, 5}.$$

15. $F(x) = -4x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 \to \max$,

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 3 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1, 4}.$$

2.1. Сызықтық программалау есебін шығарудың жалпы идеясы

Симплекс әдістің аталуы ол алғашқы рет D шешімдер жиыны R^n кеңістікте симплексті (*simplex* – латыншадан аударғанда қарапайым деген мағынаны білдіреді) беретін сызықтық программалау есебіне қатысты дайындалды:

$$D = \left\{ x_j \in R^n \left| \sum_{j=1}^{n} x_j = 1, x_j \geq 0 \right. \right\},$$

мұндағы $x_j = \left(x_1^j, x_2^j, \ldots, x_n^j\right)^T$ – n-өлшемді вектор, $1 = (1_1, 1_2, ..., 1_n)^T$ – бірлік вектор; $0 = \left(0_1, 0_2, \ldots, 0_n\right)^T$ - нөлдік вектор.

Канондық түрде берілген кез келген сызықтық программалау есебін шығаруға мүмкін болғандықтан симплекс әдісі әмбебап әдіс болып табылады.

$(n-2)$-өлшемді бір жазықтықта жатпайтын $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R^n$ – n нүктенің дөңес қабықшасы (7-тарауды қараңыз) S_n (n-өлшемді) *симплекс* деп аталады.

Басқаша айтқанда, симплекс бұл – n төбесі бар n-өлшемді дөңес көпжақ. Симплекстің кез келген нүктесін оның төбесінің дөңес қабықшасы ретінде беруге болады. Екіөлшемді симплекс бұл – кесінді, үшөлшемді симплекс – үшбұрыш, төртөлшемді симплекс – тетраэдр. Бұл жерде симплекстің өлшемділігі өзі орналасқан $(n-1)$-өлшемді гипержазықтықтың өлшемділігі бойынша емес, кеңістіктің өлшемділігі бойынша анықталады.

$x_j = \left(0_1, 0_2, \ldots, 1_j, \ldots, 0_n\right)^T$, $j = \overline{1, n}$ нүктелері симплекстің төбелері болып табылады.

Симплекс әдісінің негізгі идеясы қандай да бір тірек шешімнен бастап жүйенің тірек шешімдері бойымен біртіндеп тиімді тірек шешімге бағытталады. Осылайша тиімді тірек шешімге бағыттала отырып бір шешімнен бір шешімге көшу барысында максимум есебінде мақсат функциясының мәні кемімейді, минимум есебінде артпайды. Тірек шешімнің саны ақырлы болғандықтан қандай да бір қадамның ақырлы санынан кейін тиімді шешім табылады немесе есептің шешімінің жауабын аламыз.

Сызықтық программалау есебін симплекс әдіспен шығару алгоритмі

Жоғарыда айтылғандай, алдымен сызықтық программалау есебінің канондық түрде болуын тексереміз (кері жағдайда қосымша айнымалылар енгізе отырып осы түрге келтіреміз). Осыдан кейін кез келген сызықтық программалау есебін симплекс әдісімен шығара аламыз. Тек шектеулер жүйесінің бос мүшелері оң болатындығына көңіл аударуымыз керек.

1. Базистік шешімді табу үшін айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бөлеміз. Бірінші қадамда, мүмкін болса негізгі айнымалылар ретінде m (m – шектеулер жүйесіндегі теңдеулер мен теңсіздіктердің жалпы саны) айнымалыны таңдаймыз. Бұл айнымалылардың әрқайсысы шектеулер жүйесінің m теңдеулерінің тек қана біреуіне енгізілуі тиіс, ал бұл мүмкін болмаса негізгі айнымалылардың анықтамасын пайдаланамыз.

2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

3. Негізгі емес айнымалыларды нөлге теңестіреміз. Алынған сызықтық теңдеулер жүйесін негізгі айнымалыларға қатысты шешіп, базистік шешімді табамыз.

4. Негізгі айнымалылар анықталған өрнектердегі бос мүшелердің теріс еместігіне көзімізді жеткізе отырып, негізгі айнымалылардың теріс еместігін тексереміз. Ал теріс бос мүше кездессе алгоритмнің екінші қадамына көшеміз де, айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға бөлудің басқа нұсқасын қарастырамыз (бұл нұсқау негізгі және негізгі емес айнымалыларға бірінші рет бөлгенде ғана орындалады).

5. Төртінші қадамды орындау нәтижесінде негізгі айнымалылар теріс емес болса, алынған базистік шешім тиімді болуы мүмкін. Сондықтан, F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

6. Негізгі емес айнымалылардың мәнін нөлге теңестіріп, табылған базистік шешімде F мақсат функциясының мәнін есептейміз.

7. F мақсат функциясының формуласында негізгі емес айныма-

лылардағы барлық коэффициенттер оң (теріс) болса, онда табылған базистік шешім минимал (максимал) болады да, есеп шешілген болып есептелінеді. Кері жағдайда, яғни негізгі емес айнымалылардағы коэффициенттердің таңбалары әр түрлі (оң және теріс коэффициенттер аралас) болып келсе, алгоритмнің келесі қадамына көшеміз.

8. Жаңа базиске енгізілетін және одан шығарылатын айнымалыларды анықтаймыз: егер F мақсат функциясындағы негізгі емес айнымалылардың коэффициенттерінің барлығы бірдей оң (теріс) болмаса, онда мақсат функциясына енетін айнымалылардың коэффициенттерінің ішінен модулі бойынша ең үлкен болатындай теріс (оң) коэффициенті бар айнымалыны негізгі емес айнымалы ретінде таңдаймыз. Оны қандай да бір базистік айнымалы нөлге тең болғанша арттыра береміз (бұл кезде қалған негізгі емес айнымалылар өздерінің нөлдік мәнін сақтайды). Таңдап алынған негізгі емес айнымалыны келесі қадамда негізгі айнымалы ретінде, ал нөлге тең болған базистік айнымалыны жаңа негізгі емес айнымалы ретінде қарастырамыз.

9. Тиімді шешім табылғанша (F мақсат функциясындағы негізгі емес айнымалылардың коэффициенттерінің барлығы бірдей оң (теріс) болғанша), айнымалыларды негізгі және негізгі емес айнымалыларға жаңадан бөлуді пайдалана отырып алгоритмнің үшінші қадамына қайта ораламыз.

Осы алгоритмді пайдаланып әр түрлі жағдайдағы сызықтық программалау есептерін шығаруға болады.

2.1-мысал.

Симплекс әдісін пайдаланып

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

сызықтық функциясының максимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -14 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_7 = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_7 = 8 \end{cases}$$

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. Базистік шешімді табу үшін айнымалыларды негізгі айнымалыларға (н.а.) және негізгі емес айнымалыларға (н.е.а.) бөлеміз.

н.а. x_3, x_4, x_5, x_6, x_7;

н.е.а. x_1, x_2.

1.2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 - 2x_2 \\ x_4 = 34 - x_1 - 4x_2 \\ x_5 = 13 - x_1 - x_2 \\ x_6 = 5 - x_1 + x_2 \\ x_7 = 8 - x_1 \end{cases}$$

1.3. Негізгі емес айнымалыларды нөлге теңестіреміз:

$x_1 = 0, x_2 = 0.$

1.2-қадамдағы алынған сызықтық теңдеулер жүйесін негізгі айнымалыларға қатысты шешіп, базистік шешімді табамыз.

$$X_1 = (0, 0, 14, 34, 13, 5, 8).$$

1.4. Табылған базистік шешімнің компоненттері теріс емес, сондықтан ол жарамды.

1.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз.

$$F = 3x_1 + 2x_2\,,\ F_1 = 3\cdot 0 + 2\cdot 0 = 0\,.$$

1.6. F мақсат функциясының формуласында негізгі емес айнымалылардағы барлық коэффициенттер оң, сондықтан алынған базистік шешім тиімді емес (алгоритмнің 7-қадамы).

Жаңа базиске енгізілетін және базистен шығарылатын айнымалыларды анықтаймыз. Берілген мысалда x_1 айнымалысының коэффициенті үлкен, сондықтан x_1 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

1.7. x_2=0 (1.3-қадам бойынша, x_1 айнымалысы негізгі айнымалыға көшірілгендіктен нөлге тең емес)

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 \\ x_4 = 34 - x_1 \\ x_5 = 13 - x_1 \quad \text{(1.2-қадамда есептелген жүйеге мәнін қоямыз)} \\ x_6 = 5 - x_1 \\ x_7 = 8 - x_1 \end{cases}$$

Айнымалылардың теріс еместік шартын ескерсек

$$\begin{cases} x_3 = 14 + x_1 \ge 0 \\ x_4 = 34 - x_1 \ge 0 \\ x_5 = 13 - x_1 \ge 0 \\ x_6 = 5 - x_1 \ge 0 \\ x_7 = 8 - x_1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 + x_1 \ge 0 \\ 34 - x_1 \ge 0 \\ 13 - x_1 \ge 0 \\ 5 - x_1 \ge 0 \\ 8 - x_1 \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 \ge -14 & (\infty) \\ x_1 \le 34 & (34) \\ x_1 \le 13 & (13) \\ x_1 \le 5 & (5) \\ x_1 \le 8 & (8) \end{cases}$$

$$x_1 = \min\{\infty, 34, 13, 5, 8\} = 5$$

1.8. Табылған 5 мәні 4-теңдеуге сәйкес келеді, яғни 4-теңдеу – шешуші теңдеу. x_6 негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға өтеді.

Екінші итерациялық қадам.

2.1. *н.а.* x_1, x_3, x_4, x_5, x_7;

н.е.а. x_2, x_6.

$$2.2. \begin{cases} x_3 = 14 + (5 + x_2 - x_6) - 2x_2 \\ x_4 = 34 - (5 + x_2 - x_6) - 4x_2 \\ x_5 = 13 - (5 + x_2 - x_6) - x_2 \\ x_1 = 5 + x_2 - x_6 \\ x_7 = 8 - (5 + x_2 - x_6) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 5 + x_2 - x_6 \\ x_3 = 19 - x_2 - x_6 \\ x_4 = 29 - 5x_2 + x_6 \\ x_5 = 8 - 2x_2 + x_6 \\ x_7 = 3 - x_2 + x_6 \end{cases}$$

2.3. $x_2 = 0$, $x_6 = 0$, $X_2 = (5, 0, 19, 29, 8, 0, 3)$.

2.4. Базистік шешім жарамды.

2.5. $F = 3 \cdot (5 + x_2 - x_6) + 2x_2 = 15 + 5x_2 - 3x_6$,

$F_2 = 15 + 5 \cdot 0 - 3 \cdot 0 = 15$.

2.6. Мақсат функцияда тек қана x_2 айнымалысының коэффициенті оң болғандықтан, x_2 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

2.7. $x_6 = 0$

$$\begin{cases} x_1 = 5 + x_2 \\ x_3 = 19 - x_2 \\ x_4 = 29 - 5x_2 \\ x_5 = 8 - 2x_2 \\ x_7 = 3 - x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5 + x_2 \ge 0 & (\infty) \\ 19 - x_2 \ge 0 & (19) \\ 29 - 5x_2 \ge 0 & (29/5) \\ 8 - 2x_2 \ge 0 & (4) \\ 3 - x_2 \ge 0 & (3) \end{cases}$$

$$x_2 = \min\left\{\infty, 19, \frac{29}{5}, 4, 3\right\} = 3.$$

2.8. Бесінші теңдеу – шешуші теңдеу, x_7 айнымалысы негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға көшіріледі.

Үшінші итерациялық қадам.

3.1. *н.а.* x_1, x_2, x_3, x_4, x_5;

н.е.а. x_6, x_7.

3.2. $\begin{cases} x_1 = 5 + (3 + x_6 - x_7) - x_6 \\ x_3 = 19 - (3 + x_6 - x_7) - x_6 \\ x_4 = 29 - 5 \cdot (3 + x_6 - x_7) + x_6 \\ x_5 = 8 - 2 \cdot (3 + x_6 - x_7) + x_6 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \\ x_3 = 16 - 2x_6 + x_7 \\ x_4 = 14 - 4x_6 + 5x_7 \\ x_5 = 2 - x_6 + 2x_7 \end{cases}$

3.3. $x_6 = 0$, $x_7 = 0$, $X_3 = (8, 3, 16, 14, 2, 0, 0)$.

3.4. Базистік шешім жарамды.

3.5. $F = 15 + 5x_2 - 3x_6 = 15 + 5 \cdot (3 + x_6 - x_7) - 3x_6 = 30 + 2x_6 - 5x_7$, $F_3 = 30 + 2 \cdot 0 - 5 \cdot 0 = 30$.

3.6. Мақсат функцияда тек қана x_6 айнымалысының коэффициенті оң болғандықтан, x_6 айнымалысы негізгі емес айнымалыдан негізгі айнымалыға көшіріледі.

3.7. $x_7 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 = 8 \\ x_2 = 3 + x_6 \\ x_3 = 16 - 2x_6 \\ x_4 = 14 - 4x_6 \\ x_5 = 2 - x_6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 \geq 0 \\ x_2 = 3 + x_6 \geq 0 \\ x_3 = 16 - 2x_6 \geq 0 \\ x_4 = 14 - 4x_6 \geq 0 \\ x_5 = 2 - x_6 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8 \geq 0 & (\infty) \\ 3 + x_6 \geq 0 & (\infty) \\ 16 - 2x_6 \geq 0 & (8) \\ 14 - 4x_6 \geq 0 & (7/2) \\ 2 - x_6 \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$x_6 = \min\left\{\infty, \infty, 8, \frac{7}{2}, 2\right\} = 2.$$

3.8. Бесінші теңдеу – шешуші теңдеу, x_5 айнымалысы негізгі айнымалыдан негізгі емес айнымалыға көшіріледі.

Төртінші итерациялық қадам.

4.1. *н.а.* x_1, x_2, x_3, x_4, x_6;

н.е.а. x_5, x_7.

4.2. $\begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + x_6 - x_7 \\ x_3 = 16 - 2x_6 + x_7 \\ x_4 = 14 - 4x_6 + 5x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 3 + (2 - x_5 + 2x_7) - x_7 \\ x_3 = 16 - 2\cdot(2 - x_5 + 2x_7) + x_7 \\ x_4 = 14 - 4\cdot(2 - x_5 + 2x_7) + 5x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = 8 - x_7 \\ x_2 = 5 - x_5 + x_7 \\ x_3 = 12 + 2x_5 - 3x_7 \\ x_4 = 6 + 4x_5 - 3x_7 \\ x_6 = 2 - x_5 + 2x_7 \end{cases}$$

4.3. $x_5 = 0$, $x_7 = 0$. $X_4 = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0)$.

4.4. Базистік шешім жарамды.

4.5. $F = 30 + 2x_6 - 5x_7 = 30 + 2\cdot(2 - x_5 + 2x_7) - 5x_7 = 34 - 2x_5 - x_7$, $F_4 = 34 - 2\cdot 0 - 0 = 34$.

4.6. Мақсат функцияда оң коэффициентті айнымалы жоқ, демек тиімділік критерийі орындалады. Алынған шешім тиімді.

Жауабы: $F_{\max} = F_4 = 34$, $X_4 = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0)$.

2.2-мысал.

Симплекс әдісін пайдаланып

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1, 4}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to \min$$

сызықтық функциясының минимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз.

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 = 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 - y_7 = 2 \end{cases}$$

Бірінші қадамда қолдануға болатын анықтама бойынша негізгі айнымалылар – y_6, y_7. Бұл жағдайда базистік шешім Y= (0, 0, 0, 0, 0, –3, –2) – жарамды емес, себебі базистік шешім ретінде қарастырып отырған шешімде екі теріс компонент бар. Ал негізгі айнымалыларға қойылатын талаптарды ескерсек, әрбір теңдеуде бір рет кездесетін айнымалыны негізгі айнымалы ретінде алуға болады. Біздің мысалда бірінші теңдеудегі y_5 айнымалысы шектеулер жүйесінде бір рет қана кездеседі, сондықтан, y_5 айнымалысын негізгі айнымалы ретінде қарастырамыз. Ал екінші теңдеуден y_7 айнымалысын аламыз. Сонда негізгі айнымалылар – y_5, y_7.

$$\begin{cases} y_5 = 3 + y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_6 \\ y_7 = -2 + 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \end{cases}$$

$$Y_1 = (0, 0, 0, 0, 3, 0, -2).$$

Базистік шешім жарамды емес, бір теріс компонент бар.

Базистік шешім жарамды емес болған жағдайда мақсат функциямен жұмыс істеуге болмайды. Сондықтан екінші теңдеуден кез келген оң коэффициентті айнымалыны (y_3) негізгі айнымалы ретінде қарастырамыз.

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. *н.а.* y_3, y_5;

н.е.а. $y_1,\ y_2,\ y_4,\ y_6,\ y_7$.

1.2. $\begin{cases} y_5 = 3 + y_1 - y_2 - y_3 - y_4 + y_6 \\ y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \end{cases} \Rightarrow$

$$\begin{cases} y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \\ y_5 = 3 + y_1 - y_2 - (2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7) - y_4 + y_6 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y_3 = 2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7 \\ y_5 = 1 + 3y_1 + 3y_2 - 2y_4 + y_6 - y_7 \end{cases}$$

1.3. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_4 = 0$, $y_6 = 0$, $y_7 = 0$;

$Y_1 = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0)$.

1.4. Базистік шешім жарамды.

1.5. $Z = 14y_1 + 34y_2 + 13 \cdot (2 - 2y_1 - 4y_2 + y_4 + y_7) + 5y_4 + 8 \cdot (1 + 3y_1 + 3y_2 - 2y_4 + y_6 - y_7) = 14y_1 + 34y_2 + 26 - 26y_1 - 52y_2 + 13y_4 + 13y_7 + 5y_4 + 8 + 24y_1 + 24y_2 - 16y_4 + 8y_6 - 8y_7 = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 2y_4 + 8y_6 + 5y_7$,

$$Z_1 = 34 + 12 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 34.$$

1.6. Мақсат функцияда теріс коэффициентті айнымалы жоқ, демек алынған шешім тиімді шешім болып табылатынын білдіреді.

Жауабы: $Z_{\min} = Z_1 = 34$, $Y_1 = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0)$.

2.2. Симплекс әдісінің ерекше жағдайлары

Сызықтық программалау әдістерімен шешу барысында пайда болатын ерекше жағдайларды қарастырайық.

2.2.1. Тиімді шешімнің жалғыз еместігі (балама оптимум)

2.3-мысал.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -6, \\ x_1 + 2x_2 \leq 10, \\ 3x_1 - x_2 \leq 9 \end{cases}$$

шектеулеріндегі және $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ теріс емес шартында $F = 2x_1 + 4x_2 \to \max$ сызықтық программалау есебін шығару керек.

Шығарылуы. Шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 & = -6, \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 10, \\ 3x_1 - x_2 \quad\quad + x_5 & = 9. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 & = 6, \\ x_1 + 2x_2 \quad + x_4 & = 10, \\ 3x_1 - x_2 \quad\quad + x_5 & = 9. \end{cases}$$

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. *н.а.* x_3, x_4, x_5;

н.е.а. x_1, x_2.

1.2. $\begin{cases} x_3 = 6 + x_1 - 2x_2, \\ x_4 = 10 - x_1 - 2x_2, \\ x_5 = 9 - 3x_1 + x_2. \end{cases}$

1.3. $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Алғашқы базистік шешімді табамыз:

$$X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, 6, 10, 9).$$

1.4. Базистік шешімнің компоненттерінің ішінде теріс элементтер жоқ, яғни ол жарамды.

1.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз де (мақсат функциядағы екі айнымалы да негізгі емес, сондықтан функция өзгеріссіз қалады), алынған базистік шешімде F мақсат функциясының мәнін есептейміз (негізгі емес айнымалылардың мәнін нөлге теңестіреміз):

$$F = 2x_1 + 4x_2, \; F_1 = 2x_1 + 4x_2 = 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 = 0, \quad F_1 = 0.$$

1.6. Берілген мысалда сызықтық функцияның максимал мәнін табу керек. Сондықтан, F өрнегіне кіретін негізгі емес айнымалылардың екеуі де оң коэффициентті болғандықтан мәні үлкен коэффициентті айнымалы, біздің мысалымызда – x_2 арқылы F мақсат функциясының мәнін арттырамыз.

1.7. Шешімнің жарамдылығын сақтау үшін барлық айнымалылар теріс емес болуы керек, және негізгі емес айнымалыны $x_1 = 0$ деп алып, келесі қатынасты аламыз:

$$\begin{cases} x_3 = 6 + x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = 10 - x_1 - 2x_2 \geq 0, \\ x_5 = 9 - 3x_1 + x_2 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6 - 2x_2 \geq 0, & (3) \\ 10 - 2x_2 \geq 0, & (5) \\ 9 + x_2 \geq 0. & (\infty) \end{cases}$$

$x_2 = \min\{3, 5, \infty\} = 3$ түрінде анықталады.

1.8. $x_2 = 3$ болғанда x_3 айнымалысы нөлге айналады, және негізгі емес айнымалыға көшеді. Сонымен, бірінші теңдеу – шешуші теңдеу.

Екінші итерациялық қадам.

2.1. *н.а.* x_2, x_4, x_5;

н.е.а. x_1, x_3.

2.2. $$\begin{cases} x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ x_4 = 10 - x_1 - 2\cdot\left(3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right), \Rightarrow \\ x_5 = 9 - 3x_1 + 3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_3, \\ x_5 = 12 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

2.3. Базистік шешім: $x_1 = 0$, $x_3 = 0$.

$$X_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 3, 0, 4, 12).$$

2.4. Базистік шешім жарамды.

2.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектеп, осы базистік шешімде F функциясының мәнін есептейміз:

$$F = 2x_1 + 4x_2 = 2x_1 + 4\cdot\left(3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3\right) = 12 + 4x_1 - 2x_3,$$

$$F = 12 + 4x_1 - 2x_3.$$

$$F_2 = 12 + 4x_1 - 2x_3 = 12 + 4\cdot 0 - 2\cdot 0 = 12, \quad F_2 = 12.$$

2.6. Сызықтық функциядағы x_1 айнымалысының коэффициенті оң, яғни тиімділік критерийі орындалмайды. x_1 айнымалысының есебінен мақсат функцияның мәнін арттырамыз.

2.7. $x_3 = 0$:

$$\begin{cases} x_2 = 3 + \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \ge 0, \\ x_4 = 4 - 2x_1 + x_3 \ge 0, \\ x_5 = 12 - \frac{5}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3 + \frac{1}{2}x_1 \ge 0, & (\infty) \\ 4 - 2x_1 \ge 0, & (2) \\ 12 - \frac{5}{2}x_1 \ge 0. & \left(\frac{24}{5}\right) \end{cases}$$

$x_1 = \min\left\{\infty, 2, \frac{24}{5}\right\} = 2$ түрінде анықталады.

2.8. $x_1 = 2$ болғанда x_4 айнымалысы нөлге айналады, және негізгі емес айнымалыға көшеді. Сонымен, екінші теңдеу – шешуші теңдеу.

Үшінші итерациялық қадам.

3.1. *н.а.* x_1, x_2, x_5;

н.е.а. x_3, x_4.

3.2. $$\begin{cases} x_1 = 2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \\ x_2 = 4 - \frac{1}{4}x_3 - \frac{1}{4}x_4, \\ x_5 = 7 - \frac{7}{4}x_3 + \frac{5}{4}x_4. \end{cases}$$

3.3. $x_3 = 0$, $x_4 = 0$. Базистік шешімді табамыз:

$$X_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (2, 4, 0, 0, 7).$$

3.4. Базистік шешімнің компоненттері теріс емес, яғни базистік шешім жарамды.

3.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз де, F мақсат функциясының мәнін есептейміз:

$$F = 12 + 4x_1 - 2x_3 = 12 + 4\cdot\left(2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4\right) - 2x_3 = 20 - 2x_4,$$

$$F = 20 - 2x_4.$$

$$F_3 = 20 - 2x_4 = 20 - 2\cdot 0 = 20,\ F_3 = 20.$$

3.6. Бұл өрнекте оң коэффициентті негізгі емес айнымалы жоқ, демек, тиімділік критерийі орындалады, $X_3 = (2, 4, 0, 0, 7)$ – тиімді шешім, $F_{\max} = F(X_3) = 20$.

Әйтсе де, соңғы өрнекте негізгі емес x_3 айнымалысы жоқ (оның коэффициентін нөлге тең деп қарастыруға болады), сондықтан бұл айнымалының өзгеруі сызықтық функцияның өзгеруіне ешқандай да қатысы болмайды. Мысалы, x_3 айнымалысын негізгі айнымалыға көшіруге болады: $x_3 = \min\{\infty, \infty, 4\} = 4$. x_5 айнымалысы негізгі емес айнымалыға көшеді, әйтсе де, сызықтық функция өзгермейді. Расында да, кезектегі қадамда амалдарды орындай отырып $X_4 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (4, 3, 4, 0, 0)$ жаңа базистік шешімді аламыз. Алынған базистік шешімде де мақсат функцияның мәні $F_{\max} = F(X_4) = 20$. $x_4 = 0$ екенін (X_4 базистік шешімді де ол негізгі емес айнымалылардың қатарында қалды), ал x_3 айнымалысы $0 \le x_3 \le 4$ теңсіздігін қанағаттандыратынын ескеріп теңдеулер жүйесінен есептің барлық тиімді шешім жиынын алуға болады. Ыңғайлы болу үшін $x_3 = z$ белгілеуін енгізейік, мұндағы $(z \in [0; 4])$.

Сонда тиімді шешімдер жиыны: $x_1 = 2 + \frac{1}{2}z$; $x_2 = 4 - \frac{1}{4}z$; $x_3 = z$; $x_4 = 0$; $x_5 = 7 - \frac{7}{4}z$.

Жауабы: $x_1 = 2 + \frac{1}{2}z$; $x_2 = 4 - \frac{1}{4}z$; $x_3 = z$; $x_4 = 0$;

$$x_5 = 7 - \frac{7}{4}z;\ F_{\max} = 20,\ z \in [0, 4].$$

2.2.2. Өзгешеленген базистік шешімнің пайда болуы

2.4-мысал.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4, \\ 3x_1 - x_2 \geq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

шектеулеріндегі және $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ теріс емес шартында $F = 2x_1 - x_2 \to \max$ сызықтық программалау есебін шығару керек.

Шығарылуы. Шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 \qquad = 4, \\ 3x_1 - x_2 \quad - x_4 \qquad = 3, \\ x_1 - x_2 \qquad + x_5 = 4. \end{cases}$$

Бірінші итерациялық қадам.

1.1. *н.а.* x_3, x_4, x_5;

н.е.а. x_1, x_2.

1.2. $\begin{cases} x_3 = -4 + x_1 + 2x_2, \\ x_4 = -3 + 3x_1 - x_2, \\ x_5 = 4 - x_1 + x_2. \end{cases}$

1.3. Алғашқы базистік шешімді табамыз:

$x_1 = 0$, $x_2 = 0$; $X_1 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 0, -4, -3, 4)$.

1.4. Базистік шешім жарамды емес (шешімде екі теріс компонент кездеседі). Осы теріс компонент кездесетін теңдеудің кез келгенін, айталық бірінші теңдеуді таңдайық. Бұл теңдеуде x_3 айнымалысының компоненті теріс болғандықтан оның мәнін арттыру керек. Ал оны x_1 немесе x_2 айнымалыларының біреуінің есебінен арттыруға болады, себебі екі айнымалының да коэффициенттері оң. Біз x_2 айнымалысын қарастырамыз, өйткені, оның коэффициенті үлкен. Осы жерде $x_2 = 2$ болғанда, x_3 айнымалысының мәні нөлге тең болады. x_3 айнымалысын негізгі емес айнымалы деп есептеуге болады, және x_2 айнымалысының өсуі басқа айнымалылардың теріс еместігімен шектеледі:

$$\begin{cases} x_3 = -4 + x_1 + 2x_2 \geq 0, \\ x_4 = -3 + 3x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_5 = 4 - x_1 + x_2 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -4 + 2x_2 \geq 0, & (2) \\ -3 - x_2 \geq 0, & (\infty) \\ 4 + x_2 \geq 0. & (\infty) \end{cases}$$

$x_2 = \min\{2; \infty; \infty\} = 2$ – шешуші теңдеу – бірінші теңдеу. Сонымен, x_2 айнымалысы негізгі айнымалыға, x_3 айнымалысы негізгі емес айнымалыға көшеді.

Екінші итерациялық қадам.

2.1. *н.а.* x_2, x_4, x_5;

н.е.а. x_1, x_3.

2.2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - \dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_3, \\ x_4 = -5 + \dfrac{7}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_3, \\ x_5 = 6 - \dfrac{3}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_3. \end{cases}$$

2.3. Базистік шешімді анықтаймыз:

$$X_2 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, 2, 0, -5, 6).$$

2.4. Анықталған базистік шешім жарамды емес. Теріс компонент тек екінші теңдеуде кездеседі, сондықтан, x_4 айнымалысының мәнін арттыруымыз керек. Ол үшін x_1 айнымалының мәнін (коэффициенті оң) арттырамыз. Егер x_1 айнымалысын негізгі айнымалыға көшірсек, x_4 айнымалысы артады. x_1 мәні –10/7-ге тең болса, x_4 мәні нөлге тең болады. x_1 айнымалысының өсуі қалған айнымалылардың теріс еместік шартымен шектеледі:

$$\begin{cases} x_2 = 2 - \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq 0, \\ x_4 = -5 + \frac{7}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_3 \geq 0, \\ x_5 = 6 - \frac{3}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_3 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 - \frac{1}{2}x_1 \geq 0, \quad (4) \\ -5 + \frac{7}{2}x_1 \geq 0, \quad (10/7) \\ 6 - \frac{3}{2}x_1 \geq 0. \quad (4) \end{cases}$$

$x_1 = \min\{4; 10/7; 4\} = \frac{10}{7}$, сонымен, екінші теңдеу – шешуші теңдеу болып табылады.

Үшінші итерациялық қадам.

3.1. *н.а.* x_1, x_2, x_5;

н.е.а. x_3, x_4.

3.2. $$\begin{cases} x_1 = \frac{10}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4, \\ x_2 = \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4, \\ x_5 = \frac{27}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4. \end{cases}$$

3.3. Базистік шешім:

$$X_3 = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0, \frac{27}{7}\right).$$

3.4. Табылған базистік шешім жарамды.

3.5. F мақсат функциясын негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектеп, оның мәнін есептейміз:

$$F = 2 \cdot \left(\frac{10}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4\right) - \left(\frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4\right) = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{5}{7}x_4,$$

$$F = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{5}{7}x_4; \; F_3 = \frac{11}{7} - \frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{5}{7} \cdot 0 = \frac{11}{7}, \; F_3 = \frac{11}{7}.$$

3.6. x_4 айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз.

3.7. Айнымалылардың теріс емес шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{10}{7} + \frac{1}{7}x_3 + \frac{2}{7}x_4 \ge 0, \\ x_2 = \frac{9}{7} + \frac{3}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4 \ge 0, \\ x_5 = \frac{27}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{10}{7} + \frac{2}{7}x_4 \ge 0, & (\infty) \\ \frac{9}{7} - \frac{1}{7}x_4 \ge 0, & (9) \\ \frac{27}{7} - \frac{3}{7}x_4 \ge 0. & (9) \end{cases}$$

$x_4 = \min\{\infty; 9; 9\} = 9$ түрінде анықталады.

3.8. $x_4 = 9$ болғанда x_2 айнымалысы және x_5 айнымалысы нөлге айналады, және осы екі айнымалының біреуін (кез келгенін) негізгі емес айнымалыға көшіреміз. Екінші теңдеу шешуші теңдеу болып табылады.

Төртінші итерациялық қадам.

4.1. *н.а.* x_1, x_4, x_5;

н.е.а. x_2, x_3.

4.2. $$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 + x_3, \\ x_4 = 9 - 7x_2 + 3x_3, \\ x_5 = 3x_2 - x_3. \end{cases}$$

4.3. Базистік шешім $X_4 = (4, 0, 0, 9, \mathbf{0})$ – ерекшеленген базистік шешім болып табылады, негізгі айнымалының компоненті ($x_5 = 0$) нөлге тең.

4.4. Базистік шешім жарамды.

4.5. $$F = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{5}{7}x_4 = \frac{11}{7} - \frac{1}{7}x_3 + \frac{5}{7} \cdot (9 - 7x_2 + 3x_3) = 8 -$$

$$-5x_2 + 2x_3, F = 8 - 5x_2 + 2x_3; \; F = 8 - 5 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 8, \quad F_4 = 8.$$

4.6. Тиімділік критерийі орындалмайды. Сондықтан, $F_4 = 8$ мәні максимум емес. Басқа жарамды базистік шешімге көшеміз. Оң таңбалы коэффициент жалғыз, осы коэффициентке сәйкес x_3 айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз.

4.7. Айнымалылардың теріс еместік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_2 + x_3 \ge 0, \\ x_4 = 9 - 7x_2 + 3x_3 \ge 0, \\ x_5 = 3x_2 - x_3 \ge 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + x_3 \ge 0, & (\infty) \\ 9 + 3x_3 \ge 0, & (\infty) \\ - x_3 \ge 0. & (0) \end{cases}$$

Сонымен, $x_3 = \min\{\infty; \infty; 0\} = 0$.

4.8. $x_3 = 0$ болғанда x_5 айнымалысы нөлге айналады, және оны негізгі емес айнымалыға көшіреміз. Үшінші теңдеу шешуші теңдеу болып табылады.

Бесінші итерациялық қадам.

5.1. *н.а.* x_1, x_3, x_4;

н.е.а. $x_2,\ x_5$.

5.2. $$\begin{cases} x_1 = 4 + x_2 - x_5, \\ x_3 = 3x_2 - x_5, \\ x_4 = 9 + 2x_2 - 3x_5. \end{cases}$$

5.3. $X_5 = (4, 0, \mathbf{0}, 9, 0)$ - бұл базистік шешім де ерекшеленген. Ол компоненттері бойынша X_4 шешімінің компоненттерімен бірдей, бірақ, негізгі айнымалылар жиынтығымен өзгешеленеді. Төменде көріп отырғанымыздай сызықтық функцияның мәні өзгермейді.

5.4. Базистік шешім жарамды.

5.5. $F = 8 - 5x_2 + 2\cdot(3x_2 - x_5) = 8 + x_2 - 2x_5$,

$F = 8 + x_2 - 2x_5$. $F_5 = 8 + 0 - 2\cdot 0 = 8$, $F_5 = 8$.

5.6. Мақсат функциясында оң таңбалы коэффициенті бар негізгі емес айнымалы кездеседі. Сондықтан, $F_5 = 8$ мәні максимум емес. Басқа жарамды базистік шешімге көшеміз. Оң таңбалы коэффициент жалғыз, осы коэффициентке сәйкес x_2 айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз.

5.7. Айнымалылардың теріс еместік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} x_1 = 4 + x_2 - x_5 \geq 0, \\ x_3 = 3x_2 - x_5 \geq 0, \\ x_4 = 9 + 2x_2 - 3x_5 \geq 0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 + x_2 \geq 0, \quad (\infty) \\ \quad 3x_2 \geq 0, \quad (\infty) \\ 9 + 2x_2 \geq 0. \quad (\infty) \end{cases}$$

Сонымен, $x_2 = \min\{\infty; \infty; \infty\} = \infty$, теңдеу x_2 айнымалысының өсуіне шек қоймайды. Сондықтан, F функциясының мәні шектелмеген және оң, яғни $F_{max} = \infty$ (келесі тақырыпта қарастырылады).

Жауабы: $F_{max} = \infty$.

Қорытынды. Егер қандай да бір қадамда бір мезгілде бірнеше теңдеуде айнымалының мүмкін болатын ең үлкен мәні алынса, онда олардың кез келгенін шешуші теңдеу ретінде қарастыруға болады. Келесі қадамда өзгешеленген базистік шешім алынады, кезектегі базистік шешімге көшу мақсат функцияның мәнін өзгертпеуі мүмкін.

Ескерту. Тиімді шешімде алынған өзгешелеу сызықтық функциядағы барлық нөлдік емес, негізгі емес айнымалылардағы балама оптимумға әкелуі мүмкін.

2.2.3. Ақырлы оптимумның жоқ болуы ($F_{max} = \infty$ немесе $F_{min} = -\infty$)

Алдыңғы тақырыпта қарастырылған есептің минимум мәнін анықтайық.

2.5-мысал.

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 4 \\ 3x_1 - x_2 \geq 3 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \end{cases}$$

шектеулеріндегі және $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ теріс емес шартында $F = 2x_1 - x_2 \to \min$ сызықтық программалау есебін шығару керек.

Шығарылуы. 2.4-мысалда екінші итерациялық қадамда жарамды базистік шешімді анықтаған болатынбыз (сол мәліметтерді пайдаланып, есепті әрі қарай жалғастырамыз):

3.1. *н.а.* x_1, x_2, x_5;

н.е.а. x_3, x_4.

3.2. Негізгі айнымалыларды негізгі емес айнымалылар арқылы өрнектейміз:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7} + \dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{2}{7}x_4, \\ x_2 = \dfrac{9}{7} + \dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{1}{7}x_4, \\ x_5 = \dfrac{27}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 - \dfrac{3}{7}x_4. \end{cases}$$

3.3. Базистік шешім:

$$X = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \left(\frac{10}{7}, \frac{9}{7}, 0, 0, \frac{27}{7}\right).$$

3.4. Табылған базистік шешім жарамды.

3.5. $F = \dfrac{11}{7} - \dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{5}{7}x_4$, $F = \dfrac{11}{7} - \dfrac{1}{7}\cdot 0 + \dfrac{5}{7}\cdot 0 = \dfrac{11}{7}$, $F = \dfrac{11}{7}$.

3.6. Тиімділік критерийі орындалмайды. Теріс коэффициентті x_3 айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз.

3.7. Айнымалылардың теріс еместік шартын пайдаланамыз:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{7} + \dfrac{1}{7}x_3 + \dfrac{2}{7}x_4 \geq 0 \\ x_2 = \dfrac{9}{7} + \dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{1}{7}x_4 \geq 0 \\ x_5 = \dfrac{27}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 - \dfrac{3}{7}x_4 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{10}{7} + \dfrac{1}{7}x_3 \geq 0 \quad (\infty) \\ \dfrac{9}{7} + \dfrac{3}{7}x_3 \geq 0 \quad (\infty) \\ \dfrac{27}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 \geq 0 \quad (\infty) \end{cases}$$

$x_3 = \min\{\infty; \infty; \infty\} = \infty$. Қарастырып отырған теңдеу x_3 айнымалысының өсуіне шек қоймайды, сондықтан F функциясының мәні шектелмеген және теріс, яғни $F_{\min} = -\infty$.

Жауабы: $F_{\min} = -\infty$.

Е с к е р т у. Егер қандай да бір қадамда негізгі айнымалыға көшірілетін айнымалыға қатысты шектеулер жүйесінің барлық теңдеуінің бағалау қатынасы шексіздік болса, онда есептің ақырлы оптимумы жоқ (егер есеп максимумды анықтауға берілсе, онда $F_{max} = \infty$, егер есеп минимумды анықтауға берілсе, онда $F_{min} = -\infty$).

2.3. Симплекс кесте

Сызықтық программалау есебін компьютердің көмегімен шығаратын жағдайда симплекс әдісінің алгоритмін пайдаланған ыңғайлы, ал мұндай есептер компьютерсіз шығарылатын болса, симплекс кестені пайдаланған ыңғайлы болып саналады.

Сызықтық программалау есебін симплекс кестемен шығару алгоритмі

Сызықтық программалау есебінің максимумын анықтау керек болсын.

1. Қосымша айнымалыларды енгізгеннен кейін теңдеулер жүйесін және сызықтық функцияны бір жүйеге жаза отырып *кеңейтілген жүйе* деп аталатын мына түрдегі жүйені аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m, \\ F - c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n = 0. \end{cases}$$

Алынған жүйедегі енгізілген қосымша айнымалылардың таңбасы жүйенің оң жағындағы бос мүшелердің таңбасымен бірдей болсын деп ұйғарамыз, кері жағдайда М-әдісін (жасанды базис әдісін) пайдаланамыз.

2. Бастапқы кеңейтілген жүйенің компоненттерін бірінші симплекс кестеге енгіземіз. Кестенің бірінші бағанына негізгі айнымалыларды, екінші бағанына кеңейтілген жүйенің $b_1, b_2, \ldots, b_m$ бос мүшелерін, бірінші жолына барлық айнымалыларды жазамыз. Кестенің жұмыс бөлігінде (үшінші бағаннан және екінші жолдан бастап) кеңейтілген жүйенің a_{ij} коэффициенттері жазылады.

2.1 Кестенің соңғы бағанына айнымалының ең үлкен мүмкін болатын мәнін есептеу үшін қажет болатын бағалау қатынасы жазылады. Сызықтық функцияның теңдеуі үшін келтірілген кестенің соңғы жолы *бағалау жолы* деп аталады. Бұл жолда мақсат функциясындағы айнымалылардың қарама-қарсы таңбасымен алынған коэффициенттері жазылады. Әрі қарай кесте белгілі ережелер бойынша түрлендіріледі.

3. Есептің максимумын іздегендегі тиімділік критерийінің орындалуын тексереміз: егер кестенің соңғы жолында теріс коэффициенттер жоқ болса, онда шешім тиімді, соңғы бағанды (бағалау қатынасы) толтырудың қажеті жоқ және $F = c_0$ (кестенің сол жақ төменгі бұрышында), негізгі айнымалылар a_{i0} (екінші баған) мәндерін қабылдайды, негізгі емес айнымалылар нөлге тең болады. Осылайша тиімді базистік шешімді аламыз.

3.1. Егер тиімділік критерийі орындалмаса (кестенің соңғы жолында теріс коэффициенттер бар болса), онда кестенің соңғы жолындағы модулі бойынша ең үлкен теріс коэффициент *шешуші s бағанды* анықтайды.

Келесі ережелер бойынша әрбір жолдың шектеулері бағаланады:

1) егер b_i мен a_{is} таңбалары әр түрлі болса, онда ∞-ке тең болады;

2) егер $b_i = 0$ және $a_{is} < 0$ болса, онда ∞ болады;

3) егер $b_i = 0$ және $a_{is} > 0$ болса, онда 0-ге тең болады;

4) егер $a_{is} = 0$ болса, онда ∞ болады;

5) егер b_i мен a_{is} таңбалары бірдей болса, онда $\left|\frac{b_i}{a_{is}}\right|$ қатынасымен есептеледі.

$\min\limits_i \left\{ \left| \frac{b_i}{a_{is}} \right| \right\}$ – анықтаймыз. Егер ақырлы минимум жоқ болса, онда есептің ақырлы оптимумы жоқ ($F_{\max} = \infty$). Егер минимум ақырлы болса, онда осы минимумды қабылдаған мән орналасқан q жолды (егер осы минимум бірнеше рет кездессе, олар орналасқан жолдың кез келгенін) таңдаймыз және ол жолды *шешуші жол* деп атаймыз. Шешуші жолмен шешуші бағанның қиылысуындағы элемент a_{qs} *шешуші элемент* деп аталады.

4. Келесі симплекс кестеге көшу үшін төмендегі ережелерді пайдаланамыз:

1. кестенің сол жақ бағанына жаңа базисті жазамыз: x_q негізгі айнымалының орнына – x_s айнымалыны жазамыз;

2. негізгі айнымалыларға сәйкес келетін бағандарға нөлдер мен бірлерді жазамыз: жолдағы айнымалы мен бағандағы айнымалы бірдей болса 1 санын, ал осы бағандағы басқа торларға 0 санын жазамыз:

3. q нөмірлі жаңа жолды алдыңғы кестедегі осы жолдың элементтерін шешуші a_{qs} элементке бөлу арқылы аламыз;

4. қалған a'_{ij} элементтерін тіктөртбұрыш ережесімен есептейміз:

$$\begin{array}{cc} a_{ij} & a_{is} \\ a_{qj} & a_{qs} \end{array} \qquad a'_{ij} = a_{ij} - \frac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}, \quad b'_i = b_i - \frac{a_{is}b_q}{a_{qs}}.$$

Әрі қарай алгоритмнің 3-қадамына көшеміз.

2.6-мысал.

Симплекс кестені пайдаланып

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \ x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

сызықтық функциясының максимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Қосымша айнымалыларды енгізе отырып шектеулер жүйесін канондық түрге келтіреміз және кенейтілген жүйені жазамыз:

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 + x_3 = 14 \\ x_1 + 4x_2 + x_4 = 34 \\ x_1 + x_2 + x_5 = 13 \\ x_1 - x_2 + x_6 = 5 \\ x_1 + x_7 = 8 \\ F - 3x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Бірінші симплекс кестені толтырамыз.

1-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	14	**-1**	2	1	0	0	0	0	∞	
x_4	34	**1**	4	0	1	0	0	0	34	
x_5	13	**1**	1	0	0	1	0	0	13	
x_6	**5**	**1**	**-1**	**0**	**0**	**0**	**1**	**0**	**5**	⇐
x_7	8	**1**	0	0	0	0	0	1	8	
F	0	**-3**	-2	0	0	0	0	0	max	
		⇑								

Тиімділік критерийін тексереміз. Соңғы жолда екі теріс коэффициент бар. Солардың ішінде модулі бойынша ең үлкенін таңдаймыз (–3), бірінші баған шешуші баған болады (бұл баған ⇑ арқылы белгіленген және қалыңдатылып боялған), x_1 айнымалысы негізгі айнымалыға көшеді. Бағалау қатынасын анықтаймыз және $x_1 = \min\{\infty, 34, 13, 5, 8\} = 5$.

Төртінші жол – шешуші жол (ол жол да ерекше белгіленген). Шешуші жол мен шешуші бағанның қиылысуында $a_{41} = 1$ шешуші элемент орналасқан.

2-кестені алгоритмнің 4-қадамындағы ережелер бойынша толтырамыз.

1. кестенің сол жақ бағанына жаңа базисті жазамыз: x_6 негізгі айнымалының орнына – x_1 айнымалыны жазамыз;

2. негізгі айнымалыларға сәйкес келетін аттас айнымалылар орналасқан бағандарға нөлдер мен бірлерді жазамыз (мысалы, x_3 негізгі айнымалыға сәйкес жолдың және аттас бағанның қиылысында 1 санын жазамыз, осы бағанның басқа торларына нөлдерді жазамыз);

3. төртінші жаңа жолды бірінші кестедегі осы жолдың элементтерін $a_{41} = 1$ шешуші элементке бөлу арқылы аламыз;

4. кестенің толтырылмаған бос торларын (жұмыс бөлігін) тіктөртбұрыш ережесімен есептеп толтырамыз ($a'_{ij} = a_{ij} - \dfrac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}}$, мұндағы a_{ij}, a_{is}, a_{qj} мәндерін 1-кестеден аламыз, s=1, q =4; мысалы кестенің үшінші жолымен екінші бағанның қиылысуындағы торды толтыру үшін: i=3, j=2, $a_{ij} = a_{32} =1$, $a_{is} = a_{31} =1$, $a_{qj} = a_{42} =1$, $a_{qs} = a_{41} =1$, сонда $a'_{ij} = a'_{32} = a_{ij} - \dfrac{a_{is}a_{qj}}{a_{qs}} = 1 - \dfrac{1\cdot(-1)}{1} = 2$, т.т.):

2-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	19	0	**1**	1	0	0	1	0	19	
x_4	29	0	**5**	0	1	0	-1	0	29/5	
x_5	8	0	**2**	0	0	1	-1	0	4	
x_1	5	1	**-1**	0	0	0	1	0	∞	
x_7	**3**	**0**	**1**	**0**	**0**	**0**	**-1**	**1**	**3**	⇐
F	15	0	**-5**	0	0	0	3	0	max	
			⇑							

Соңғы жолда бір теріс элемент бар, сондықтан алынған шешім тиімді емес. Осыдан екінші баған – шешуші баған болып табылады. Бағалау қатынасы орналасқан бағанды толтырамыз.

Нәтижесінде бесінші жол – шешуші жол болатынына көзімізді жеткіземіз. Осылайша келесі кестені толтырамыз.

3-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	16	0	0	1	0	0	**2**	-1	8	
x_4	14	0	0	0	1	0	**4**	-5	14/4	
x_5	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**-2**	**2**	⇐
x_1	8	1	0	0	0	0	**0**	1	∞	
x_2	3	0	1	0	0	0	**-1**	1	∞	
F	30	0	0	0	0	0	**-2**	5	max	
							⇑			

Алдындағы кестелерді толтырған алгоритмді пайдалана отырып келесі кестеге көшеміз:

4-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7		
x_3	16	0	0	1	0	0	**2**	-1	8	
x_4	14	0	0	0	1	0	**4**	-5	14/4	
x_5	**2**	**0**	**0**	**0**	**0**	**1**	**1**	**-2**	**2**	⇐
x_1	8	1	0	0	0	0	**0**	1	∞	
x_2	3	0	1	0	0	0	**-1**	1	∞	
F	30	0	0	0	0	0	**-2**	5	max	
							⇑			

5-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы
		x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_3	12	0	0	1	0	-2	0	3	
x_4	6	0	0	0	1	-4	0	-13	
x_6	2	0	0	0	0	1	1	-2	
x_1	8	1	0	0	0	0	0	1	
x_2	5	0	1	0	0	1	0	-1	
F	34	0	0	0	0	2	0	1	max

Соңғы жолда теріс элемент жоқ. Яғни тиімділік критерийі орындалады.

Жауабы: $F_{\max} = 34$, $X = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0)$.

Симплекс кестені пайдаланып сызықтық программалаудың минимизациялау есебін шығару барысында да максимизациялау есебін шығарғанымыздағыдай қадамдарды орындаймыз. Тек өзгешелігі – тиімділік критерийінде. Максимизациялау есебінде біз соңғы (F мақсат функциясы орналасқан) жолда теріс элементтерінің болмауын талап етсек, минимизациялау есебінде соңғы жолда оң элементтің болмауын талап етеміз.

2.4. Жасанды базис әдісі

2.2-мысалды шығару барысында кез келген сызықтық программалау есебі үшін жарамды базистік шешімді бірден алу мүмкін бола бермейтініне көзіміз жетті. Осындай жағдайда сызықтық программалау есебін шығару үшін жасанды базис әдісін пайдаланып, симплекс әдісін қолдануға болатындай алдын-ала дайындап алуға болады. Яғни жасанды базис әдісі алғашқы жарамды базистік шешімді табу қиындықтарынан құтылуға мүмкіндік береді.

Жасанды базис әдісінің алгоритмі

1. Есепті канондық түрге келтіреміз.

2. Алғашқы базистік шешімде теріс компонент беретін шектеулер жүйесінің әрбір теңдеуіне теңдік таңбасын өзгертпей, коэффициенттері бірге тең, оң жағындағы бос мүшенің таңбасымен бірдей теріс емес жасанды айнымалыларды енгіземіз.

3. Енгізілген барлық жасанды айнымалыларды, жасанды айнымалылар енгізілмеген теңдіктердегі қосымша айнымалыларды бірінші симплекс кестедегі негізгі айнымалылар бағанына жазамыз.

4. $T = F - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_k)$ – сызықтық функциясын құрамыз, мұндағы $y_1, y_2, ..., y_k$ – енгізілген жасанды айнымалылар, M – еркін алынған үлкен сан, $M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_k)$ – *M функциясы.*

5. $T = F - M \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_k)$ функциясының максимумын іздейміз. Бұл кезде келесі жағдайларды ескеру қажет:

а) егер осы T-есептің тиімді шешімінде барлық жасанды айнымалылар нөлге тең болса, онда бастапқы есептің сәйкес шешімі тиімді болады және мақсат функциялардың экстремумдары тең болады;

ә) егер осы T -есептің тиімді шешімінде жасанды айнымалылардың ең болмағанда біреуі нөлден өзге болса, онда шектеулер жүйесі үйлесімді емес болғандықтан бастапқы есептің шешімі тиімді болмайды;

б) егер *T*-есептің тиімді шешімі жоқ болса, онда бастапқы есептің де тиімді шешімі болмайды;

в) егер *T*-есептің максимумы шексіздікке тең болса, онда бастапқы есеп те шешілмейтін болып табылады, және не бастапқы есептің максимумы шексіздікке тең болады, не есептің шарты қайшылықта болып келеді.

Егер негізгі айнымалылар бағанында жасанды айнымалылар жоқ болса, онда олар әрі қарай есептеулерде қолданылмайды, яғни барлық айнымалылар жазылған бағандардан жасанды айнымалыларды алып тастаймыз.

6. Есепті әрі қарай симплекс кестенің көмегімен шығарамыз.

Практикада негізінен *M* функциясының минимумын табудың орнына (–*M*) функциясының максимумы ізделінеді.

2.7-мысал.

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1, 5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to \min$$

сызықтық функциясының минимум мәнін табу керек.

Шығарылуы. Бұл мысалды біз симплекс әдісін пайдаланып (2.2-мысал) шығарған болатынбыз. Ол кезде алғашқы базистік шешім жарамды емес болды да, біз есепті түрлендіріп, базистік шешім жарамды болатындай түрге келтірдік. Енді осы есептің жарамды базистік шешімін жасанды базис әдісін пайдаланып шығарайық.

Есепті канондық түрге келтіреміз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 = 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 - y_7 = 2 \end{cases}$$

Негізгі айнымалылар ретінде y_6, y_7 айнымалыларын қарастыруға болады. Базистік шешімде екі теріс компонент бар. Сондықтан, z_1 және z_2 жасанды айнымалыларды қосамыз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 - y_6 + z_1 = 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 - y_7 + z_2 = 2 \end{cases}$$

$$T = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 - M(z_1 + z_2) \to \min$$

M функциясының минимумын табудың орнына (–*M*) функциясының максимумын табамыз:

1-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z_1	z_2	Бағалау қатынасы	
z_1	3	-1	**-1**	1	1	1	-1	0	1	0	3	
z_2	**2**	**2**	**4**	1	**-1**	**0**	**0**	**-1**	**0**	**1**	**1/2**	⇐
F	0	14	**34**	13	5	8	0	0	0	0	max	
$M_Ф$			**-5** M	-2 M	0	- M	M	M				
			⇑									

Бағалау қатынасынан көріп отырғанымыздай екінші жол шешуші жол болып табылады $\left(\min\left\{3, \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}\right)$. Базистегі z_2 айнымалысының орнына y_2 айнымалысын жазамыз да, z_2 бағанын жазбай тастап кетеміз. Бір жасанды айнымалыдан құтылдық.

2-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	z_1	Бағалау қатынасы	
z_1	**5/2**	**-3/2**	**0**	**3/4**	**5/4**	**1**	**-1**	**1/4**	**1**	**2**	⇐
y_2	1/2	1/2	1	1/4	**-1/4**	0	0	-1/4	0	∞	
F	-17	-3	0	9/2	**27/2**	8	0	17/2	0	max	
$M_Ф$		3/2 M	0	-3/4 M	**-5/4** M	- M	M	-1/4 M	0		
					⇑						

Бірінші жол – шешуші жол $(\min\{2, \infty\} = 2)$. Базистегі z_1 айнымалысының орнына y_4 айнымалысын жазамыз да, z_1 бағанын жазбаймыз. Жасанды айнымалылардан құтылдық. Соңғы жол жазылмайды. Әрі қарай симплекс кестені жалғастырамыз.

3-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_4	2	-6/5	0	**3/5**	1	4/5	-4/5	1/5	10/3	
y_2	**1**	**1/5**	**1**	**2/5**	**0**	**1/5**	**-1/5**	**-1/5**	**5/2**	⇐
F	-44	66/5	0	**-18/5**	0	-14/5	54/5	29/5	max	
				⇑						

Соңғы жолда теріс элементтер бар, яғни тиімділік критерийі орындалмайды. Модулі бойынша ең үлкен теріс элемент орналасқан баған – шешуші баған.

4-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_4	**1/2**	**-3/2**	**-3/2**	**0**	**1**	**1/2**	**-1/2**	**1/2**	**1**	⇐
y_3	5/2	1/2	5/2	1	0	**1/2**	-1/2	-1/2	5	
F	-35	15	9	0	0	**-1**	9	4	max	
						⇑				

Соңғы жолда бір теріс элемент бар, тиімділік критерийі орындалмайды.

5-кесте

Базис	Бос мүше	Айнымалылар							Бағалау қатынасы	
		y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7		
y_5	1	-3	-3	0	2	**1**	-1	1	1	
y_3	2	2	4	1	-1	**0**	0	-1	-1	⇐
F	-34	12	6	0	2	**0**	8	5	5	

Соңғы жолда теріс элемент жоқ, демек, тиімділік критерийі орындалады.

Жауабы: $F_{\max} = -34$, $Z_{\min} = -F_{\max}$, $Z_{\min} = 34$,

$$Y = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0).$$

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Симплекстің анықтамасын беріңіз.

2. Симплекс әдісінің негізгі идеясы.

3. Сызықтық программалау есебін симплекс әдісімен шығару алгоритмі.

4. Симплекс әдісінде кездесетін ерекше жағдайлар.

5. Сызықтық программалау есебін симплекс кестенің көмегімен шығару алгоритмі.

6. Симплекс әдісін, симплекс кестені қай жағдайларда қолданған ыңғайлы?

7. Шешуші жол, шешуші баған, шешуші элемент ұғымдарын беріңіз.

8. Сызықтық программалау есебін симплекс әдісімен, симплекс кестемен шығарған кездегі тиімділік критерийлері.

9. Жасанды базис әдісінің алгоритмі.

10. *T* функциясы қалай құрылады?

11-15 есептеріндегі берілген сызықтық программалау есептерін

а) симплекс әдісімен;

ә) симплекс кестемен шығару керек.

11. $F(X) = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 11x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 180, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 160. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4}$$

12. $F(X) = 2000 - 6x_1 - 12x_2 - 9x_3 - 8x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 133, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 168, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 140. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4}$$

13. $F(X) = 17 + 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 \le 7, \\ -2x_1 + 4x_2 \le 12, \\ -5x_1 + 3x_2 + 8x_3 \le 10. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 3}$$

14. $F(X) = x_1 - 6x_2 + 4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \le 16, \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 \le 24, \\ 3x_1 - x_2 \le 18. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 4}$$

15. $F(X) = 2x_1 + 3x_2 + x_3 + 2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \leq 8, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_4 \leq 6, \\ x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 \leq 16. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 4}$$

16-20 есептеріндегі берілген сызықтық программалау есептерін жасанды базис әдісін пайдаланып, симплекс кестенің көмегімен шығару керек.

16. $F(X) = 15x_1 + 12x_2 - 8x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \leq 50, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 60, \\ 5x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 10. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 3}.$$

17. $F(X) = -6x_1 - 8x_2 \to \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 + x_3 = 20, \\ 12x_1 + 6x_2 + x_3 = 72. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 3}.$$

18. $F(X) = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 5x_4 - 2x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_5 = 7, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 30, \\ x_1 + x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 11. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, 5}.$$

19. $F(X) = -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 - x_5 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ -x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_2 + x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

20. $F(X) = x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 3x_5 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 5, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 2x_5 = 13, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 = 7. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,5}.$$

3.1. Сызықтық программалаудың қосжақты есептерінің құрылымы және олардың қасиеттері

Сызықтық программалау теориясында әрбір бастапқы (тура) есепке қосжақты есепті сәйкес қоюға болатын қосжақтылық теориясы маңызды рөлді атқарады.

Тура есепке және қосжақты есепке ортақ мәселелер – есептің әрқайсысында

а) сызықтық функцияның экстремумы ізделінеді;

ә) ізделінді айнымалылар шектеулер жүйесін қанағаттандыруы керек. Сонымен қатар екі есепте де шектеулер жүйесіндегі айнымалыларының коэффициенттерінен тұратын A матрицасының, бос мүшелерден тұратын B векторының, сызықтық функциясының коэффициенттерінен тұратын C векторының элементтері пайдаланылады.

Ал тура есеппен және қосжақты есептің айырмашылығын *өзара қосжақты есептердің қасиеттері* ретінде беруге болады:

1^0. Бір есепте сызықтық функцияның максимумы ізделінсе, екіншісінде минимумы ізделінеді.

2^0. Бір есептегі сызықтық функцияның айнымалыларының коэффициенттері екіншісіндегі шектеулер жүйесінің бос мүшелері болып табылады.

3^0. Есептің әрқайсысы стандарттық түрде берілген, және максимизациялау есебінде барлық теңсіздіктер «$\le$» түрінде беріледі, ал минимизациялау есебінде барлық теңсіздіктер «$\ge$» түрінде беріледі.

4^0. Екі есептің шектеулер жүйесіндегі айнымалылардың коэффициенттерінен құралған матрица бір біріне транспонирленген болып табылады.

Бастапқы есеп үшін: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, қосжақты есеп үшін: $A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$

5^0. Бір есептегі шектеулер жүйесінің теңсіздіктер саны екінші есептегі айнымалылар санымен өзара тең.

6^0. Айнымалылардың теріс еместік шарты екі есепте де бар.

Осы көрсетілген қасиеттерді қамтитын сызықтық программалаудың есептері *симметриялы өзара қосжақты есептер* деп аталады.

Бастапқы есеп	**Қосжақты есеп**
$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \le b_m \end{cases}$ (3.1) шектеулер жүйесін қанағаттандыратындай, $x_j \ge 0 \ (j = 1, 2, \dots, n)$ (3.2) теріс еместік шарты орындалатындай $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n \to \max$ (3.3) сызықтық функция максимум мәнін қабылдайтындай $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$-табу керек .	$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \dots + a_{m1}y_m \ge c_1, \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \dots + a_{m2}y_m \ge c_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \dots + a_{mn}y_n \ge c_n \end{cases}$ (3.4) шектеулер жүйесін қанағаттандыратындай, $y_i \ge 0 \ (i = 1, 2, \dots, m)$ (3.5) теріс еместік шарты орындалатындай $Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \dots + b_my_m \to \min$ (3.6) сызықтық функция минимум мәнін қабылдайтындай $Y = (y_1, y_2, \dots, y_m)$-табу керек.

Берілген есепке қосжақты есепті құрудың алгоритмі

1. Бастапқы есептің шектеулер жүйесінің барлық теңсіздіктерін бір мағынаға келтіру керек: егер бастапқы есепте сызықтық функцияның максимумы ізделінсе, онда шектеулер жүйесінің барлық теңсіздіктерін «$\le$» түріне, ал егер минимумы ізделінсе «$\ge$» түріне келтіру керек. Егер осы айтылған талап орындалмайтындай теңсіздік кездессе, онда оны (–1)-ге көбейту керек.

2. Жүйенің A_1 кеңейтілген матрицасын құрамыз. Бұл матрицаға A матрицасындағы айнымалылардың коэффициенттері, шектеу-

лер жүйесінің бос мүшелер бағаны және сызықтық функциядағы айнымалылардың коэффициенттерінен тұратын жол енгізіледі.

3. A_1 матрицасына транспонирленген матрицасын табу керек.

4. Алынған A_1^T матрицасының және айнымалылардың теріс еместік шартының негізінде қосжақты есепті құрамыз.

3.1-мысал.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

сызықтық программалау есебіне қосжақты есеп құру керек.

Шығарылуы.

1. Бастапқы есеп максимум табуға арналған. Сондықтан шектеулер жүйесіндегі теңсіздіктер «$\leq$» түрінде болуы керек. Берілген есепте бірінші теңсіздіктің таңбасы «$\geq$», оны «$\leq$» түріне келтіру үшін (–1)-ге көбейтеміз.

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \leq 14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

2. Жүйенің кеңейтілген матрицасын құрамыз:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 14 \\ 1 & 4 & 34 \\ 1 & 1 & 13 \\ 1 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & F \end{pmatrix}$$ (соңғы жол – мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттері, соңғы баған – бос мүшелер бағаны).

3. A_1 матрицасына транспонирленген A_1^T матрицасын жазамыз:

$$A_1^T = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 14 & 34 & 13 & 5 & 0 & Z \end{pmatrix}$$ (соңғы жол – бос мүшелер, соңғы баған – мақсат функциясының айнымалыларының коэффициенттер бағаны).

4. A_1^T матрицасының негізінде қосжақты есепті құрамыз:

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to \min .$$

Жауабы. $$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0,\ i = \overline{1,5}$$

шектеулеріндегі

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to \min .$$

3.2. Қосжақтылықтың негізгі теоремалары

Өзара қосжақты есептер берілсін.

Теорема 3.1 (*қосжақтылық теориясының негізгі теңсіздігі*). Кез келген бастапқы есептің жарамды $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$ шешімдері және қосжақты есептің жарамды $Y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ шешімдері үшін келесі теңсіздік ақиқат:

$$F(X) \le Z(Y) \text{ немесе } \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \le \sum_{i=1}^{m} b_i y_i . \quad (3.7)$$

Теорема 3.2 (*тиімділіктің жеткілікті белгісі немесе Канторовичтің тиімділік критерийі*).

Егер $X^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ және $Y^* = (y_1^*, y_2^*, ..., y_m^*)$ үшін

$$F(X^*) = Z(Y^*) \quad (3.8)$$

теңдігі орындалатындай өзара қосжақты есептердің жарамды шешімдері болса, онда X^* – бастапқы есептің, ал Y^* – қосжақты есептің тиімді шешімі болады.

Қосжақтылықтың бірінші (негізгі) теоремасы.

Теорема 3.3 (*бірінші теорема – жарамды шешімнің тиімділігінің қажетті белгісі*). Егер өзара қосжақты есептердін біреуінің тиімді шешімі бар болса, онда екіншісінің де тиімді шешімі бар болады, және олардың сызықтық функциясының тиімді мәндері өзара тең болады:

$$F_{\max} = Z_{\min} \text{ немесе } F(X^*) = Z(Y^*). \quad (3.9)$$

Егер өзара қосжақты есептердің біреуінің сызықтық функциясы шектелмеген болса, онда екіншісінің жарамды шешімі болмайды.

3.3-теорема (3.8) теңдіктің тек қана шешімнің тиімділігінің жеткілікті белгісін көрсетіп қоймай, сонымен қатар өзара қосжақты есептердің шешімінің тиімділігінің қажетті белгісі болып табылатынын да көрсетеді.

Қосжақтылықтың екінші теоремасы

Өзара қосжақты есептер берілсін: (3.1)-(3.3) – бастапқы есеп, (3.4)-(3.6) – қосжақты есеп. Осы есептерді симплекс әдіспен шығару үшін осы есептің әрқайсысын канондық түрге келтіру керек. Ол үшін бастапқы есептің (3.1) шектеулер жүйесіне m теріс емес $x_{n+1}, x_{n+2}, ..., x_{n+i}, ..., x_{n+m}$ – айнымалыларын қосамыз, ал қосжақты есептің (3.4) шектеулер жүйесіне n теріс емес $y_{m+1}, y_{m+2}, ..., y_{m+j}, ..., y_{m+n}$ айнымалыларын қосамыз, мұндағы $i\,(j) - x_{n+i} \ge 0$ ($y_{m+j} \ge 0$) қосымша айнымалысы енгізілген теңсіздік нөмірі. Сонда өзара қосжақты есептің әрқайсысының шектеулер жүйесі мына түрде жазылады:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{n+i} = b_i,\ i = 1, 2, ..., m, \tag{3.10}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i - y_{m+j} = c_j,\ j = 1, 2, ..., n. \tag{3.11}$$

Қосжақты есептердің біреуінің бастапқыда берілген айнымалылары мен екіншісінің қосымша айнымалыларының арасындағы сәйкестікті орнатайық:

Бастапқы есептің айнымалылары	
Бастапқы айнымалылар	Қосымша айнымалылар
$x_1 \quad x_2 \ \dots \ x_j \ \dots \ x_n$	$x_{n+1} \quad x_{n+2} \ \dots x_{n+i} \dots x_{n+m}$
$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$	$\updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow \quad \updownarrow$
$y_{m+1} \quad y_{m+2} \dots y_{m+j} \dots y_{m+n}$	$y_1 \quad y_2 \ \dots \ y_i \ \dots \ y_m$
Қосымша айнымалылар	Бастапқы айнымалылар
Қосжақты есептің айнымалылары	

(3.12)

Теорема 3.4. Өзара қосжақты есептердің біреуінің тиімді шешімінің оң (нөлдік емес) компоненттері екінші есептің тиімді шешімінің нөлдік компоненттеріне сәйкес келеді, яғни кез келген $i = 1, 2, ..., m$, $j = 1, 2, ..., n$ үшін:

$$\text{егер } x_j^* > 0 \text{ болса, онда } y_{m+j}^* = 0;$$

$$\text{егер } x_{n+i}^* > 0 \text{ болса, онда } y_i^* = 0;$$

$$\text{егер } y_i^* > 0 \text{ болса, онда } x_{n+i}^* = 0;$$

$$\text{егер } y_{m+j}^* > 0 \text{ болса, онда } x_j^* = 0.$$

Осы теоремадан келесі маңызды қорытынды алынады: өзара қосжақтылық есептерінің айнымалыларының арасындағы енгізілген (3.12) сәйкестік оптимумға жеткен кезде (яғни әрбір есепті симплекс әдіспен шешкен кезде соңғы қадамда) қосжақтылық есептерінің біреуінің негізгі айнымалылары (нөлге тең емес) мен екіншісінің негізгі емес айнымалылары (нөлге тең) жарамды базистік шешімді берген кезде олардың арасындағы сәйкестікті береді.

3.4-теорема келесі теореманың салдары болып табылады.

Теорема 3.5 (*қосжақтылықтың екінші теоремасы*). Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері бастапқы есептің тиімді шешімінің негізгі емес айнымалылары арқылы өрнектелген сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттерінің абсолют мәніне тең.

3.4-теореманы қосжақтылық теориясының екінші теоремасы ретінде қарастыруға болады.

Ескерту. Егер өзара қосжақты есептің біреуінің тиімді шешімінің жалғыздығы жойылса, онда екіншісінің тиімді шешімі өзгеше болады.

Қосжақтылық теориясының теоремаларының көмегімен бастапқы есепті симплекс әдіспен шығарып, бастапқы есепке қосжақты есептің оптимумын және тиімді шешімін табуға (қосжақты есепті шығармай) болады.

Алдымен қосжақты есеп симплекс әдіспен шығарылып, одан кейін бастапқы есептің оптимумы және тиімді шешімі қосжақтылық теориясының теоремаларының көмегімен анықталатын әдіс *қосжақты симплекс әдісі* деп аталады. Бастапқы есептің алғашқы базистік шешімі жарамды емес болса, немесе, мысалы, оның m шектеулер саны n айнымалылар санынан артық болған жағдайда осы әдісті қолданған ыңғайлы.

Қосжақтылықтың үшінші теоремасы

Теорема 3.6. Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері $F_{\max}(b_1, b_2, ..., b_m)$ сызықтық функцияның сәйкес аргументтері бойынша дербес туындыларының мәндеріне тең, яғни

$$\frac{\partial F_{\max}}{\partial b_i} = y_i^*, \; i = 1, 2, ..., m.$$

3.2-мысал.

Екі өзара қосжақты есеп берілсін:

I-есеп **II-есеп**

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \geq -14 \\ x_1 + 4x_2 \leq 34 \\ x_1 + x_2 \leq 13 \\ x_1 - x_2 \leq 5 \\ x_1 \leq 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 - y_4 \geq 2 \end{cases}$$

$$y_i \geq 0, \; i = \overline{1, 4}$$

шектеулеріндегі

$x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$

шектеулеріндегі

$$F = 3x_1 + 2x_2 \to \max$$

$$Z = 14y_1 + 34y_2 + 13y_3 + 5y_4 + 8y_5 \to \min$$

сызықтық программалау есептерін шығару керек.

Шығарылуы.

Осы есептерге жоғарыда берілген теориялық мәліметтерді қолданып, талдау жүргіземіз.

I-есептің шешімі (2.1-мысал) $F_{\max} = 34$, II-есептің шешімі (2.2-мысал) $Z_{\min} = 34$, яғни қосжақтылықтың *бірінші теоремасының* бірінші бөлігі орындалады.

(3.12) өрнектің негізінде *айнымалылардың арасындағы сәйкестікті* орнатамыз:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & x_2 & & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 \\ \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ y_6 & y_7 & & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_5 \end{array}$$

I есеп үшін

$$F = 34 - 2x_5 - x_7,\ X^* = (8, 5, 12, 6, 0, 2, 0); \qquad (3.13)$$

II есеп үшін

$$F = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 2y_4 + 8y_6 + 5y_7,$$
$$Y^* = (0, 0, 2, 0, 1, 0, 0). \qquad (3.14)$$

Қосжақты есептің тиімді шешімінің компоненттері

$$y_1^* = 0,\ y_2^* = 0,\ y_3^* = 2,\ y_4^* = 0,\ y_5^* = 1,\ y_6^* = 0,\ y_7^* = 0$$
$$F = 34 - 0 \cdot x_3 - 0 \cdot x_4 - 2x_5 - 0 \cdot x_6 - x_7$$

түріне келтіруге болатын (3.13) сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттеріне (абсолют шамасы бойынша) тең, ал бастапқы есептің тиімді шешімінің компоненттері

$$x_1^* = 8,\ x_2^* = 5,\ x_3^* = 12,\ x_4^* = 6,\ x_5^* = 0,\ x_6^* = 2,\ x_7^* = 0$$
$$Z = 34 + 12y_1 + 6y_2 + 0 \cdot y_3 + 2y_4 + 0 \cdot y_5 + 8y_6 + 5y_7$$

түріне келтіруге болатын (3.14) сызықтық функциясының сәйкес айнымалыларының коэффициенттеріне (абсолют шамасы бойынша) тең. Осылайша қосжақтылықтың екінші теоремасының да орындалатынына көз жеткізуге болады.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Өзара қосжақты есептердің қасиеттері.

2. Симметриялы өзара қосжақты есептер.

3. Берілген есепке қосжақты есепті құрудың алгоритмі.

4. Қосжақтылық теориясының негізгі теңсіздігі.

5. Канторовичтің тиімділік критерийі.

6. Қосжақтылықтың бірінші теоремасы.

7. Қосжақтылықтың екінші теоремасы.

8. Қосжақтылықтың үшінші теоремасы.

9. Қосжақты симплекс әдісі.

10. I және II есептердің сәйкес негізгі және негізгі емес айнымалылардың арасындағы сәйкестіктік.

11-15 сызықтық программалау есептерін бастапқы есеп ретінде қарастырып, оларға қосжақты есеп құру керек. Шығарылған бастапқы есептің нәтижелерінің (2-тарауда берілген) көмегімен қосжақтылық теорияларын пайдаланып құрылған қосжақты есептің нәтижелерін алып, талдау жүргізу керек.

11. $F(X) = 10x_1 + 12x_2 + 14x_3 + 11x_4 \to \max$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \le 100, \\ 2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 180, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 \le 160. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4}.$$

12. $F(X) = 2000 - 6x_1 - 12x_2 - 9x_3 - 8x_4 \to \min$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \le 133, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 \le 168, \\ 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 \le 140. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ j = \overline{1, 4}.$$

13. $F(X)=17+2x_1-3x_2+2x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 4x_1-3x_2+2x_3 \le 7, \\ -2x_1+4x_2 \le 12, \\ -5x_1+3x_2+8x_3 \le 10. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,3}.$$

14. $F(X)=x_1-6x_2+4x_3 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3 \le 16, \\ -x_1-2x_2+x_4 \le 24, \\ 3x_1-x_2 \le 18. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,3}.$$

15. $F(X)=2x_1+3x_2+x_3+2x_4 \to \max$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2+2x_3+x_4 \le 8, \\ 2x_1+x_2+2x_4 \le 6, \\ x_1+4x_2+2x_3+3x_4 \le 16. \end{cases}$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,4}.$$

4.1. Тасымалдау есебінің қойылуы және оның математикалық моделі

Өндіріс көлемі $a_1, a_2, \ldots, a_m$ болатын біртекті өнім өндіретін m өндіріс кешені, тұтыну көлемі $b_1, b_2, \ldots, b_n$ болатын n тұтыну кешені берілсін. *Тарифтер* (өндіріс шығындары немесе тасымалдау шығындары) *матрицасы* берілсін:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{m1} & c_{m2} & \ldots & c_{mn} \end{pmatrix}$$

мұндағы, c_{ij} – i-ші жабдықтаушыдан j-ші тұтынушыға жүк бірлігін жеткізуге жұмсалатын құн, *шығын коэффициенті* деп аталады.

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \ldots & x_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1} & x_{m2} & \ldots & x_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасы *тасымалдау есебінің жоспары* деп аталады, x_{ij} – i-ші жабдықтаушыдан j-ші тұтынушыға жеткізілетін жүк мөлшері.

Тасымалдау жоспарын жүзеге асыратын *жалпы қосынды шығынды* төмендегі мақсат функциясы түрінде беруге болады:

$$F = c_{11}x_{11} + \ldots + c_{1j}x_{1j} + \ldots + c_{1n}x_{1n} + \ldots + c_{i1}x_{i1} + \ldots + c_{ij}x_{ij} +$$

$$+ \ldots + c_{in}x_{in} + \ldots + c_{m1}x_{m1} + \ldots + c_{mj}x_{mj} + \ldots + c_{mn}x_{mn}.$$

Осы айтылғандардың барлығын біріктіріп, бір кестеге жазайық:

Жабдық-таушылар	Жабдықтау-шылардың қуаттылығы	Тұтынушылар және олардың сұраныстары				
		1	…	j	…	n
		b_1	…	b_j	…	b_n
1	a_1	c_{11} x_{11}	…	c_{1j} x_{1j}	…	c_{1n} x_{1n}
…	…	…	…	…	…	…
i	a_i	c_{i1} x_{i1}	…	c_{ij} x_{ij}	…	c_{in} x_{in}
…	…	…	…	…	…	…
m	a_m	c_{m1} x_{m1}	…	c_{mj} x_{mj}	…	c_{mn} x_{mn}

Қорытындылай келгенде тасымалдау есебінің математикалық моделі былайша қойылады: әрбір «жабдықтаушы-тұтынушы» жұбы үшін

1. барлық жабдықтаушылардың қуаттылығы толығымен жүзеге асырылатындай (қуаттылық бойынша шектеулер, жол бойынша баланс теңдеуі):

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \ i = \overline{1, m}; \tag{4.1}$$

2. барлық тұтынушылардың сұраныстары орындалатындай (сұраныстар бойынша шектеулер, баған бойынша баланс теңдеуі):

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \ j = \overline{1, n}; \tag{4.2}$$

3. тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын ең аз болатындай:

$$F = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min, \tag{4.3}$$

$$x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}$$

тасымалдау көлемін табу керек.

Тасымалдау есебінің экономикалық-математикалық моделінің ерекшеліктері:

• шектеулер жүйесі – теңдеулер жүйесі (яғни тасымалдау есебі канондық түрде берілген);

• шектеулер жүйесіндегі айнымалылардың коэффициенттері бірге немесе нөлге тең;

• әрбір айнымалы шектеулер жүйесіне екі реттен – бір рет (4.1) жүйесіне және бір рет (4.2) жүйесіне енеді.

4.2. Жабық модельдегі тасымалдау есебі

Тасымалдау есебінің екі түрі кездеседі: егер жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығы тұтынушылардың жалпы сұранысына тең болса, онда мұндай түрде берілген есеп *жабық модельді тасымалдау есебі* деп аталады:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \,, \tag{4.4}$$

кері жағдайда, $\sum\limits_{i=1}^{m} a_i \neq \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$, яғни қуаттылық пен сұраныс арасында баланс жоқ болса, *ашық модельді тасымалдау есебі* деп аталады.

Теорема 4.1. (4.4) шарты орындалған жағдайда тасымалдау есебінің матрицасының ((4.1), (4.2) теңдеулер жүйесінің) рангі теңдеулер санынан бірге кем, яғни

$$r(A) = m + n - 1 \,.$$

4.1-теореманы ескерсек, әрбір кестеде тірек жоспарының $m + n - 1$ – мәнінен артық емес толтырылған (базистік) торлар, ал қалғандары бос торлар болуы керек.

Тасымалдау есебінің математикалық моделі сызықтық программалау есебіне жатады және оны симплекс әдіспен шығаруға болады. Әйтсе де, осы есептің практикалық маңыздылығы мен (4.1)-(4.3) шектеулерінің ерекшеліктерін: шектеулер теңдік түрінде берілген; әрбір айнымалы тек қана екі теңдеуде кездеседі; айнымалылардың коэффициенттері бірге немесе нөлге тең болатынын ескере отырып оны шешу үшін арнайы алгоритмдер дайындалған.

Жабық модельдегі тасымалдау есебін шешу алгоритмі

1. Алғашқы жарамды базистік шешімді (бірінші тірек жоспарын) табу керек;

2. Тірек жоспарын жақсартатын (әрбір жаңа жоспарда жалпы шығын артпау керек) итерация тізбегін құру керек;

3. Шешімнің тиімділігін тексеру керек:

3.1. шешім тиімді болса, есептеулер тоқтатылады;

3.2. егер шешім тиімді болмаса, алдыңғысына қарағанда тиімді шешімге жақын жаңа тірек жоспарға көшу қажет;

3.3. алгоритмнің 2-қадамына көшу керек.

4.3. Алғашқы базистік шешімді табу

4.3.1. «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісі

Диагональ әдісі немесе «солтүстік-батыс» бұрыш әдісі. Бұл әдісте алғашқы тірек жоспарды құрған кезде кестенің қалған бөлігінің жоғарғы сол жақ торынан («солтүстік-батыс» бұрышы) бастап толтырылады. Кестені осындай әдіспен толтыру барысында x_{11} айнымалысы орналасқан тордан басталады да соңғы x_{mn} айнымалысы орналасқан торды, яғни кестенің диагоналы бойынша толтырылған сияқты толтырумен аяқталады.

Бастапқы тірек шешімін диагональ әдісімен анықтаған кезде c_{ij} шығын шамасы ескерілмейтіндіктен тиімді шешімнен қашықтау болады. Сондықтан, тиімді жоспарға жету мақсатында есептеулер үшін көптеген итерация саны талап етілуі мүмкін.

4.1-мысал.

A_1, A_2, A_3 қоймаларына сәйкес 120 т, 180 т және 230 т көлемінде жүк түсіріледі. Осы жүкті бес тұтынушыға: 70 т – B_1 тұтынушыға, 120 т – B_2 тұтынушыға, 105 т – B_3 тұтынушыға, 125 т – B_4 тұтынушыға, 110 т – B_5 тұтынушыға жеткізу керек. 1 т жүкті қоймадан тұтынушыға жеткізу үшін жұмсалатын шығын (ақша бірлігі) C матрицасымен берілген:

$$C = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 17 & 5 & 3 \\ 21 & 10 & 7 & 11 & 6 \\ 3 & 5 & 8 & 4 & 9 \end{pmatrix}.$$

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісін пайдаланып берілген тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімін табу керек.

Шығарылуы. $\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$ қатынасы орындалатындықтан есебіміз – жабық модельдегі тасымалдау есебі болып табылады. Бастапқы берілгендерді кестеге жазамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5	3	120
A_2	21	10	7	11	6	180
A_3	3	5	8	4	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	530 / 530

Кестені солтүстік-батыс бұрышынан, яғни сол жақтағы жоғарғы тордан бастап толтырамыз:

1. $x_{11} = \min\{120, 70\} = 70$. B_1 тұтынушыға қажетті жүк жеткізілді, сондықтан ол бағанды біз әрі қарай қарастырмаймыз.

2. Келесі солтүстік-батыс бұрышы – x_{12} торы. $x_{12} = \min\{120 - 70, 120\} = 50$ (120–70 – себебі, A_1 қоймадан бірінші тұтынушыға 70т жүк жеткізілген болатын). A_1 қоймада жүк қалған жоқ, демек ол жол қарастырылмайды және штрих сызықпен сызылды.

Әрі қарай кестенің қалған торларын толтыруда есептеулерді осылай жалғастырамыз:

3. $x_{22} = \min\{180, 120 - 50\} = 70$, 2-баған қарастырылмайды.

4. $x_{23} = \min\{180 - 70, 105\} = 105$, 3-баған қарастырылмайды.

5. $x_{24} = \min\{180 - 70 - 105, 125\} = 5$, 2-жол қарастырылмайды.

6. $x_{34} = \min\{230, 125 - 5\} = 120$, 4-баған қарастырылмайды.

7. $x_{44} = \min\{230 - 120, 110\} = 110$, кесте толығымен толтырылды.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Кестеде тұтас сызық арқылы толтырылған торлар, үзік сызықтар арқылы қарастырылмайтын (толтырылмаған) торлар белгіленді.

Жауабы: Келесі базистік жоспар алынды:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 70 & 50 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 70 & 105 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 120 & 110 \end{bmatrix}.$$

Алынған бастапқы базистік шешімде толтырылған торлар саны $m+n-1=5+3-1=7$ -ге, яғни негізгі айнымалылар санына тең.

Осы әдіс бойынша бастапқы шешімді анықтаған кезде соңғы қадамнан басқа әрбір қадамда не баған, не жол қарастырылмайтын болды. Ал соңғы қадамда бірден соңғы жол мен соңғы баған толығымен толтырылады. Сондықтан, толтырылған торлар саны тасымалдау кестесінің жолдары мен бағандарының жалпы санынан бірге кем. «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісінің осы ерекшелігі – алынған үлестіру базистік болып табылатындығын білдіреді.

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісінің негізгі кемшілігі шығын коэффициенттерінің мәндерін ескермей тасымалдау кестесін толтыру болып табылады.

4.3.2. Ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісі

Бұл әдісте кестені толтырудың әрбір қадамында c_{ij} шығын шамасының ең аз мәні ескеріліп, кесте осы шама орналасқан тордан бастап толтырылады. Егер мұндай тор жалғыз болмаса, яғни кестеде ең кіші элемент бірнеше рет кездессе, онда тігінен немесе көлденеңінен c_{ij} шамасының ең үлкен мәні орналасқан тордан бастап толтырған ыңғайлы, әйтсе де, олардың кез келгенінен бастап толтыра беруге болады.

Теорема 4.2. Кестені толтырудың әрбір қадамында (соңғысынан өзге) не бір жол, не бір баған қарастырылудан шығатындай бір тор пайда болады.

Егер жоспарда базистік торлардың саны $m+n-1$ – шамасынан аз болса, онда ол *өзгеше жоспар* деп аталады.

Егер тасымалдау есебін шығару барысында өзгеше жоспар пайда болса, онда тордың жетіспейтін санына 0-ді жазып, оны базистік деп есептеу керек. Осы қосымша торларға нөлдік тасымалдау жауап беретіндіктен жалпы баланспен жоспарды тасымалдаудың жалпы құны өзгермейді. Дегенмен, торларды еркін түрде таңдай отырып толтыруға болмайды.

4.2-мысал.

Жоғарыда қарастырған 4.1-мысалды ең кіші элемент әдісімен шығару керек.

Шығарылуы.

1. Тасымалдау кестесінде ең кіші элемент – 3-ке тең және кестеде ол екі жерде кездеседі: $c_{15}=3$, $c_{31}=3$. Мұндай жағдайда (бірнеше ең кіші элемент кездессе) біз үшін көп көлемде жүкті жіберетін жағдайды таңдаған дұрыс: $c_{15}=3$ тарифы үшін 110 т жіберіледі, $c_{31}=3$ тарифы үшін 70 т жіберіледі, демек c_{15} тарифы орналасқан торды толтырудан бастаған ыңғайлы, $x_{15}=\min\{120, 110\}=110$. Әрі қарай 5-баған қарастырылмайды.

2. $c_{31}=3$, $x_{31}=\min\{230, 70\}=70$, 1-баған қарастырылмайды.

3. Келесі ең кіші элемент 4-ке тең. $c_{34}=4$, $x_{34}=\min\{230-70, 125\}=125$, 4-баған қарастырылмайды.

4. Келесі ең кіші элемент 5-ке тең. $c_{32}=5$, $x_{32}=\min\{230-70-125, 120\}=35$. (3,2) торын толтырамыз, 3-жол қарастырылмайды.

5. Ең кіші элемент – 7-ге тең, $c_{23}=7$, $x_{23}=\min\{180, 105\}=105$, 3-баған қарастырылмайды.

6. Ең кіші элемент – 8-ге тең, $c_{12}=8$, $x_{12}=\min\{120-110, 120-35\}=10$, 1-жол қарастырылмайды.

7. Келесі ең кіші элемент және соңғы толтырылмаған тор $c_{22}=10$, $x_{22}=\min\{180-105, 120-10-35\}=75$, кесте толығымен толтырылды.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 10	17	5	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 35	8	4 / 125	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Жауабы: Ең кіші элемент әдісінің көмегімен жабық типтегі тасымалдау есебінің келесі базистік жоспары алынды:

$$X_0 = \begin{bmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 110 \\ 0 & 75 & 105 & 0 & 0 \\ 70 & 35 & 0 & 125 & 0 \end{bmatrix}.$$

Бұл әдіспен шығарған кезде де толтырылған торлар саны $m+n-1=5+3-1=7$ -ге тең.

Екі әдіспен алынған алғашқы базистік шешімдегі үлестірулерді салыстырайық. Осы үлестірулердің әрқайсысы үшін ақша бірлігімен анықталатын жалпы шығынды есептейміз.

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісімен анықталған базистік шешім үшін:

$$F_0 = 14\cdot 70 + 8\cdot 50 + 10\cdot 70 + 7\cdot 105 + 11\cdot 5 + 4\cdot 120 + 9\cdot 110 = 4340.$$

Ең кіші элемент әдісімен анықталған базистік шешім үшін:

$$F_0 = 8\cdot 10 + 3\cdot 110 + 10\cdot 75 + 7\cdot 105 + 3\cdot 70 + 5\cdot 35 + 4\cdot 125 = 2780.$$

Осы алынған мәндерден ең кіші элемент әдісімен анықталған базистік шешім тиімді екенін көреміз.

4.4. Базистік шешімнің тиімділік критерийі

Тасымалдау есебінде еркін алынған x_{ij} айнымалысы тасымалдау кестесінің (i, j) торына сәйкес элементімен теңестіріледі. F сызықтық функциясының өрнегіндегі x_{ij} бос айнымалыдағы β_{ij} коэффициенті (i, j) *бос торының бағасы* деп аталады. Сонда тиімділік критерийі былайша қойылады: *барлық бос торлардың бағалары теріс емес болған жағдайда ғана тасымалдаудың базистік үлестірілуі тиімді болады.*

Сонымен, бірінші кезекте тасымалдаудың базистік үлестірілуі үшін бос торлардың бағаларын табу мәселесі қойылады.

Тасымалдаудың қандай да бір базистік үлестірілуі бекітілген болсын. Бұл жерде (i, j) – бос тор, b_{ij} – (i, j) торының бағасы немесе бос айнымалылар арқылы берілген сызықтық функциясының өрнегіндегі (x_{ij}) айнымалысының коэффициенті, яғни

$$F = F_0 + \beta_{ij} + x_{ij} + \ldots \tag{4.5}$$

мұндағы көп нүктемен x_{ij} айнымалысынан өзге бос айнымалыларға жауап беретін қосылғыштар белгіленген, F_0 – тасымалдауды берілген үлестіруін тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын. Сонда (4.5) өрнегінен (i, j) бос торының β_{ij} бағасы (i, j) торына бірлік тасымалдауды (x_{ij} айнымалысы 0-ден 1-ге дейін арттырылады) жеткізуге жұмсалатын жалпы шығынның ΔF өсімшесіне тең. Егер $\beta_{ij} > 0$ болса, онда $\Delta F > 0$; $\beta_{ij} < 0$ болса, онда $\Delta F < 0$ болатыны анық. Бос тор бағасының соңғы ұғымын *бос тор бағасының экономикалық мағынасы* деп айтады.

Тиімді шешімде кем дегенде бір бос тордың бағасы нөлге тең болса, онда тасымалдау есебінде *балама оптимумының* бар болуының белгісін білдіреді.

4.3-мысал.

4.1-мысалда анықталған базистік шешімнің тиімділігін тексеру керек.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Шығарылуы. Толтырылмаған тордың, айталық, (1,3) тордың бағасын есептейік. Ол үшін (1,3) торға бірлік тасымалдау береміз. Бұл жерде жол және баған бойынша баланстар сақталатындай толтырылған торларды өзгерту талап етіледі. (1,3) торынан басқа бос торлардың бәрінде тасымалдау нөлге тең болып қала береді деп ұсынамыз. 3-ші тұтынушы өзіне қажетті 105 т көлемінде жүк қабылдау үшін (2,3) тордағы тасымалдауды 1-ге азайтамыз (105-1=104), 2-ші қоймадан 180 т көлемінде жүкті жіберу үшін (2,2) тордағы тасымалдауды 1-ге арттырамыз (70+1=71), 2-ші тұтынушы өзіне қажетті 50 т көлемінде жүк қабылдау үшін (1,2) тордағы тасымалдауды 1-ге азайтамыз (50-1=49);

14 70	8 49	17 1	5	3	120
21	10 71	7 104	11 5	6	180
3	5	8	4 120	9 110	230
70	120	105	125	110	

Тасымалдаудың алынған қайта үлестіруіндегі жалпы шығынның ΔF өзгерісін табамыз.

Тасымалдауға жұмсалған бастапқы шығын:

$$F_{б} = 14\cdot 70 + 8\cdot 50 + 17\cdot 0 + 10\cdot 70 + 7\cdot 105 + 11\cdot 5 + 4\cdot 120 + 9\cdot 110,$$

қайта үлестірудегі жалпы шығын:

$$F_{қу} = 14\cdot 70 + 8\cdot 49 + 17\cdot 1 + 10\cdot 71 + 7\cdot 104 + 11\cdot 5 + 4\cdot 120 + 9\cdot 110.$$

Сонда, бос тордың экономикалық мағынасын ескерсек:

$$\beta_{13} = \Delta F = F_{қу} - F_{б} = 8\cdot(-1) + 17\cdot 1 + 10\cdot 1 + 7\cdot(-1) = -8 + 17 + 10 - \\ -7 = 12.$$

(1,3) тордың бағасын анықтаған жолмен (1,4) бос тордың бағасын есептейік:

1) (1,4) торға бірлік тасымалдау береміз;

2) 4-ші бағанның балансын сақтау үшін (2,4) тордағы жүк көлемін 1-ге кемітеміз (5-1=4);

3) 2-ші жолдың балансын сақтау мақсатында (2,2) тордағы жүк көлемін 1-ге арттырамыз (70+1=71);

4) 2-ші бағанның балансын сақтау үшін (1,2) тордағы жүк көлемін 1-ге кемітеміз (50-1=49):

14 70	8 49	17	5 1	3	120
21	10 71	7 105	11 4	6	180
3	5	8	4 120	9 110	230
70	120	105	125	110	

ΔF өзгерісті есептейік.

Тасымалдауға жұмсалған бастапқы шығын:

$$F_б = 14\cdot70+8\cdot50+5\cdot0+10\cdot70+7\cdot105+11\cdot5+4\cdot120+9\cdot110,$$

қайта үлестірудегі жалпы шығын:

$$F_{қу} = 14\cdot70+8\cdot49+5\cdot1+10\cdot71+7\cdot105+11\cdot4+4\cdot120+9\cdot110.$$

Жауабы: Бос тордың экономикалық мағынасын ескерсек:

$$\beta_{14} = \Delta F = F_{қу} - F_б = 8\cdot(-1)+5\cdot1+10\cdot1+11\cdot(-1) = -8+5+$$
$$+10-11=-4.$$

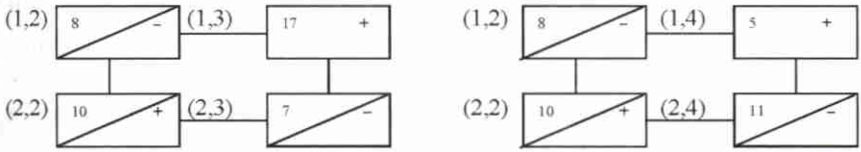
Бос торлардың ішінде теріс бағалы тор болғандықтан тасымалдауды көрсетілген түрде үлестіру тиімді емес.

4.3-мысалды шығару тәсілі өте ұзақ. Кейбір жағдайда барлық бос торлардың бағасын есептеуге тура келеді. Есептеуді қысқарту үшін осы есептің шығарылуын талдайық.

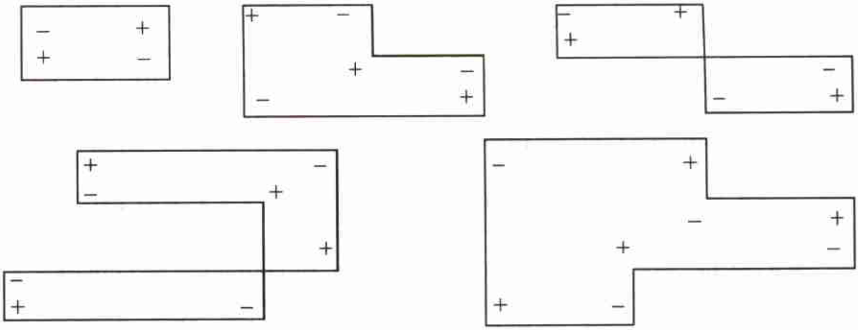
ΔF мәнін есептеген кезде $F_б$ және $F_{қу}$ өрнектеріндегі көп қосылғыштар ΔF-ке әсер етпей, өзара жойылып кетеді: тек қана қайта үлестіру кезіндегі тасымалдау торларының шығын коэффициенттері маңызды болады. Бұл жерде ΔF үшін өрнекте кейбіреулері «-» таңбасымен, кейбіреулері «+» таңбасымен енеді. «Таңба ережесін» табу үшін 4.1-суретте келтірілген сызбаны пайдаланған ыңғайлы. Бұл сызбада тасымалдау мәндері өзгеретін торлар (сол жағында базистік айнымалыларға сәйкес торлардың нөмірлері) келтірілген:

«+» таңбамен тасымалдау көлемі артатын торлар, «-» таңбамен тасымалдау көлемі азаятын торлар белгіленген.

Көбінесе контур тіктөртбұрыш түрінде болады (4.1-сурет), бірақ басқа типтегі фигура түрінде де болуы мүмкін (4.2-сурет).



4.1-сурет



4.2-сурет

Ескерту. Кейбір кезде еркін алынған мәнді цикл үшін цикл ұғымы енгізіледі: цикл – сәйкес таңбаларымен алынған цикл төбелерінде орналасқан коэффициенттердің алгебралық қосындысы. Цикл бағасы осы циклға енетін жалғыз бос тордың бағасына тең.

Немесе келесі шарттарды қанағаттандыратын матрицаның жолдары мен бағандарының бойында орналасқан торлар мен звенолардағы төбелермен берілген сынық матрицадағы *цикл* деп аталады:

• сынық байланысты болуы керек, яғни оның кез келген төбесінен сынықтың звенолары бойымен басқа төбеге баруға болады;

• сынықтың әрбір төбесінде екі звено кездеседі: олардың біреуі жол бойынша, біреуі – баған бойынша орналасады.

Циклдың бір төбесі бос торда, қалған төбелері толтырылған торларда орналасатын тасымалдаудың базистік үлестіруімен берілген кестедегі цикл *қайта есептеу циклы* деп аталады.

Қайта есептеу циклының бос төбесінде «+» таңбасы, ал көршілес төбелерде қарама-қарсы таңба тұрса онда есептеу циклы *белгіленген* деп аталады.

Тасымалдаудың базистік үлестірімінің әрбір бос торы үшін де қайта есептеу циклы бар және жалғыз, және циклдың белгілену амалы қисынды болады.

Циклдардың төбелерінің біреуі бос торда, ал қалғандарының барлығы толтырылған торларда орналасады. Төбелердің саны барлық кезде жұп болады. Бос төбеге оң таңба береміз, қалған төбелердегі таңбалар кезектеседі. Осы сынық сызықтың бір жағында екі толтырылған төбе орналаса алады, сонымен қатар бір төбе толтырылатын бос торда жатады.

Сонымен, бос торды табудың 1-ережесін айтуға болады: бос тор үшін қайта есептеу циклын құрып, осы циклдың төбелеріне бос торға «+» таңбасынан бастап басқа торларға біртіндеп таңбаларды кезектестіріп қою керек. Сонда, бос тордың бағасының мәні сәйкес таңбалармен алынған цикл торларының шығын коэффициенттерінің алгебралық қосындысына тең. Осылайша, әрбір бос тор үшін қайта есептеудің мәнді циклын құра отырып, оның бағасын табуға болады.

4.1-суретте келтірілген цикл бойынша есептесек:

(1,3) бос тор үшін:

$$\beta_{13} = -8 + 17 + (-7) + 10 = 12$$

немесе

$$\beta_{13} = (17 + 10) - (8 + 7) = 12;$$

(1,4) бос тор үшін:

$$\beta_{14} = -8 + 5 + (-11) + 10 = -4$$

немесе

$$\beta_{14} = (5 + 10) - (8 + 11) = -4.$$

Ескере кететін жағдай, цикл барлық уақытта осындай түрде қарапайым бола бермейді.

Еркін алынған бос тордың бағасын табудың ережесі алынды. Әйтсе де, бос торлардың бағасын табуды тағы да жеңілдетуге болады. Айталық, барлық толтырылған торлардың шығын коэффициенттері нөлге тең болсын. Егер қарастырылған ереже бойынша бос торлардың бағасын тапсақ, онда бос торлардың бағасы олардың шығын коэффициенттеріне тең, яғни бұл жағдайда баға мәні тасымалдау кестесінен есептеледі, және ешқандай циклды құрудың қажеті жоқ.

Теорема 4.3 (*потенциалдар туралы*). Кестенің қандай да бір жолының (бағанының) шығындар коэффициентіне қандай да бір санды қосса бос тордың бағасы өзгермейді. Белгіленген жолдың (бағанның) шығындар коэффициентіне қосылған осы сан берілген жолдың (бағанның) *потенциалы* деп аталады.

Қарастырылған жағдай мен 4.3-теоремасы бос торларды табудың 2-ережесін береді: тасымалдау кестесінің әрбір жолы мен бағанындағы шығын коэффициенттеріне толтырылған торлардағы шығын коэффициенттері нөлге тең болатындай сандарды (потенциалдарды) қосу керек. Нәтижесінде алынған бос мүшелердің шығын коэффициенттері осы торлардың бағасына тең болады.

4.4-мысал.

4.2-мысалда алынған базистік үлестірудегі бос торлардың бағасын табу керек.

Шығарылуы. Жоғарыда қарастырылған амалдар тізбегін пайдалана отырып бос торлардың бағасын табамыз. Шығын коэффициенттерін кез келген бағаннан (жолдан) бастап өзгертуге болады. Бірінші бағаннан бастайық. Бірінші бағанның потенциалы нөлге тең болсын. Әрбір бағанның және жолдың қасына потенциалын, жақшаның ішіне қадам санын көрсетеміз.

14	8	17	5	3	-6(6)
21	10	7	11	6	-8(5)
3	5	8	4	9	-3(2)
0(1)	-2(4)	1(8)	-1(3)	3(7)	

Енді түсінікті болу үшін осы кестені талдап, әрбір қадамда орындалған амалдарды жекелеп қарастырайық.

1-қадамда бірінші бағанның потенциалы нөлге тең болсын деп ұйғарамыз.

2-қадам. Бірінші қадамдағы толтырылған тордың ((3,1) тор) шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін (-3) санын қосамыз және сол жолдағы барлық элементтерге осы санды қосып шығамыз:

14	8	17	5	3
21	10	7	11	6
0	2	5	1	6

3-қадам. Толтырылған (3,4) тордағы шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін (-1) санын қосамыз және сол бағандағы барлық элементтерге де осы санды қосамыз:

14	8	17	4	3
21	10	7	10	6
0	2	5	0	6

4-қадам. (-2) санын толтырылған (3,2) тордағы шығын коэффициентін нөлге теңестіру үшін (-2) санын қосамыз, және оны сол бағандағы барлық элементтерге қосамыз:

14	6	17	4	3
21	8	7	10	6
0	0	5	0	6

5-қадам. 3-жолдағы барлық толтырылған торлардың шығын коэффициенттері нөлге тең болды. Енді екінші жолдағы толтырылған (2,2) тордағы коэффициентті нөлге теңестіру үшін (-8) санын сол жолдың барлық элементіне қосамыз:

14	6	17	4	3
13	0	-1	2	-2
0	0	5	0	6

6-қадам. 1-жолдағы барлық толтырылған торлардың ((1,2) тор) шығын коэффициенттері нөлге тең болуы үшін (-6) санын бірінші жолдың барлық элементіне қосамыз:

8	0	11	-2	-3
13	0	-1	2	-2
0	0	5	0	6

7-қадам. 1-жолдағы (5-бағандағы) барлық толтырылған торлардың ((1,5) тор) шығын коэффициенттері нөлге тең болуы үшін 3 санын төртінші бағанның барлық элементіне қосамыз:

8	0	11	-2	0
13	0	-1	2	1
0	0	5	0	9

8-қадам. Кестеде нөлге айналдырылмаған жалғыз толтырылған тор қалды: (2,3); оны нөлге теңестіру үшін осы бағанның барлық элементіне 1 санын қосамыз:

8	0	12	-2	0
13	0	0	2	1
0	0	6	0	9

Жауабы: Өзгертілген шығын коэффициенттерін бағалар матрицасы ретінде жазған ыңғайлы:

$$\begin{pmatrix} 8 & 0 & 12 & -2 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

Тасымалдау кестесінің бос торларына сәйкес бағалар матрицасының элементтері осы бос торлардың бағаларына тең.

Матрицадан көріп отырғанымыздай, бос торлар бағасының арасында теріс элемент бар, сондықтан алынған шешім тиімді емес.

Жоғарыда талдаған мәліметтерді ескерсек, бекітілген базистік үлестіру үшін 2-ережені қанағаттандыратындай әр түрлі потенциалдар жиынтығын таңдауға болады.

4.5. Үлестірімділік әдісі

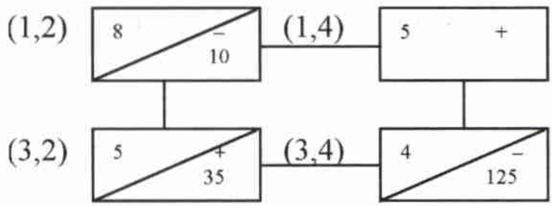
Бұл әдісті нақты есепті шығару барысында түсіндірейік.

4.5-мысал.

Үлестірімділік әдісін пайдаланып 4.2-мысалда қарастырылған тасымалдау есебінің тиімді үлестіруін табу керек.

Шығарылуы. Тасымалдаудың базистік үлестіруінен бастайық. Осыған дейін алынған шешімнің тиімді емес екеніне көз жеткізген болатынбыз. Бос тор бағасы – сызықтық функция өрнегіндегі бос айнымалыға сәйкес коэффициент. 4.4-мысалдың нәтижесін ескерсек: $F = 2780 + 8x_{11} + 12x_{13} - 2x_{14} + 13x_{21} + 2x_{24} + x_{25} + 6x_{33} + x_{35}$.

Берілген үлестіру үшін $F_0 = 2780$ мәні 4.2-мысалды шығару барысында анықталды. Әрі қарай есепті симплекс әдісімен шығарған сияқты тәсілді пайдаланамыз: коэффициенті теріс x_{14} айнымалысын негізгі айнымалыға көшіреміз. x_{14} айнымалысы нөлден бастап өседі. Тасымалдауды бос торға көшіру тасымалдауды қайта үлестіруге әкеледі (тасымалдауды цикл бойынша көшіру). (1,4) тор ((4.6)-матрицада осы тордың бағасы теріс) үшін қайта есептеудің белгіленген циклы 4.3-суретте келтірілген:



4.3-сурет

Симплекс әдістегі тәсілге ұқсас, толтырылған торлардағы тасымалдаудың бірі нөлге тең болғанға дейін (1,4) тордағы x_{14} тасымалдауды (әрі қарай x_{14} тасымалдауын арттыру шешімдердің жарамды облыстар облысынан шығып кетеді) арттырамыз. Бұл тор 4.3-суретте көрсетілген циклға тиісті. Сол торды табамыз. Егер (1,4) торға қандай да бір γ тасымалдауын беретін болсақ, онда циклдағы «+» таңбалы торлардағы тасымалдау γ мәніне артады, ал «–» таңбалы торлардағы тасымалдау γ мәніне кемиді. Сондықтан, ізделінді тор «–» таңбасымен берілген цикл торларының арасынан табылады. Және де ол осындай торлардағы ең аз тасымалдауды қабылдайды. Біздің мысалда, min{10, 125}=10 – (1,2) тор және осы тордағы тасымалдауды нөлге айналдыру үшін цикл бойынша 10 жүк бірлігін жөнелту керек, яғни цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау «–» таңбалы цикл торларындағы тасымалдаудың арасындағы минимумы ретінде анықталады. Осыдан кейін (1,4) тор толтырылған, ал (1,2) тор – бос тор болып есептелінеді.

«+» таңбалы цикл торларындағы тасымалдау 10 жүк бірлігіне артады: (1,4) торда – 10 бірлікке, (3,2) торда – 45 бірлікке тең. Ал «–» таңбалы цикл торларындағы тасымалдау 10 жүк бірлігіне кемиді: (1,2) тор – бос тор, ал (3,4) тор 115-ке тең болады.

14	8	17	5 / 10	3 / 110	120
21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
3 / 70	5 / 45	8	4 / 115	9	230
70	120	105	125	110	

Қайтадан алынған тасымалдаудың базистік үлестірімінің тиімділігі туралы мәселе туындайды.

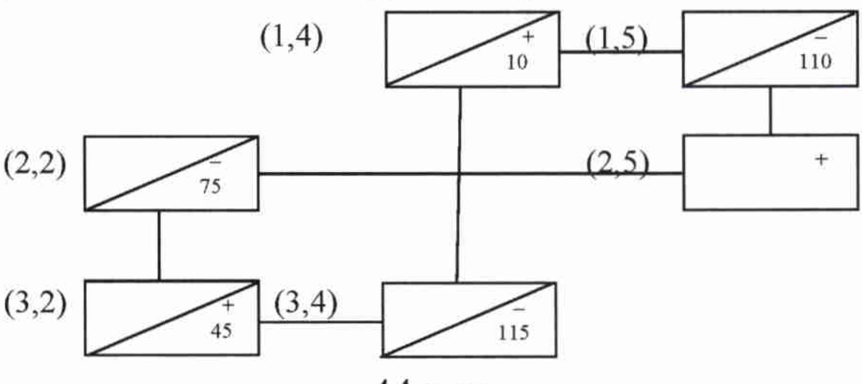
Тасымалдауды үлестірудің бос торларын (бағалар матрицасын) анықтаймыз. Ол үшін 2-ереже бойынша толтырылған торлардың шығын коэффициенті нөлге тең болатындай потенциалдарды таңдаймыз.

14	8	17	5	3	-4(7)
21	10	7	11	6	-8(4)
3	5	8	4	9	-3(2)
0(1)	-2(3)	1(5)	-1(6)	1(8)	

Нәтижесінде келесі бағалар матрицасын аламыз:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 14 & 0 & 0 \\ 13 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Бағалар матрицасында теріс элемент бар – (2,5) тордың бағасы теріс, сондықтан алынған базистік шешім тиімді емес. (2,5) тор үшін белгіленген цикл 4.4-суретте келтірілген:



4.4-сурет

Жоғарыда келтірілген ережеге сәйкес цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау: $\min\{110, 75, 115\} = 75$. Цикл бойынша осы тасымалдауды жылжыта отырып, тасымалдаудың жаңа үлестіруін аламыз:

14	8	17	5 / 85	3 / 35	120
21	10	7 / 105	11	6 / 75	180
3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	230
70	120	105	125	110	

Осы үлестірудің бағалар матрицасын анықтаймыз:

14	8	17	5 / 85	3 / 35	-4(4)
21	10	7 / 105	11	6 / 75	-7(6)*
3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	-3(2)
0(1)	-2(7)		-1(3)	1(5)	

Ескере кететін жағдай 5-қадамның нәтижесінен кейін кестенің екінші жолындағы екі торда шығын коэффициенттері 7-ге тең болды. 6-қадамда осы жолдағы барлық элементке (шығын коэффициенттеріне) (-7) санын қоса отырып екі шығын коэффициентін нөлге теңестірдік, сондықтан есептеу кезінде қадам саны 1-ге кеміді. Алынған кестені матрица түрінде жазсақ:

$$\begin{pmatrix} 10 & 2 & 13 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

Алынған бағалар матрицасында теріс элемент жоқ болғандықтан, осы үлестіру тиімді.

Осы үлестірудегі тасымалдауға жұмсалатын ақша бірлігіндегі жалпы шығын:

$$F_{\min} = 5 \cdot 85 + 3 \cdot 35 + 7 \cdot 105 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 120 +$$
$$+ 4 \cdot 40 = 2685.$$

Тасымалдауды үлестіру әдісін пайдалану нәтижесінде жеткен ақша бірлігіндегі ΔF үнемділігі:

$$\Delta F = F_{\min} - F_0 = 2685 - 2780 = -95.$$

Берілген жағдайдағы «-» таңбасы тиімді шешімге көшкен кезде тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығынның азайғанын көрсетеді.

Жауабы: $\begin{pmatrix} 10 & 2 & 13 & 0 & 0 \\ 14 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$

1-ескерту. Цикл бойынша жөнелтілетін тасымалдау циклдағы «-» таңбасымен алынған тордағы тасымалдаудың минимумынан кем де, артық та болуы мүмкін емес. Шынында да, бірінші жағдайда циклдың бірде бір торының нөлдік тасымалдауы болмайды. Сондықтан, толтырылған торлардың жалпы саны $m+n$-ге тең, демек, үлестіру базистік болмайды. Екінші жағдайда жарамды шешімдер облысынан шығып кетеді.

2-ескерту. Табылған тасымалдаудың тиімді үлестіруінде толтырылмаған торлардың бағаларының арасында нөлдік мәндер болса, ол шешім жалғыз емес болады.

3-ескерту. Кейбір жағдайларда тасымалдау есебін шығарудың i-ші қадамында (немесе қадамдардың әр қайсысы үшін) тасымалдауға (шығынды үнемдеуге) кететін ΔF_i шығынның өзгеруін анықтау талап етіледі. Бос тор бағасының экономикалық мағынасынан, қандай да бір i-ші қадамда алынған ΔF_i шығын үнемділігі тасымалдау жіберетін тордың жіберілетін тасымалдауға көбейтіндісіне тең.

Жабық тасымалдау есебін үлестірімділік әдісімен шығару алгоритмі

1. Толтырылған торлардағы шығын коэффициенттері нөлге тең болатындай, берілген базистік үлестіру үшін жолдар мен бағандардың потенциалын іріктейміз.

2. Егер барлық бос торлардың бағалары теріс емес болса, онда табылған үлестіру тиімді болады және есепті шығару үрдісі тоқтатылады. Егер бос торлардың бағаларының арасында теріс элементтер бар болса, онда олардың біреуін тасымалдауды жеткізу үшін таңдаймыз.

3. Таңдалынған бос тор үшін қайта есептеудің белгіленген циклын тұрғызамыз. Цикл бойынша жіберілетін γ тасымалдауы «–» таңбалы бос торлардағы тасымалдаудың арасындағы минимумы ретінде анықталады. Табылған тасымалдау цикл бойынша жіберіледі. Бұл жерде «+» таңбалы цикл торларында тасымалдау γ мәніне артады, ал «–» таңбалы торларда γ мәніне кемиді. Осы жерде тасымалдау нөлге тең болатын тор бос тор болып есептеледі, ал циклдың қалған торлары – толтырылған болып есептеледі. Осылайша, тасымалдаудың жаңа базистік үлестіруі алынады.

4. Алгоритмнің 1-қадамына көшеміз.

Тасымалдау есебін шығару барысында пайда болуы мүмкін *ерекше жағдайларды* қарастырайық:

1. Кейбір жағдайларда, цикл бойынша жіберілетін тасымалдау нөлге тең болуы мүмкін. Бұл «–» таңбалы цикл торында нөлдік тасымалдау болған жағдайда болады. Бұл жағдайда цикл бойынша нөлдік тасымалдау жіберіледі. Нәтижесінде цикл құрылған бос тор – толтырылған (нөлдік тасымалдаумен), ал нөлдік тасымалдау орналасқан тор – бос тор болып есептеледі.

2. Егер цикл бойынша тасымалдауды жіберген кезде тасымалдау бір мезетте бірнеше толтырылған торларда нөлге айналса, онда олардың ішіндегі тек қана біреуі (кез келгенін) бос тор, ал тасымалдауы нөлге тең болған басқа торларды нөлдік тасымалдауы бар толтырылған торлар деп есептеледі.

4.6. Потенциалдар әдісі

Алғашқы тірек жоспарын анықтағаннан кейін, оны тиімділікке тексеру керек. Қажет болған жағдайда мақсат функциясының жақсартылған мәнімен жаңа тірек шешімге көшу керек. Ол үшін потенциалдар әдісі қолданылады. Әрбір A_i жабдықтаушыға және әрбір B_j тұтынушыға осы кешендердің сәйкес u_i және v_j потенциалдары салыстырылады.

Тасымалдау есебінің қандай да бір тірек жоспары тиімді болуы үшін:

толтырылған торлар және $x_{ij} \geq 0$ үшін

$$C_{ij} - (u_i + v_j) = 0, \; \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right) \qquad (4.7)$$

бос торлар үшін

$$\Delta C_{ij} = C_{ij} - \left(u_i + v_j\right) \geq 0, \ \left(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n}\right) \qquad (4.8)$$

шарттарын қанағаттандыратын u_i^*, v_j^* – $(m+n)$ сандарынан тұратын жүйенің сәйкес келуі қажетті және жеткілікті болып табылады. ΔC_{ij} – бос тордың бағасы болып табылады.

u_i^*, v_j^* – сандары сәйкес өндірушілер мен тұтынушылардың *потенциалдары*, олардың барлық жүйесі – *потенциалдық*, ал (4.7) – (4.8) шарттар $\{u_i^*, v_j^*\}$ жүйесінің *потенциалдық шарттары*; жеке алғанда әрбір теңсіздік (теңдік) сәйкес (i, j) торының *потенциалдық шарты* деп аталады.

Белгісіз потенциалдардың саны $(m+n)$ – барлық уақытта теңдеулер санынан (толтырылған торлар санынан, $N = m + n - 1$) бірге артық болғандықтан, толтырылған тор бар жолды таңдаймыз да осы жол үшін потенциалды нөлге теңестіреміз, мысалы $u_1 = 0$ деп алып (4.7) теңдеулерінен біртіндеп басқа потенциалдардың мәнін анықтаймыз.

Егер толтырылған торлардың саны $N < m + n - 1$ болса жоғарыда айтылғандай (4.7) теңдеуіндегі потенциалдарды анықтауға керек болатын толтырылған торлардың қажетті санын алу үшін қосымша $x_{ij} = 0$ нөлдік тасымалдауды енгіземіз.

Содан кейін (4.8) қатынасынан барлық бос торлар үшін ΔC_{ij}, шамасын анықтаймыз және егер $\Delta C_{ij} \geq 0$ болса, онда тасымалдаудың тиімді жоспарын аламыз, егер теріс ΔC_{ij} кездессе, онда жоспар тиімді емес және оны жақсарту керек болатынын аламыз.

Базистік шешімнің *тиімділік критерийі*: барлық бос торлардың бағалары теріс емес болған жағдайда ғана тасымалдау есебінің базистік шешімі тиімді болады.

Теріс мәнді ΔC_{ij} кездесетін бос торлардың ішінен ΔC_{ij} ең кіші болатын торды таңдаймыз. Нәтижесінде белгілі бір толтырылған тор бос болатындай, осы бос торды толтыру ұсынылады.

4.6-мысал.

4.1-мысалда алынған алғашқы базистік шешімді пайдалана отырып, потенциалдар әдісінің көмегімен есептің тиімді шешімін және ең аз тасымалдау шығынын табу керек.

Шығарылуы. 4.1-мысалда «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісін пайдаланып берілген тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімі табылған болатын.

$\sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{5} b_j$ қатынасы орындалатындықтан есебіміз жабық модельдегі тасымалдау есебі болып табылады.

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 50	17	5	3	120
A_2	21	10 / 70	7 / 105	11 / 5	6	180
A_3	3	5	8	4 / 120	9 / 110	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, v_j потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтап, есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін $C_{ij} - (u_i + v_j) = 0$ теңдеулерінің көмегімен u_i, v_j потенциалдарын анықтаймыз.

$$\begin{cases} c_{11} - (u_1 + v_1) = 0 \\ c_{12} - (u_1 + v_2) = 0 \\ c_{22} - (u_2 + v_2) = 0 \\ c_{23} - (u_2 + v_3) = 0 \\ c_{24} - (u_2 + v_4) = 0 \\ c_{34} - (u_3 + v_4) = 0 \\ c_{35} - (u_3 + v_5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14 - (u_1 + v_1) = 0 \\ 8 - (u_1 + v_2) = 0 \\ 10 - (u_2 + v_2) = 0 \\ 7 - (u_2 + v_3) = 0 \\ 11 - (u_2 + v_4) = 0 \\ 4 - (u_3 + v_4) = 0 \\ 9 - (u_3 + v_5) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1 + v_1 = 14 \\ u_1 + v_2 = 8 \\ u_2 + v_2 = 10 \\ u_2 + v_3 = 7 \\ u_2 + v_4 = 11 \\ u_3 + v_4 = 4 \\ u_3 + v_5 = 9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & u_1 = 0; \quad v_1 = 14; \\ & u_2 = 2; \quad v_2 = 8; \\ \Rightarrow\ & u_3 = -5; \quad v_3 = 5; \\ & \qquad\qquad v_4 = 9; \\ & \qquad\qquad v_5 = 14; \end{aligned}$$

бос торлар үшін $\Delta C_{ij} = C_{ij} - (u_i + v_j) \geq 0$, $(i = \overline{1, m};\ j = \overline{1, n})$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

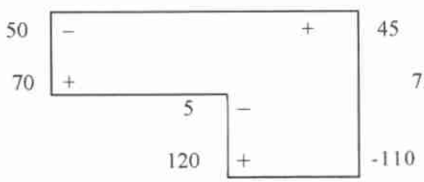
$$\begin{cases} \Delta c_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) \geq 0 \\ \Delta c_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) \geq 0 \\ \Delta c_{15} = c_{15} - (u_1 + v_5) \geq 0 \\ \Delta c_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) \geq 0 \\ \Delta c_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) \geq 0 \\ \Delta c_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) \geq 0 \\ \Delta c_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) \geq 0 \\ \Delta c_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{13} = 17 - (0 + 5) \geq 0 \\ \Delta c_{14} = 5 - (0 + 9) \geq 0 \\ \Delta c_{15} = 3 - (0 + 14) \geq 0 \\ \Delta c_{21} = 21 - (2 + 14) \geq 0 \\ \Delta c_{25} = 6 - (2 + 14) \geq 0 \\ \Delta c_{31} = 3 - (-5 + 14) \geq 0 \\ \Delta c_{32} = 5 - (-5 + 8) \geq 0 \\ \Delta c_{33} = 8 - (-5 + 5) \geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta c_{14} = -4 \leq 0 \\ \Delta c_{15} = -11 \leq 0 \\ \Delta c_{21} = 5 \geq 0 \\ \Delta c_{25} = -10 \leq 0 \\ \Delta c_{31} = -6 \leq 0 \\ \Delta c_{32} = 2 \geq 0 \\ \Delta c_{33} = 8 \geq 0 \end{cases}$$

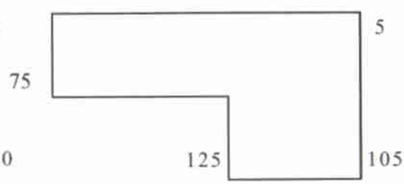
Бос торлар үшін анықталған бағалардың ішінде теріс элемент кездесетіндіктен, алынған шешім тиімді емес.

Сондықтан оны жақсартуымыз керек. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісін таңдаймыз. Ол (1,5) торға сәйкес -11-ге тең: $\Delta c_{15} = -11$. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

Ескі контур



Жаңа контур



«-» таңба орналасқан төбелердегі коэффициенттердің ішіндегі ең кішісін таңдаймыз, ол 5-ке тең. Осы санды оң таңбалы төбелердегі сандарға қосамыз да, теріс таңбалы төбелерден алып тастаймыз. Бір төбесі бос болып келетін жаңа контур аламыз.

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14 / 70	8 / 45	17	5	3 / 5	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3	5	8	4 / 125	9 / 105	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, v_j потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтаймыз. Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} c_{11}-(u_1+v_1)=0 \\ c_{12}-(u_1+v_2)=0 \\ c_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ c_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ c_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ c_{34}-(u_3+v_4)=0 \\ c_{35}-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14-(u_1+v_1)=0 \\ 8-(u_1+v_2)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \\ 9-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_1=14 \\ u_1+v_2=8 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_4=4 \\ u_3+v_5=9 \end{cases} \Rightarrow$$

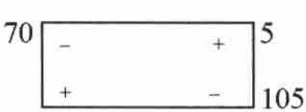
$$\begin{aligned} u_1&=0; & v_1&=14; \\ u_2&=2; & v_2&=8; \\ \Rightarrow u_3&=6; & v_3&=5; \\ & & v_4&=-2 \\ & & v_5&=3; \end{aligned}$$

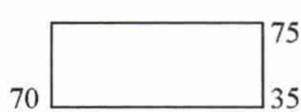
бос торлар үшін $\Delta C_{ij}=C_{ij}-(u_i+v_j)\geq 0$, $\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ мәнін анықтап, тиімділік критерийін тексереміз.

$$\begin{cases} \Delta c_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) \ge 0 \\ \Delta c_{14} = c_{14} - (u_1 + v_4) \ge 0 \\ \Delta c_{21} = c_{21} - (u_2 + v_1) \ge 0 \\ \Delta c_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) \ge 0 \\ \Delta c_{25} = c_{25} - (u_2 + v_5) \ge 0 \\ \Delta c_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) \ge 0 \\ \Delta c_{32} = c_{32} - (u_3 + v_2) \ge 0 \\ \Delta c_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{13} = 17 - (0 + 5) \ge 0 \\ \Delta c_{14} = 5 - (0 + (-2)) \ge 0 \\ \Delta c_{21} = 21 - (2 + 14) \ge 0 \\ \Delta c_{24} = 11 - (2 + (-2)) \ge 0 \\ \Delta c_{25} = 6 - (2 + 3) \ge 0 \\ \Delta c_{31} = 3 - (6 + 14) \ge 0 \\ \Delta c_{32} = 5 - (6 + 8) \ge 0 \\ \Delta c_{33} = 8 - (6 + 5) \ge 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{13} = 12 \ge 0 \\ \Delta c_{14} = 7 \ge 0 \\ \Delta c_{21} = 5 \ge 0 \\ \Delta c_{24} = 11 \ge 0 \\ \Delta c_{25} = 1 \ge 0 \\ \Delta c_{31} = -17 \le 0 \\ \Delta c_{32} = -9 \le 0 \\ \Delta c_{33} = -3 \le 0 \end{cases}$$

Δc_{ij} мәндерінің ішінде теріс элементтер бар, демек, алынған шешім тиімді емес. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісі Δc_{31} =–17. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:





Жаңа жоспар құрамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 45	17	5	3 / 75	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5	8	4 / 125	9 / 35	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} c_{12}-(u_1+v_2)=0 \\ c_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ c_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ c_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ c_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ c_{34}-(u_3+v_4)=0 \\ c_{35}-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-(u_1+v_2)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \\ 9-(u_3+v_5)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_2=8 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_4=4 \\ u_3+v_5=9 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & u_1=0; \quad v_1=-3; \\ & u_2=2; \quad v_2=8; \\ \Rightarrow\ & u_3=6; \quad v_3=5; \\ & \qquad\quad v_4=-2 \\ & \qquad\quad v_5=3; \end{aligned}$$

бос торлар үшін:

$$\begin{cases} \Delta c_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{14}=c_{14}-(u_1+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)\geq 0 \\ \Delta c_{32}=c_{32}-(u_3+v_2)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11}=14-(0+(-3))\geq 0 \\ \Delta c_{13}=17-(0+5)\geq 0 \\ \Delta c_{14}=5-(0+(-2))\geq 0 \\ \Delta c_{21}=21-(2+(-3))\geq 0 \\ \Delta c_{24}=11-(2+(-2))\geq 0 \\ \Delta c_{25}=6-(2+3)\geq 0 \\ \Delta c_{32}=5-(6+8)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=8-(6+5)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11} = 17 \geq 0 \\ \Delta c_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta c_{14} = 7 \geq 0 \\ \Delta c_{21} = 22 \geq 0 \\ \Delta c_{24} = 11 \geq 0 \\ \Delta c_{25} = 1 \geq 0 \\ \Delta c_{32} = -9 \leq 0 \\ \Delta c_{33} = -3 \leq 0 \end{cases}$$

Δc_{ij} мәндерінің ішінде теріс элементтер кездеседі. Демек, алынған шешім тиімді емес. Осы теріс элементтердің ішіндегі ең кішісі $\Delta c_{32} = -9$. Осы тормен байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:

$$\begin{array}{r|cc|l} 45 & - & + & 75 \\ & + & - & 35 \end{array} \qquad \begin{array}{r|cc|l} 10 & & & 110 \\ 35 & & & \end{array}$$

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8 / 10	17	5	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 35	8	4 / 125	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

u_i, v_j потенциалдарын және ΔC_{ij} мәндерін анықтаймыз. Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} c_{12}-(u_1+v_2)=0 \\ c_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ c_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ c_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ c_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ c_{32}-(u_3+v_2)=0 \\ c_{34}-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8-(u_1+v_2)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 5-(u_3+v_2)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_2=8 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_4=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & u_1=0; \quad v_1=6; \\ & u_2=2; \quad v_2=8; \\ \Rightarrow\ & u_3=-3; \quad v_3=5; \\ & \qquad\quad v_4=7 \\ & \qquad\quad v_5=3; \end{aligned}$$

бос торлар үшін:

$$\begin{cases} \Delta c_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{14}=c_{14}-(u_1+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=c_{35}-(u_3+v_5)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11}=14-(0+6)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=17-(0+5)\geq 0 \\ \Delta c_{14}=5-(0+7)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=21-(2+6)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=11-(2+7)\geq 0 \\ \Delta c_{25}=6-(2+3)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=8-(-3+5)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=9-(-3+3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11} = 8 \geq 0 \\ \Delta c_{13} = 12 \geq 0 \\ \Delta c_{14} = -2 \leq 0 \\ \Delta c_{21} = 13 \geq 0 \\ \Delta c_{24} = 2 \geq 0 \\ \Delta c_{25} = 1 \geq 0 \\ \Delta c_{33} = 6 \geq 0 \\ \Delta c_{35} = 9 \geq 0 \end{cases}$$

Δc_{ij} мәндерінің ішінде бір теріс элемент кездеседі $\Delta c_{14} = -2$, демек, алынған шешім тиімді емес.

$$\begin{array}{r|cc|l} \cline{2-3} 10 & - & + & \\ 35 & + & - & 125 \\ \cline{2-3} \end{array} \qquad \begin{array}{r|cc|l} \cline{2-3} & & & 10 \\ 45 & & & 115 \\ \cline{2-3} \end{array}$$

Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5 / 10	3 / 110	120
A_2	21	10 / 75	7 / 105	11	6	180
A_3	3 / 70	5 / 45	8	4 / 115	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} c_{14}-(u_1+v_4)=0 \\ c_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ c_{22}-(u_2+v_2)=0 \\ c_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ c_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ c_{32}-(u_3+v_2)=0 \\ c_{34}-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-(u_1+v_4)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 10-(u_2+v_2)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 5-(u_3+v_2)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_4=5 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_2=10 \\ u_2+v_3=7 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_4=4 \end{cases} \Rightarrow$$

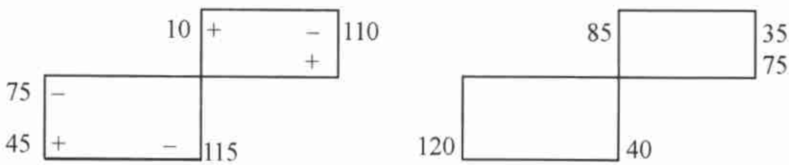
$$\begin{aligned} u_1 &= 0; \quad v_1 = 4; \\ u_2 &= 4; \quad v_2 = 6; \\ \Rightarrow u_3 &= -1; \quad v_3 = 3; \\ & \qquad\quad v_4 = 5 \\ & \qquad\quad v_5 = 3; \end{aligned}$$

бос торлар үшін:

$$\begin{cases} \Delta c_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{25}=c_{25}-(u_2+v_5)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=c_{35}-(u_3+v_5)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11}=14-(0+4)\geq 0 \\ \Delta c_{12}=8-(0+6)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=17-(0+3)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=21-(4+4)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=11-(4+5)\geq 0 \\ \Delta c_{25}=6-(4+3)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=8-(-1+3)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=9-(-1+3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11} = 10 \geq 0 \\ \Delta c_{13} = 2 \geq 0 \\ \Delta c_{14} = 14 \geq 0 \\ \Delta c_{21} = 13 \geq 0 \\ \Delta c_{24} = 2 \geq 0 \\ \Delta c_{25} = -1 \leq 0 \\ \Delta c_{33} = 6 \geq 0 \\ \Delta c_{35} = 7 \geq 0 \end{cases}$$

Δc_{ij} мәндерінің ішінде теріс элемент бар $\Delta c_{25} = -1$, демек, алынған шешім тиімді емес. Осы тормен (2,5) байланыстырып контур құрамыз да, оған сәйкес тасымалдау жоспарын жақсартамыз:



Тасымалдаудың жаңа жоспарын құрамыз:

Қоймалар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Қордағы жүктің көлемі (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	14	8	17	5 / 85	3 / 35	120
A_2	21	10	7 / 105	11	6 / 75	180
A_3	3 / 70	5 / 120	8	4 / 40	9	230
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	70	120	105	125	110	

Есептің шешімін тиімділікке тексереміз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} c_{14}-(u_1+v_4)=0 \\ c_{15}-(u_1+v_5)=0 \\ c_{23}-(u_2+v_3)=0 \\ c_{25}-(u_2+v_5)=0 \\ c_{31}-(u_3+v_1)=0 \\ c_{32}-(u_3+v_2)=0 \\ c_{34}-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5-(u_1+v_4)=0 \\ 3-(u_1+v_5)=0 \\ 7-(u_2+v_3)=0 \\ 6-(u_2+v_5)=0 \\ 3-(u_3+v_1)=0 \\ 5-(u_3+v_2)=0 \\ 4-(u_3+v_4)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_1+v_4=5 \\ u_1+v_5=3 \\ u_2+v_3=7 \\ u_2+v_5=6 \\ u_3+v_1=3 \\ u_3+v_2=5 \\ u_3+v_4=4 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{array}{rl} u_1=0; & v_1=4; \\ u_2=3; & v_2=6; \\ \Rightarrow u_3=-1; & v_3=4; \\ & v_4=5 \\ & v_5=3; \end{array}$$

бос торлар үшін:

$$\begin{cases} \Delta c_{11}=c_{11}-(u_1+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{12}=c_{12}-(u_1+v_2)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=c_{13}-(u_1+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=c_{21}-(u_2+v_1)\geq 0 \\ \Delta c_{22}=c_{22}-(u_2+v_2)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=c_{24}-(u_2+v_4)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=c_{33}-(u_3+v_3)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=c_{35}-(u_3+v_5)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11}=14-(0+4)\geq 0 \\ \Delta c_{12}=8-(0+6)\geq 0 \\ \Delta c_{13}=17-(0+4)\geq 0 \\ \Delta c_{21}=21-(3+4)\geq 0 \\ \Delta c_{22}=10-(3+6)\geq 0 \\ \Delta c_{24}=11-(3+5)\geq 0 \\ \Delta c_{33}=8-(-1+4)\geq 0 \\ \Delta c_{35}=9-(-1+3)\geq 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Delta c_{11} = 10 \geq 0 \\ \Delta c_{12} = 2 \geq 0 \\ \Delta c_{13} = 13 \geq 0 \\ \Delta c_{21} = 14 \geq 0 \\ \Delta c_{22} = 1 \geq 0 \\ \Delta c_{24} = 3 \geq 0 \\ \Delta c_{33} = 5 \geq 0 \\ \Delta c_{33} = 7 \geq 0 \end{cases}$$

Δc_{ij} мәндерінің ішінде теріс элемент жоқ, демек, алынған шешім тиімді, яғни тасымалдаудың тиімді жоспары құрылды. Кестедегі берілгендер бойынша X матрицасын құрамыз.

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 85 & 35 \\ 0 & 0 & 105 & 0 & 75 \\ 70 & 120 & 0 & 40 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығын:

$$F_{\min} = 5 \cdot 85 + 3 \cdot 35 + 7 \cdot 105 + 6 \cdot 75 + 3 \cdot 70 + 5 \cdot 120 + 4 \cdot 40 = 2685.$$

Жауабы: Алынған жоспарға талдау жүргізейік:

A_1 қоймада барлығы 120 тонна көлемінде жүк болды, оның 85 тоннасы төртінші тұтынушыға, 35 тоннасы бесінші тұтынушыға жөнелтілді;

A_2 қоймада барлығы 180 тонна көлемінде жүк болды, оның 105 тоннасы үшінші тұтынушыға, 75 тоннасы бесінші тұтынушыға жөнелтілді;

A_3 қоймада барлығы 230 тонна көлемінде жүк болды, оның 70 тоннасы бірінші тұтынушыға, 120 тоннасы екінші тұтынушыға, 40 тоннасы төртінші тұтынушыға жөнелтілді. Жүкті тұтынушыларға жеткізудің жалпы құны минималды, және 2685 ақша бірлігіне тең.

4.7. Ашық модельдегі тасымалдау есебі

Ашық модельдегі тасымалдау есебінің екі жағдайы болуы мүмкін:

а) жалпы жабдықтаушылардың қуаттылығы тұтынушылардың жалпы сұраныстарынан артық:

$$\sum a_i > \sum b_j \, ;$$

ә) тұтынушылардың жалпы сұраныстары жалпы жабдықтаушылардың қуаттылығынан артық:

$$\sum a_i < \sum b_j \, .$$

Осы типтегі берілген есептің қойылуы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} < a_i, & \left(i = \overline{1, m}\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, & \left(j = \overline{1, n}\right) \end{cases} \qquad \text{(а) жағдайы)}$$

$$\begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, & \left(i = \overline{1, m}\right) \\ \sum\limits_{i=1}^{m} x_{ij} < b_j, & \left(j = \overline{1, n}\right) \end{cases} \qquad \text{(ә) жағдайы)}$$

$$x_{ij} \geq 0$$

шектеулеріндегі

$$Z = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij}$$

сызықтық функциясының минимумын табу керек.

Ашық тасымалдау есебін жабық тасымалдау есебіне келтіре отырып ашық типтегі тасымалдау есебі шығарылады.

а) жағдайында сұраныстары $b_{n+1} = \sum a_i - \sum b_j$ болатын B_{n+1} жалған тұтынушы енгізіледі, яғни кестеге қосымша баған енгізіледі.

ә) жағдайында жабдықтау қуаттылығы $a_{m+1} = \sum b_j - \sum a_i$ болатын A_{m+1} жалған жабдықтаушы енгізіледі, яғни кестеге қосымша жол енгізіледі.

Екі жағдайда да тасымалдау құны нөлге тең деп ескеріледі. Жабдықтаушыдан жалған тұтынушыға жүк бірлігін жеткізудегі құн тең болғанда нақты тұтынушыларға жүк бірлігін жеткізуге жұмсалатын шығын ең аз болады, ал жалған тұтынушыға өте аз қолайлы болатын жабдықтаушыдан жүк жіберіледі.

4.7-мысал.

Тасымалдау есебі берілсін. Алғашқы берілгендер кестеде келтірілген.

Жабдықтаушылар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Жабдықтаушылардың қуаттылығы (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1	6	8	12	16	100
A_2	16	10	8	6	15	400
A_3	4	1	9	11	13	100
A_4	3	2	7	7	15	100
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	50	100	150	200	250	750 \ 700

Осы есептің тиімді шешімін табу керек.

Шығарылуы. Берілген есепте тұтынушылардың жалпы сұранысы жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығынан артық (50+100+ +150+200+250=750>100+400+100+100=700, ә) жағдайы). «Жалған жабдықтаушы» енгіземіз, және тасымалдау есебі жабық типте болу үшін тасымалдау кестесіне қосымша жол енгіземіз. Жалған жабдықтаушының қуаттылығы 750-700=50 мәніне тең. Осы қосымша жолдың шығын коэффициенттерін нөлге тең деп қабылдаймыз. Потенциалдар туралы теоремаға сәйкес осы санның нақты мәні тасымалдаудың тиімді үлестіруіне әсер етпейді. Алынған жабық типтегі тасымалдау есебінің бастапқы тірек шешімін ең кіші элементтер әдісі бойынша табайық. Ең кіші элементтер әдісін қолданған кезде ең кіші құнды тек нақты жабдықтаушылар мен тұтынушылардың құндарының арасынан іздейміз, ал жалған жабдықтаушының қорлары соңғы кезекте қарастырылады.

1. Ең кіші шығын коэффициенті 1-ге тең (2 рет кездеседі, кез келгенін алайық):

(1,1) торда min{100, 50}=50 – бірінші тұтынушының сұранысы толығымен қамтамасыздандырылды, бірінші баған әрі қарай қарастырылмайды;

(3,2) торда $\min\{100,100\}=100$ – екінші тұтынушының сұранысы қамтамасыздандырылды және үшінші жабдықтаушының жүк қоры толығымен жөнелтілді, яғни әрі қарай 3-ші жол, 2-баған қарастырылмайды.

2. Қарастырылатын жолдар мен бағандардағы келесі ең кіші элемент 6-ға тең: (2,4) торға $\min\{400,200\}=200$ көлемінде жүк жеткізіледі. 4-ші тұтынушының сұранысы қанағаттандырылды, демек, 4-ші баған қарастырылмайды.

3. Келесі ең кіші элемент 7-ге тең. (4,3) торға min{100, 50} = =100 көлемінде жүк жеткізіледі. 4-ші жабдықтаушының жүгі толығымен жөнелтілді, демек, 4-ші жол қарастырылмайды.

4. Келесі ең кіші элемент 8-ге тең (2 рет кездеседі):

(1,3) торда және (2,3) торда. (1,3) тор үшін min{100–50, 150–100}=50, яғни 1-ші жол да, 3-ші баған да қарастырылмайды.

5. Ең кіші және соңғы жалғыз тор – (2,5) тор. Бұл торға min{400–200, 250}=200 мәнін жазамыз. Екінші тұтынушының сұранысы толығымен қанағаттандырылды. Бесінші жабдықтаушыда 50 бірлік көлемінде жүк артық қалды және бесінші тұтынушыға 50 бірлік көлемінде сұранысы қанағаттандырылмады.

6. Жалған жабдықтаушыдағы 50 бірлік көлеміндегі жүкті бесінші тұтынушыға жазамыз.

Жабдықтаушылар (A_i)	Тұтынушылар (B_j)					Жабдықтаушылардың қуаттылығы (a_i)
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	
A_1	1 50	6	8 50	12	16	100
A_2	16	10	8	6 200	15 200	400
A_3	4	1 100	9	11	13	100
A_4	3	2	7 100	7	15	100
A_5	0	0	0	0	0 50	50
Тұтынушылардың сұраныстары (b_j)	50	100	150	200	250	$\sum a_i = 750$ $\sum b_j = 750$

Толтырылған торлар саны 7-ге тең. Ал ереже бойынша ол $m+n-1=5+5-1=9$-ға тең болуы керек. Сондықтан тағы да кез келген екі торға нөлдік тасымалдау береміз. Айталық (4,2) және (3,5) торларға нөл санын жазамыз.

1 / 50	6	8 / 50	12	16	100
16	10	8	6 / 200	15 / 200	400
4	1 / 100	9	11	13 / 0	100
3	2 / 0	7 / 100	7	15	100
0	0	0	0	0 / 50	50
50	100	150	200	250	$\sum a_i = 750$ $\sum b_j = 750$

Алынған шешімді тиімділікке тексереміз. Ол үшін потенциалдарды және бос мүшелердің бағасын анықтаймыз.

Толтырылған торлар үшін:

$$\begin{cases} u_1+v_1=1 \\ u_1+v_3=8 \\ u_2+v_4=6 \\ u_2+v_5=15 \\ u_3+v_2=1 \\ u_3+v_5=13 \\ u_4+v_2=2 \\ u_4+v_3=7 \\ u_5+v_5=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{ll} u_1=0; & v_1=1; \\ u_2=0; & v_2=3; \\ u_3=-2; & v_3=8; \\ u_4=-1; & v_4=6; \\ u_5=-15; & v_5=15; \end{array}$$

Бос торлар үшін:

$$\begin{cases} 6-3\geq 0 \\ 12-6\geq 0 \\ 16-15\geq 0 \\ 16-1\geq 0 \\ 10-3\geq 0 \\ 8-8\geq 0 \\ 4+1\geq 0 \\ 9-6\geq 0 \\ 11-4\geq 0 \\ 3-0\geq 0 \\ 7-5\geq 0 \\ 15-14\geq 0 \\ 0+14\geq 0 \\ 0+12\geq 0 \\ 0+7\geq 0 \\ 0+9\geq 0 \end{cases}$$

Бос торлар есептелген бағалардың арасында теріс элемент жоқ. Сондықтан тасымалдау есебінің алынған шешімі тиімді болып табылады.

$$X_T = \begin{pmatrix} 50 & 0 & 50 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 200 & 200 \\ 0 & 100 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 100 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тиімді жоспар бойынша тасымалдауға жұмсалатын жалпы шығынды есептейміз:

$$F_{\min} = 1\cdot 50 + 8\cdot 50 + 6\cdot 200 + 15\cdot 200 + 1\cdot 100 + 7\cdot 100 = 5450\,.$$

Жауабы. Алынған жоспарды талдап, келесі қорытындыны алуға болады. Бесінші тұтынушы жалған жабдықтаушыдан 50 бірлік көлемінде жүкті алады, демек оның сұранысы осыншама бірлікке қанағаттандырылмайды.

Тиімді шешім жалғыз емес, себебі (2,3) тор үшін потенциалдар қосындысы тасымалдау құнына тең және оған цикл бойынша 100 бірлік көлемінде жүкті орналастыруға болады. Қайта үлестіру кезінде потенциалдар жүйесі өзгермейді және тасымалдау құны өзгермей бұрынғы күйінде қалады.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Тасымалдау есебінің математикалық моделінің қойылуы.

2. Тасымалдау есебінің экономикалық-математикалық моделінің ерекшеліктері.

3. Жабық модельді, ашық модельді тасымалдау есептері.

4. Жабық модельдегі тасымалдау есебін (жалпы, үлестірімділік, потенциал әдістерімен) шешу алгоритмдері.

5. «Солтүстік-батыс» бұрыш әдісі, ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісі.

6. Бос тордың бағасы қалай анықталады? Тиімділік критерийінің қойылуы.

7. Контур қандай типтегі фигура түрінде берілуі мүмкін?

8. Цикл, қайта есептеу циклы, белгіленген цикл, потенциал, өзгеше жоспар, шығын коэффициенті дегеніміз не?

9. Тасымалдау есебін шығару барысында пайда болуы мүмкін ерекше жағдайлар.

10. Тасымалдау есебінің тірек жоспары тиімді болуы үшін толтырылған торлар және бос торлар үшін қандай қатынастар орындалуы керек?

11-15 есептердің бастапқы мәліметтері кестелерде берілген. Біртекті жүкті өндіру бекетінен тұтынушылар бекетіне ең аз шығынмен жеткізу керек.

а) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алғашқы базистік шешімді табу керек;

ә) «Ең кіші элемент» әдісімен алғашқы базистік шешімді табу керек;

б) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алынған базистік шешімнің тиімділігін тексеру керек;

в) «Ең кіші элемент» әдісімен алынған базистік үлестірудегі бос торлардың бағасын табу керек;

г) «Ең кіші элемент» әдісімен алынған базистік шешіміне үлестірімділік әдісін пайдаланып тиімді үлестіруді анықтау керек;

д) «Солтүстік-батыс бұрыш» әдісімен алынған базистік шешімді пайдалана отырып, потенциалдар әдісінің көмегімен есептің тиімді шешімін және ең аз тасымалдау шығынын табу керек.

11.

4	3	5	555
2	1	6	400
8	2	1	325
525	395	360	

12.

5	15	10	9	60
8	10	9	7	110
7	6	6	9	170
11	5	7	12	160
210	50	90	150	

13.

20	7	8	175
17	19	4	320
8	18	18	345
10	15	5	300
320	430	390	

14.

7	12	18	15	4	200
8	5	2	11	7	170
4	2	15	18	13	130
50	220	80	110	40	

15.

3	11	8	5	6	300
3	2	9	6	12	405
8	13	7	10	8	525
9	6	4	2	10	500
225	475	380	375	275	

16-20 есептердегі ашық модельдегі тасымалдау есебін жабық түрдегі тасымалдау есебіне келтіріп, тиімді шешімін табу керек.

16.

4	3	5	555
2	1	6	400
8	2	1	325
455	325	300	

17.

5	15	10	9	100
8	10	9	7	110
7	6	6	9	170
11	5	7	12	160
210	50	90	150	

18.

5	3	12	4	180
2	3	9	5	70
7	5	9	6	20
40	130	110	50	

19.

20	7	8	175
17	19	4	320
8	18	18	345
10	15	5	300
300	410	390	

20.

2	5	6	7	4	210
3	3	5	8	3	130
5	10	7	10	6	60
190	130	65	45	110	

II - бөлім

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

5 - тарау. ОҢТАЙЛАНДЫРУДЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ ТЕОРИЯСЫНЫҢ НЕГІЗДЕРІ

5.1. Функцияның экстремумы

$\Omega \subseteq R^n$ жиыны және Ω жиынында анықталған $f(X) = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы берілсін.

Кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін

$$f(Y) \le f(X) \qquad (5.1)$$

теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \le \varepsilon\}$ шар бар болса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *төңіректік минимум нүктесі* деп аталады.

Басқаша айтқанда, егер барлық $\delta X = (\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n,)$, $0 < |\delta x_i| < \varepsilon$ үшін

$$f(Y) \le f(Y + \delta X) \qquad (5.1')$$

орындалатындай $\varepsilon > 0$ саны бар болса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *төңіректік минимум нүктесі* деп аталады.

Егер (5.1) ((5.1')) теңсіздік қатаң түрде орындалса ($X \ne Y$, $f(Y) < f(X)$ немесе $f(Y) < f(Y + \delta X)$, онда Y – *қатаң төңіректік минимум нүктесі* деп аталады.

Егер (5.1) ((5.1')) теңсіздік Ω жиынындағы кез келген X үшін орындалса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *ауқымды минимум нүктесі* деп аталады.

Кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін

$$f(Y) \ge f(X) \qquad (5.2)$$

теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \le \varepsilon\}$ шар бар болса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *төңіректік максимум нүктесі* деп аталады.

Басқаша айтқанда, егер барлық $\delta X = (\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n,)$, $0 < |\delta x_i| < \varepsilon$ үшін

$$f(Y) \geq f(Y + \delta X) \qquad (5.2')$$

орындалатындай $\varepsilon > 0$ саны бар болса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *төңіректік максимум нүктесі* деп аталады.

Егер (5.2) ((5.2')) теңсіздік қатаң түрде орындалса ($X \neq Y$, $f(Y) > f(X)$ немесе $f(Y) > f(Y + \delta X)$)), онда Y – *қатаң төңіректік максимум нүктесі* деп аталады.

Егер (5.2) ((5.2')) теңсіздік Ω жиынындағы кез келген X үшін орындалса, онда $Y \in \Omega$ нүктесі $f(X)$ функциясының *ауқымды максимум нүктесі* деп аталады.

$f(X)$ функциясының төңіректік минимум және максимум нүктелері осы функцияның *экстремум нүктелері* деп аталады.

Егер

а) функцияның x^* – төңіректік минимум нүктесі $[a, b]$ кесіндісінде жатса;

ә) минимум нүктесінің бір жағынан алынған кесіндінің кез келген x_1 және x_2 нүктелері үшін минимум нүктесіне жақынырақ x_1 нүктесіне функияның аз мәні сәйкес келсе, яғни $x^* < x_1 < x_2$ теңсіздігі үшін де, $x_2 < x_1 < x^*$ теңсіздігі үшін де $f(x_1) < f(x_2)$ теңсіздігі ақиқат болса, онда $y = f(x)$ үзіліссіз функциясы $[a, b]$ кесіндісінде *унимодальды* деп аталады.

Теорема 5.1 (*$[a, b]$ кесіндісінде $f(x)$ функциясының унимодальдылығының жеткілікті шарты*). Егер $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде екі рет дифференциалданса, және осы кесіндінің кез келген нүктесінде $f''(x) > 0$ болса, онда $f(x)$ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде унимодальды.

5.1-мысал.

$f(x) = 2x^2 - \ln x$ функциясы үшін функция унимодальды болатын X аралығын табу керек.

Шығарылуы. $f(x)$ функциясының анықталу облысы – $x > 0$. Функцияның бірінші және екінші ретті туындыларын табамыз:

$$f'(x)=4x-\frac{1}{x},\ f''(x)=4+\frac{1}{x^2},\ x\in(0,\infty).$$

$f''(x)>0$. Демек, $f(x)$ функциясы $(0;\infty)$ аралығында унимодальды.

Жауабы. Берілген функция $(0, \infty)$ аралығында унимодальды.

5.2. Оңтайландыру есебінің қойылуы

Жалпы жағдайда оңтайландыру есебі, немесе экстремумды анықтау есесбі былай қойылады: $\Omega\subseteq R^n$ жиынында анықталған $f(\mathrm{X})=f(x_1,x_2,...,x_n)$ функциясы және $D\subseteq R^n$ жиыны берілсін.

$f(\mathrm{X})$ функциясы экстремум (минимум немесе максимум) мәнін қабылдайтындай $\mathrm{Y}\in D$ нүктесін табу керек, яғни

$$f(\mathrm{Y})=extr\,f(\mathrm{X})\ \text{және}\ Y\in D. \tag{5.3}$$

$f(\mathrm{X})$ функциясының барлық төңіректік минимумын (максимумын) іздеу есебі *шартсыз оңтайландыру есебі* деп, $f(\mathrm{X})$ функциясы – *мақсат функциясы* деп, X айнымалылары *басқарылатын айнымалылар* деп, D – *жарамды жиын* деп, және басқарылатын айнымалылардың D жиынында жататын кез келген Y мәндер жиыны $(Y\in D)$ – оңтайландыру есебінің *жарамды шешімі* деп аталады.

$f(\mathrm{X})$ мақсат функциясының төңіректік минимум нүктесін іздеу есебінің символдық жазылуы:

$$f(\mathrm{X})\to\min,\ X\in\mathrm{R}^n. \tag{5.4}$$

Осылайша, $f(\mathrm{X})$ мақсат функциясының төңіректік максимум нүктесін іздеу есебінің символдық жазылуы:

$$f(\mathrm{X})\to\max,\ \mathrm{X}\in\mathrm{R}^n. \tag{5.5}$$

Осы есептердің төңіректік және ауқымды шешімдерінің жиыны беттескенде (5.5) есеп келесі есепке пара-пар болады:

$$-f(\mathrm{X})\to\min,\ X\in\mathrm{R}^n.$$

$f(\mathrm{X})$ функциясы өзінің экстремумын қабылдайтын ізделінді Y нүктесі $f(\mathrm{X})$ функциясының Ω анықталу облысы мен D жарамды жиынның қиылысуында жатады.

Басқаша айтқанда, егер Ω және D жиындары R^n кеңістігімен толықтай беттессе $(\Omega = D = R^n)$, онда мұндай есеп *шартсыз экстремум есебі* деп аталады. Егер Ω немесе D жиындарының біреуі R^n кеңістігінің жеке ішкі жиыны ($\Omega \in R^n$, $D \in R^n$) болса, немесе Ω және D жиындары қиылысса ($\Omega \cap D \neq \varnothing$), онда мұндай есеп *шартты экстремум есебі* деп аталады, кері жағдайда ($\Omega \cap D \neq \varnothing$) экстремум нүктесі болмайды.

Дербес жағдайды қарастырайық: егер Ω және D жиындары Y нүктесінде қиылысса, онда экстремумды іздеу мәселесін қозғаудың қажеті жоқ, осы Y нүктесі жалғыз жарамды шешім болып табылады.

Көбінесе шартты экстремум есебінде D жарамды шешімдер жиынының өзі емес, ал оны анықтайтын қатынастар жүйесі беріледі:

$$\psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq (=, \geq) 0, \; j = 1, 2, ..., m, \qquad (5.6)$$

яғни

$$D = \{X : \psi_j(X) \leq (=, \geq) 0, \; j = 1, 2, ..., m\} \subseteq R^n,$$

немесе D жиыны бір мезгілде айқындалған түрде де, шектеулер жүйесімен де берілуі мүмкін.

Немесе

– $f(\mathrm{X})$ функциясы экстремумды қабылдайтындай $Y \in R^n$ нүктесін табу $f(\mathrm{X})$ мақсат функциясының шартсыз экстремум есебі болып табылады:

$$f(Y) = extr\, f(X);$$

– $f(\mathrm{X})$ функциясы экстремумды қабылдайтындай $Y \in P \subseteq R^n$ нүктесін табу $f(\mathrm{X})$ мақсат функциясының шартты экстремум есебі болып табылады:

$$f(Y) = extr\, f(X),$$

бұл жерде Y нүктесі

$$\psi_j(x_1, x_2, ..., x_n) \leq (=, \geq) 0, \; j = 1, 2, ..., m$$

шектеулерін қанағаттандыру керек, мұндағы $\psi_j(X)$ қандайда бір $\Omega' \subseteq R^n$ жиынында берілген, яғни $(Y \in \Omega \cap \Omega' \cap D)$,

$$D=\left\{X: X \in P, \psi_j(X) \leq (=, \geq) 0,\ j=1, 2, \ldots, m\right\} \subseteq R^n .$$

Бұл жерде $\Omega \cap \Omega'$ – $f(\mathrm{X})$ және $\psi(X)$ функцияларының анықталу облысы болып табылады.

Егер шектеу басқа шектеулердің салдары болса, онда ол *артылған шектеу* деп аталады.

$X \in P$ түріндегі шарт *тура шектеу* деп аталады.

Практикалық қосымшаларда шартсыз экстремумды табу есебі өте сирек кездеседі.

Егер шартты экстремум нүктесінде шектеулер-теңсіздіктерінің біреуі теңдік ретінде орындалса, онда осындай шектеуді туғызды-рып отырған ресурс – *дефицит* деп, ал шектеудің өзі – *белсенді* деп аталады. Егер шартты экстремум нүктесінде шектеулер қатаң теңсіздіктермен берілсе және теңсіздіктердің біреуі теңдік ретінде орындалса, сәйкес ресурс – *дефицит емес* деп, ал шектеудің өзі – *белсенді емес* деп аталады. Шектеулер-теңдеулер өз алдына – белсенді шектеулер болып табылады.

Егер $f(\mathrm{X})$ функциясының Y – шартсыз төңіректік экстремум нүктесі D жарамды мәндер жиынының ішінде жатса, онда шектеулер бірден орындалады, ал егер Y нүктесі D жарамды мәндер жиынынан тыс жатса, онда $f(\mathrm{X})$ функциясының шартты төңіректік экстремум нүктесі D жиынының шекарасында жатады, яғни шектеулер-теңсіздіктер шектеулер-теңдіктерге айналады.

Шектеулері тек қана теңдіктермен берілген есептерде m шектеулер саны n айнымалылар санынан кіші ($m < n$) болуы керек, $m > n$ болған жағдайда (5.6) шектеулерде кем дегенде ($m - n$) артылған шектеу, не (5.6) шектеулер жүйесі қайта анықталған болып табылады, демек, жарамды шешімі жоқ. Жүйе қайта анықталған жағдайда жарамды шешім болмайды, және ол қарастырылмайды. Артылған шектеулерді (егер олар бар болса) жойғаннан кейін (5.6) жүйеде тәуелсіз шектеулер саны $m \leq n$ болады. $m = n$ болған жағдайда жарамды шешім біреу болады, және ол қызығушылық туғызбайды. $m < n$ болғанда тиімді шешімді іздеу есебінің мағынасы болады.

5.3. Шартсыз экстремумның бар болу шарты

Қарастырылып отырған нүкте экстремум нүктесін білдіретін мәселеден шығатын шарт – қажетті шарт, экстремум нүктесі болып табылатындығынан шығатын шарт – жеткілікті шарт болып есептеледі.

Шартсыз экстремумның бар болуының қажетті және жеткілікті шарттары математикалық анализ курсында қарастырылады. Біз бір және көп айнымалы функция үшін бірінші ретті төңіректік шартсыз экстремумның қажетті шарттары жайында келесі теоремаларды қарастырамыз.

Теорема 5.2. $f(x)$ функциясы R жиынында берілсін және қандай да бір $y \in R$ нүктесінде дифференциалданатын болсын. Егер осы y нүктесінде $f(x)$ функциясының төңіректік экстремумы бар болса

$$f(y) = extr\ f(x),$$

онда

$$\frac{df(y)}{dx} = 0\,. \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial F}{\partial l} = \lim_{\lambda \to +0} \frac{F(X + \lambda l) - F(X)}{\lambda}$$

шегі l бағыты бойынша $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының $\frac{\partial F}{\partial L}$ *туындысы* деп аталады.

l бағыты көбінесе $l = (l_1, l_2, ..., l_n)$ векторымен беріледі.

Егер F функциясы X нүктесінде дифференциалданатын болса, онда оның осы нүктеде дербес туындылар арқылы өрнектелетін $\frac{\partial F}{\partial l} = \frac{1}{|l|} \sum_{i=1}^{n} l_i \cdot \frac{\partial F}{\partial x_i}$ кез келген туындысы бар болады.

Бағыт бойынша туындының абсолют шамасы функцияның осы бағыттағы өзгеру жылдамдығын, ал таңбасы функцияның өзгеру сипатын (өсуін немесе кемуін) көрсетеді.

Координаталық осьтерге түсірілген проекциялары сәйкес дербес туынды болатын векторды $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясының *градиенті* деп айтамыз, және ∇F немесе $grad\ F(X)$ арқылы белгілейміз, яғни,

$$\nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

l бағыты мен ∇F бағыты бірдей болған кезде $\frac{\partial F}{\partial l}$ максимумға жетеді.

Сонымен, әрбір X нүктесінде градиент функцияның ең үлкен өсу бағыты, ал градиент ұзындығы функцияның осы нүктедегі өсуінің ең үлкен жылдамдығы болып табылады.

Теорема 5.3. $f(\mathrm{X})$ функциясы R^n кеңістігінде берілсін және қандай да бір $Y \in R^n$ нүктесінде дифференциалданатын болсын. Егер осы Y нүктесінде $f(\mathrm{X})$ функциясының төңіректік экстремумы бар болса,

$$f(y) = extr\ f(x),$$

онда $f(\mathrm{X})$ функциясының осы нүктедегі дербес туындысы нөлге тең, яғни

$$\frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathrm{Y}) = 0 \quad (j = 1, 2, ..., n).$$

Басқаша айтқанда осы нүктеде функцияның градиенті

$$\nabla f(Y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

нөлдік векторға тең, яғни $\nabla f(\mathrm{Y}) = 0$.

$\nabla f(Y) = 0$ шартын қанағаттандыратын Y нүктесі $f(\mathrm{X})$ функциясының *стационар* немесе *күдікті нүктесі* деп аталады.

5.2 және 5.3-теоремаларға сәйкес төңіректік экстремум нүктелерін күдікті нүктелердің арасынан іздеу керек.

5.2-мысал.

$$f(X) = \alpha_1 x_1^2 + \alpha_2 x_2^2 + \alpha_3 x_3^2$$

функциясының стационар нүктелерін табу керек.

Шығарылуы. Стационар нүктелерді табу үшін алдымен $f(X)$ функциясының бірінші дербес туындыларын есептейміз:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}=2\alpha_1 x_1,\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}=2\alpha_2 x_2,\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_3}=2\alpha_3 x_3.$$

$f(X)$ функциясының стационар нүктелерін (5.7) теңдікке сәйкес келесі теңдеулер жүйесінен табамыз:

$$\begin{cases} 2\alpha_1 x_1 = 0, \\ 2\alpha_2 x_2 = 0, \\ 2\alpha_3 x_3 = 0. \end{cases}$$

Бұл жүйенің жалғыз ғана шешімі бар, және ол стационар нүктені анықтайды: $Y=(y_1,\, y_2,\, y_3)=(0,\,0,\,0)$. Егер $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$ болса, онда Y нүктесі – минимум нүктесі болып табылады, себебі кез келген $X \neq Y$ үшін $f(Y) \leq f(X)$.

Жауабы. $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 \geq 0$ болған жағдайда Y нүктесі – минимум нүктесі болып табылады.

5.3-мысал.

5.2-мысалдың дербес жағдайын қарастырайық. Айталық, $\alpha_1 \geq 0$, $\alpha_2 \geq 0$, $\alpha_3 = 0$: $f(X)=8x_1^{\,2}-5x_2^{\,2}$.

Шығарылуы. $Y=(0,\,0,\,0)$ стационар нүктесі берілген функцияның минимум нүктесі де, максимум нүктесі де болмайды. Себебі, $\{x_1,\,0,\,0\}$ нүктелер жиынында $f(x_1,\,0,\,0)=8x_1^{\,2}>0$ – берілген функция өседі, ал $\{0,\,x_2,\,0\}$ нүктелер жиынында $f(0,x_2,0)=-5x_2^2<0$ берілген функция кемиді. Бұл жағдайда $Y=(0,\,0,\,0)$ *ер нүктесі*, ал $f(X)$ функциясының графигі *ер беті* болып табылады.

Жауабы. $Y=(0,\,0,\,0)$ стационар нүктесі минимум нүктесі де, максимум нүктесі де болмайды.

5.4-мысал.

$$f(X)=(x_1-5)^5+(x_2+5)^3$$

функциясының стационар нүктелерін табу керек.

Шығарылуы. Функцияның дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1}=5(x_1-5)^4,\ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2}=3(x_2+5)^2.$$

Алынған дербес туындыларды нөлге теңестіреміз:

$$5(x_1-5)^4=0,$$

$$3(x_2+5)^2=0.$$

Жалғыз стационар нүкте бар: $Y=(5,-5)$ және $f(5,-5)=0$. Берілген есепте $f(X)$ функциясы $Y=(5,-5)$ стационар нүктесінде x_1 айнымалысы бойынша да, x_2 айнымалысы бойынша да өседі. Мұндай стационар нүкте де экстремум нүктесі болмайды, және *иілу нүктесі* деп аталады.

Жауабы. $Y=(5,-5)$ стационар нүктесі экстремум нүктесі емес.

Қарастырылған мысалдардан келесі қорытындыны алуға болады: егер Y нүктесі $f(X)$ функциясының анықталу облысындағы стационар нүктесі болса, онда ол $f(X)$ функциясының экстремум нүктесі дегенді білдірмейді, яғни қажетті шарт жеткілікті шарт болмауы мүмкін. Ер нүктелері және иілу нүктелері стационар нүктелері болып табылады, бірақ экстремум нүктелері болмайды.

n ретті $A=a_{ij}$ квадрат матрицасы және $\mathbf{x}\in R^n$ векторы берілсін. A матрицасының $\mathbf{x}$ векторына көбейтіндісі $y_i=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j$ $(i=1, 2,..., n)$ қатынасымен анықталатын $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ векторын береді. Егер $a_{ij}=a_{ji}$ болса, онда A квадрат матрицасы *симметриялы* деп аталады.

Егер кез келген $\mathbf{x}\in R^n$ векторы үшін $\mathbf{y}=A\mathbf{x}$ және $\mathbf{x}$ векторларының скаляр көбейтіндісі теріс емес болса, яғни $(A\mathbf{x},\mathbf{x})\geq 0$, онда A симметриялы матрицасы *теріс емес анықталған*; егер $(A\mathbf{x},\mathbf{x})>0$, $\mathbf{x}\neq 0$ болса, онда A симметриялы матрицасы *оң анықталған*; егер $(A\mathbf{x},\mathbf{x})\leq 0$ болса, онда A симметриялы матрицасы *оң емес анықталған;* егер $(A\mathbf{x},\mathbf{x})<0$, $\mathbf{x}\neq 0$ болса, онда A симметриялы матрицасы *теріс анықталған* деп аталады.

A матрицасының бас диагоналының бойындағы бірдей нөмірлі алғашқы i тік жолдар мен жатық жолдарда орналасқан анықтауыштар A матрицасының $\Delta_i(A)$ *бұрыштық минорлары* деп аталады:

$$\Delta_1 = a_{11},\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

A матрицасының бірдей нөмірлі $n-i$ тік жолдарымен жатық жолдарын сызып тастағанда алынатын, бас диагоналының бойында бірдей нөмірлі i тік жолдар мен жатық жолдарда орналасқан, i-ші ретті анықтауыштар A матрицасының M_i *бас минорлары* деп аталады.

Сильвестр критерийі:

– егер A симметриялы матрицасының барлық бұрыштық минорларының таңбасы оң болса, яғни $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 > 0$, ..., $\Delta_n > 0$ ($\det A > 0$), онда A матрицасы *оң анықталған* деп аталады;

– егер A симметриялы матрицасының k-шы бұрыштық минорларының Δ_k таңбасы $(-1)^k$ таңбасына тең, яғни $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$,... болса, онда A матрицасы *теріс анықталған* деп аталады;

– егер A симметриялы матрицасы өзгеше және оның бас минорлары теріс емес болса, яғни $M_k \geq 0$, онда A матрицасы *теріс емес анықталған* (жартылай оң анықталған) деп аталады;

– егер A симметриялы матрицасының k-шы M_k бас минорының мәні не нөлге тең болса, не оның таңбасы $(-1)^k$ таңбасына тең болса, онда A матрицасы *оң емес анықталған* (жартылай теріс анықталған) деп аталады.

$$H(X)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{pmatrix}$$

түріндегі матрица $f(X)$ функциясының *Гессе матрицасы* деп аталады.

Теорема 5.4. Егер X нүктесі – (5.4) ((5.5)) есептің төңіректік шешімі және $f(X)$ функциясының осы нүктеде үзіліссіз екінші ретті дербес туындысы бар болса, онда $f(X)$ функциясының Гессе матрицасы Y нүктесінде оң емес (теріс емес) анықталған болып табылады.

5.4-теорема төңіректік шартсыз экстремумның қажетті шартын нақтылайды және екінші ретті төңіректік экстремумның қажетті шартын анықтайды.

Теорема 5.5 (*көп айнымалы функция үшін шартсыз экстремумның бар болуының жеткілікті шарттары жайында*). Егер Y нүктесі $f(X)$ функциясының стационар нүктесі (яғни $\nabla f(\mathrm{Y})=0$) болып табылса, және $f(x)$ функциясының Гессе матрицасы Y нүктесінде оң анықталған болса, онда Y – $f(X)$ функциясының қатаң төңіректік минимум нүктесі болады; егер Y нүктесі $f(X)$ функциясының стационар нүктесі болса, және $f(X)$ функциясының Гессе матрицасы Y нүктесінде теріс анықталған болса, онда Y – $f(X)$ функциясының қатаң төңіректік максимум нүктесі болады.

Егер $H(Y)$ Гессе матрицасы анықталған таңбалы болмаса, онда Y нүктесінде экстремум жоқ.

Теорема 5.6 (*екі айнымалы функция үшін шартсыз экстремумның бар болуының жеткілікті шарттары жайында*). Айталық, $f(X)$ функциясы R^n жиынында берілсін, және $Y=(y_1,y_2)\in R^n$ нүктеде $f(X)$ функциясының екінші ретті туындысы бар және үзіліссіз болатындай стационар нүктесі бар болсын: $\frac{\partial f(Y)}{\partial x_1}=0$, $\frac{\partial f(Y)}{\partial x_2}=0$.

– Егер Y нүктесінде

$$\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0 \tag{5.8}$$

теңсіздігі орындалса, онда

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} > 0$ – төңіректік минимум нүктесі;

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} > 0$ – Y төңіректік максимум нүктесі.

– Егер (5.8) өрнек Y нүктесінде орындалмаса, онда Y нүктесінде экстремум жоқ.

5.6-теорема 5.5-теореманың дербес жағдайы болып табылады.

5.5-мысал.

5.3-мысалға 5.4-теореманы қолданайық.

Шығарылуы. $f(X) = 8x_1^{\ 2} - 5x_2^{\ 2}$. Екінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial f(X)}{\partial x_1} = 16x_1, \ \frac{\partial f(X)}{\partial x_2} = -10x_2;$$

$$\frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1^{\ 2}} = 16, \ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_2^{\ 2}} = -10, \ \frac{\partial^2 f(X)}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

(5.8) қатынасты тексеретін болсақ,

$$\left(\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_1^2} \cdot \frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_2^2} - \left(\frac{\partial^2 f(Y)}{\partial x_1 \partial x_2} \right)^2 > 0 \right).$$

$16 \cdot (-10) - 0 < 0$, яғни 5.6-теоремаға сәйкес $Y = (0, 0)$ стационар нүктесі – экстремум нүктесі емес.

Жауабы. $Y = (0, 0, 0)$ стационар нүктесі экстремум нүктесі емес.

Анықтама бойынша, егер барлық жеткілікті кіші $\alpha > 0$ үшін $f(Y+\alpha\delta X) < (>) f(Y)$ теңсіздігі орындалса, R^n жиынында берілген $f(X)$ функциясы үшін $Y \in R^n$ нүктесінде $\delta X \in R^n$ векторы *кему (өсу) бағытын* береді. Y нүктесінде $f(X)$ функциясының барлық δX кему (өсу) бағыттары $W(Y,f) \subseteq R^n$ *кему (өсу) бағыттарының жиынын* құрайды.

Қатаң экстремумның анықтамасына сәйкес, егер Y нүктесіндегі $f(X)$ функциясының $W(Y,f)$ өсу (кему) бағытының жиынында тұтасымен жататын Y нүктесінің $U_\varepsilon(Y)$ маңайы бар болса, онда Y нүктесі $f(X)$ функциясының минимум (максимум) нүктесі болып табылады.

Теорема 5.7. $f(X)$ функциясы $Y \in R^n$ нүктесінде дифференциалданатын болсын.

– Егер $\delta X \in R^n$ векторы

$$\nabla f(Y) \cdot \delta X < (>) 0$$

шартын қанағаттандырса, онда δX – Y нүктесіндегі $f(X)$ функциясының $W(Y,f)$ кему (өсу) бағытының жиынына тиісті.

– Егер $\delta X \in W(Y,f)$ болса, онда

$$\nabla f(Y) \cdot \delta X \le (\ge) 0.$$

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Төңіректік максимум (минимум), қатаң төңіректік максимум (минимум), ауқымды максимум (минимум), экстремум нүктелері деп қандай нүктелерді айтамыз?

2. Басқарылатын айнымалылар, мақсат функциясы, жарамды жиын, жарамды шешім ұғымдары.

3. Шартсыз (шартты) экстремум есептері.

4. Стационар (күдікті) нүктенің, градиенттің анықтамасы.

5. Теріс емес, теріс, оң емес, оң анықталған матрицалардың анықтамалары. Сильвестр критерийі.

6. Көп айнымалы функция үшін шартсыз экстремумның бар болуының жеткілікті шарты қандай?

7. Гессе матрицасының түрі.

8. Ер нүктелері және иілу нүктелеріне мысалдар келтіріңіз.

ауқымды мән болып табылады. Егер ішкі стационар нүктелер жоқ болса, онда экстремум мәні тек қана облыс шекарасында болуы мүмкін.

D жарамды мәндер жиынының шекарасындағы мақсат функциясының мәндерін есептемеу үшін, ал D облысының ішкі нүктелері үшін де, шекарасындағы нүктелер үшін де қажетті және жеткілікті шарттарды қисынға келтіру үшін *оңтайландырудың классикалық есебі* деп аталатын (5.3), (5.6) есебінің дербес жағдайын қарастырамыз.

$Y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ нүктесі

$$\psi_j(X) = 0, \; j = 1, 2, ..., m < n, \tag{6.2}$$

шектеулер-теңдіктерді қанағаттандыратындай, яғни $Y \in D$, $f(X)$ функциясының Y төңіректік экстремум нүктесін табу қажет,

$$f(\mathrm{Y}) = extr\, f(\mathrm{X}), \tag{6.3}$$

мұндағы жарамды жиын былайша анықталады:

$$D = \{X : \psi_j(X) = 0, \; j = 1, 2, ..., m\} \subset R^n, \tag{6.3'}$$

және $D \subseteq \Omega \cap \Omega'$.

Шартты оңтайландыру теориясында шартты экстремум есебін шартсыз экстремум есебіне келтіретін көптеген әдістер бар. Осындай кеңінен тараған әдістердің біріне келесі қарастырылғалы отырған Лагранждың көбейткіштер әдісі жатады.

6.2. Лагранждың көбейткіштер әдісі

Лагранж әдісінің негізгі идеясы шартсыз төңіректік Y экстремум нүктесі (6.2)-(6.3) есептің $f(X)$ функциясының шартты төңіректік экстремумымен беттесетін *Лагранж функциясы* деп аталатын көмекші функция құру.

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j(X) \tag{6.4}$$

түріндегі функция жоғарыда айтылған қасиеттерді қамтиды, λ_0 және $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \in R^m$ параметрлері *Лагранж көбейткіш-*

тері деп аталады. Лагранж функциясын келесі түрде де жазуға болады:

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) - \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j(X). \qquad (6.4')$$

Егер $f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары үзіліссіз және бірінші ретті дербес туындысы бар болса, онда $L(\Lambda, \lambda_0, X)$ функциясының x_i, $i = 1, 2, ..., n$ координаталары бойынша осы функцияның дербес туындылары келесі түрді қабылдайды:

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial x_i} = \lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i}, \qquad (6.5)$$

және олардан құрылған вектордың белгіленуі:

$$L'_X(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f'(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi'_j(X). \qquad (6.6)$$

$L(\Lambda, \lambda_0, X)$ функциясының λ_j, $j = 1, 2, ..., m$ координаталары бойынша дербес туындылары барлық уақытта бар және

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial \lambda_j} = \psi_j(X). \qquad (6.7)$$

Теорема 6.3 (*Лагранж көбейткіштерінің ережесі, шартсыз оңтайландыру есебінің бірінші ретті экстремумының қажетті шарты*). Егер $Y \in D \subseteq R^n$ нүктесінің маңайында $f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары үзіліссіз дифференциалданатындай және Y нүктесінде Якоби матрицасының $J_0(Y) = \left\{ \frac{\partial \psi_j(Y)}{\partial x_i} \right\}$ рангі m-ге тең болатындай (6.2)-(6.3) шартты экстремум есебінің

$$f(Y) = extr\, f(X), \text{ және } \psi_j(Y) = 0, \; j = 1, 2, ..., m,$$

Y – тиімді оптимум нүктесі болса, онда $(\Lambda', \lambda'_0, X)$ нүктесі (6.2)-(6.3) есебіне

$$\nabla L(\Lambda', 1, Y) = 0 \tag{6.8}$$

сәйкес (6.4) Лагранж функциясының шартсыз экстремум есебінің стационар нүктесі болып табылатындай бір мезгілде нөлге тең емес Λ' векторы, λ_0' параметрі бар болады.

(6.6)-(6.7) туындыларының түрлерін ескере отырып, (6.4) Лагранж функциясының Y стационар нүктесін келесі шартты қанағаттандыратындай нүкте ретінде анықтауға болады:

$$L_X'(\Lambda, \lambda_0, Y) = 0,\ \psi_j(X) = 0,\ j = 1, 2, ..., m.$$

Шартсыз экстремум есебінен өзге Лагранж функциясының стационар нүктесі D облысының шекарасында жатуы мүмкін.

Егер λ_j параметрлерінің мәні бір мезгілде нөлге тең болса, онда Лагранж функциясын құрудың мағынасы жойылады. Сол сияқты, (Λ', Y) стационар нүктеде $\nabla f(Y)$, $\nabla \psi_j(Y) = 0$, j = 1, 2, ..., m – градиенттер жиыны сызықты тәуелсіз болады.

$\lambda_0 \neq 0$ қатынасын қанағаттандыратын шарт (яғни $\lambda_0 = 1$), *регулярлық шарт* деп, және $L(\Lambda, 1, X) = L(\Lambda, X)$ – Лагранж функциясы *регулярлық функция* деп аталады,

$$L(\Lambda, X) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j(X).$$

Регулярлық шарттың кең тарағаны – Y экстремум нүктесінде $J_0(Y) = \left\{\frac{\partial \psi_j(Y)}{\partial x_i}\right\}$ матрицасының рангі m-ге тең болуы. Бұл – $J_0(X)$ матрицасының m жатық жолы сызықты тәуелсіз болғандықтан $\psi_j(Y)$, j = 1, 2, ..., m функциясының Y нүктесінде градиенттер жиынының сызықтық тәуелсіздігімен пара-пар. Осы шарт 6.3-теоремада пайдаланылады. Регулярлық шартты Y экстремум нүктесі табылғаннан кейін ғана тексеруге болады.

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial x_i} = \lambda_0 \frac{\partial f(X)}{\partial x_i} + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \frac{\partial \psi_j(X)}{\partial x_i} = 0,\ i = 1, 2, ..., n,$$

$$\frac{\partial L(\Lambda, \lambda_0, X)}{\partial x_i} = \psi_j(X) = 0,\ j = 1, 2, ..., m$$

$(n+m)$ теңдеулері $L(\Lambda,\lambda_0,X)$ функциясының стационарлығының қажетті шартын қанағаттандыратын Y және Λ' векторларын анықтауға мүмкіндік береді. $L(\Lambda,\lambda_0,X)$ функциясының (Λ',Y) стационар нүктесі экстремум нүктесі болмауы мүмкін болса, (Λ',Y) нүктесін экстремумға зерттеу керектігі айқын. Бұл үшін 5.4 және 5.6-теоремалардан өзге $L(\Lambda,\lambda_0,X)$ функциясының екінші ретті туындысы пайдаланылатын арнайы қажетті және жеткілікті шарттарды пайдалануға болады.

Егер $f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары үзіліссіз және кем дегенде екінші ретті дербес туындысы бар болса, онда $L(\Lambda,\lambda_0,X)$ функциясының X координаталары бойынша екінші ретті туындыларының матрицасын мына түрде белгілейміз:

$$L''_{XX}(\Lambda,\lambda_0,X)=\lambda_0 f''(X)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j\psi''_j(X).$$

Сонда Лагранждың регулярлық функциясының Гессе матрицасы көмкеруші матрица болып табылатын $(n+m)\times(n+m)$ ретті блокты матрица түріне келтірілуі мүмкін:

$$H(\Lambda,X)=\begin{pmatrix}\{0\} & G(X)\\ G^T(X) & L''_{XX}(\Lambda,X)\end{pmatrix}_{(n+m)\times(n+m)},$$

мұндағы

$$L''_{XX}(\Lambda,X)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial^2 L(\Lambda,X)}{\partial x_1\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 L(\Lambda,X)}{\partial x_1\partial x_n}\\ \dots & \dots & \dots\\ \dfrac{\partial^2 L(\Lambda,X)}{\partial x_n\partial x_1} & \dots & \dfrac{\partial^2 L(\Lambda,X)}{\partial x_n\partial x_n}\end{pmatrix} \text{ және}$$

$$G(X)=\begin{pmatrix}\nabla\psi_1(X)\\ \dots\\ \nabla\psi_m(X)\end{pmatrix}_{m\times n};$$

$G^T(X)$ – $G(X)$ матрицасына транспонирленген матрица, $\{0\}$ – $m\times m$ ретті нөлдік квадраттық матрица ($L(\Lambda,X)$ функциясы Λ параметрлерінен сызықты тәуелді болғандықтан).

Теорема 6.4 (*оңтайландыру есебінің екінші ретті экстремумының қажетті шарты*). Егер Y нүктесінің маңайында $f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары екі рет үзіліссіз дифференциалданатындай және $J_0(Y)=\left\{\dfrac{\partial\psi_j(Y)}{\partial x_i}\right\}$ матрицасының рангі m-ге тең болатындай Y нүктесі – (6.2)-(6.3) шартты экстремум есебінің төңіректік оптимум нүктесі болса,

$$f(Y)=\max(\min)f(X) \text{ және } \psi_j(Y)=0,\ \ j=1, 2, ..., m,$$

онда (6.4) Лагранж функциясының (Λ', Y) стационар нүктесінде

$$\nabla\psi_j(Y)\cdot\delta X=0,\ \ j=1, 2, ..., m$$

шартын қанағаттандыратын барлық нөлдік емес δX мәндері үшін

$$\delta X\cdot L''_{XX}(\Lambda', Y)\cdot\delta X^T\le(\ge)0$$

теңсіздігі орындалады.

Теорема 6.5 (*x_i координаталары бойынша Лагранж функциясының екінші ретті туындысына қатысты экстремумның жеткілікті шарты*). Айталық, жарамды Y нүктесінде

$$Y\in D=\{X:\psi_j(X)=0,\ \ j=1, 2, ..., m\}\subseteq R^n,$$

$f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Егер

$$\nabla L(\Lambda', Y)=0 \tag{6.9}$$

үшін

$$\nabla\psi_j(Y)\cdot\delta X=0$$

шартын қанағаттандыратын барлық нөлдік емес δX үшін

$$\delta X\cdot L''_{XX}(\Lambda', Y)\cdot\delta X^T<(>)0, \tag{6.10}$$

қатаң теңсіздігі орындалатын нөлге тең емес (Λ', λ'_0) мәні бар болса, онда Y нүктесі – (6.2)-(6.3) шартты экстремум есебінің төңіректік минимум (максимум) нүктесі болады.

6.1-мысал.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2, \\ x_2 + x_3 = 2 \end{cases}$$

шектеулеріндегі

$$f = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$$

функциясының шартты экстремум нүктелерін табу керек.

Шығарылуы. Қарастырылып отырған есептің Лагранж функциясын құрамыз:

$$L(\Lambda,\, X) = x_1 x_2 + x_2 x_3 + \lambda_1 (x_1 + x_2 - 2) + \lambda_2 (x_2 + x_3 - 2).$$

(Λ', Y) нүктесі $L(\Lambda,\, X)$ функциясының стационар нүктесі болуы үшін экстремумның қажетті шарттары орындалуы керек:

$$\frac{\partial L(\Lambda,\, X)}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1,$$

$$\frac{\partial L(\Lambda,\, X)}{\partial x_2} = x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2,$$

$$\frac{\partial L(\Lambda,\, X)}{\partial x_3} = x_2 + \lambda_2,$$

$$\frac{\partial (\Lambda,\, X)}{\partial \lambda_1} = x_1 + x_2 - 2,$$

$$\frac{\partial (\Lambda,\, X)}{\partial \lambda_2} = x_2 + x_3 - 2.$$

$$\begin{cases} x_2 + \lambda_1 = 0, \\ x_1 + x_3 + \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ x_2 + \lambda_2 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2 = 0, \\ x_2 + x_3 - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = -\lambda_1, \\ x_2 = -\lambda_2, \\ x_3 = 2 - x_2, \\ x_1 + 2 + \lambda_1 + \lambda_1 + \lambda_1 = 0, \\ x_1 = 2 + \lambda_1. \end{cases}$$

Жүйенің соңғы екі теңдеуінен λ_1 мәнін анықтауға болады:

$$2+\lambda_1+2+\lambda_1+\lambda_1+\lambda_1=0.$$

$$\begin{cases} \lambda_1=-1, \\ x_2=1, \\ x_1=1, \\ x_3=1, \\ \lambda_2=-1. \end{cases}$$

$$\psi_1(x)=x_1+x_2-2=0,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1}=1,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial\psi_1}{\partial x_3}=0.$$

$$\psi_2(x)=x_2+x_3-2=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1}=0,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2}=1,\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_3}=1.$$

Төмендегідей координаталары бар (Λ^*, Y^*) нүктесі жүйенің стационар нүктесі болып табылады:

$$Y^*=(1,1,1),\ \Lambda^*=(-1,-1).$$

$$f(Y^*)=1\cdot 1+1\cdot 1=2.$$

Табылған нүкте қарастырылып отырған $L(\Lambda, Y)$ функциясының экстремум нүктесі бола ма?

Алдымен (6.9) шартты қанағаттандыратын $\delta X=(\delta x_1, \delta x_2, \delta x_3)$ векторын табамыз,

$$\nabla\psi_1(Y)\cdot\delta X=\frac{\partial\psi_1(Y)}{\partial x_1}\delta x_1+\frac{\partial\psi_1(Y)}{\partial x_2}\delta x_2+\frac{\partial\psi_1(Y)}{\partial x_3}\delta x_3=0,$$

$$j=1:\ \delta x_1+\delta x_2=0,\ \Rightarrow\ \delta x_1=-\delta x_2,$$

$$j=2:\ \delta x_2+\delta x_3=0,\ \Rightarrow \delta x_3=-\delta x_2.$$

Сонымен, ізделінді вектордың координаталары:

$$\delta X=(-\delta x_2, \delta x_2, -\delta x_2).$$

$L(\Lambda, Y)$ функциясының $L''_{XX}(\Lambda, X)$ матрицасын есептейміз:

$$L''_{XX}(\Lambda, X)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$L''_{XX}(\Lambda, X)$ матрицасын (6.10) теңсіздігінің сол жағына қоямыз. Алынған δX векторын ескерсек

$$\delta X \cdot L''_{XX}(\Lambda', Y)\cdot \delta X^T = (-\delta x_2, \delta x_2, -\delta x_2)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\delta x_2 \\ \delta x_2 \\ -\delta x_2 \end{pmatrix},$$

немесе

$$\delta X \cdot L''_{XX}(\Lambda', Y)\cdot \delta X^T = -4\delta x_2{}^2 < 0.$$

Сонда $Y^* = (1, 1, 1)$ стационар нүктесі – минимум нүктесі болып табылады, $f = 1\cdot 1 + 1\cdot 1 = 2$.

Жауабы. $Y^* = (1, 1, 1)$ – минимум нүктесі, $f = 2$.

Теорема 6.6 *($L(\Lambda, \lambda_0, Y)$ Лагранж функциясының $H(\Lambda, X)$ Гессе матрицасына қатысты экстремумның жеткілікті шарты).* Айталық, (6.2)-(6.3) есебінің теңдеулер жүйесін қанағаттандыратын Y нүктесінде

$$Y \in D = \{X : \psi_j(X) = 0, \ \ j = 1, 2, ..., m\} \subseteq R^n,$$

$f(X)$ және $\psi_j(X)$ функциялары екі рет үзіліссіз дифференциалданатын болсын. Егер (Λ', Y) нүктесі Лагранждың регулярлық функциясының

$$L(\Lambda, X) = f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j(X)$$

стационар нүктесі болып табылатын Лагранж көбейткіштерінің нөлге тең емес мәндері бар болса, онда Y нүктесі:

– егер $(m + 2)$ ретті H матрицасының $\Delta_{m+2}(H)$ бұрыштық минорының таңбасы $(-1)^{m+1}$ таңбасымен бірдей болса, ал келесі $\Delta_{m+2+S}(H)$ бұрыштық минорлар таңба ауыспалы қатарды (олардың саны $n-m+1$-ге тең) құраса, $L(\Lambda, X)$ функциясының максимум нүктесі болып табылады, мұндағы $S=m-1, m, ..., n-2$;

– егер $(m+2)$ ретті H матрицасының $\Delta_{m+2}(H)$ бұрыштық минорының таңбасы $(-1)^m$ таңбасымен бірдей болса (олардың саны n–m-ге тең), $L(\Lambda, X)$ функциясының минимум нүктесі болып табылады, мұндағы $S=m-1, m, ..., n-2$.

6.6-теорема 6.5-теоремаға қарағанда қолдануға ыңғайлы. 6.6 теорема 6.5-теоремадан өзге экстремумның бар болуының қажетті шарты болып табылмайтын жеткілікті шартын анықтайды. Сондықтан, осы шарттарды қанағаттандырмайтын Лагранждың регулярлық функциясының стационар нүктесі экстремаль нүктесі болуы мүмкін.

6.3. Лагранж көбейткішінің жалпыланған әдісі

Шартты оңтайландырудың (5.3), (5.6) есебін келесі түрде қарастырайық. Y нүктесі k шектеулер-теңсіздіктерді

$$\psi_j(X) \le 0, \ j=1, 2, ..., k, \tag{6.11}$$

және $(m-k)$ шектеулер-теңдіктерді

$$\psi_j(X)=0, \ j=k+1, k+2, ..., m \tag{6.12}$$

қанағаттандыратындай $f(X)$ мақсат функциясының экстремумының $Y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ төңіректік нүктесін табу қажет болсын:

$$Y: f(Y)=extr\ f(X), \tag{6.13}$$

яғни $Y \in D$, мұндағы

$$D=\{X: \psi_j(X) \le 0, \ j=1, 2, ..., k,$$

$$\psi_j(X)=0, \ j=k+1, k+2, ..., m\} \subseteq R^n \tag{6.14}$$

және $D \subseteq \Omega \cap \Omega'$.

Есептің осылай қойылуында (6.11) шектеулер жүйесі қажет болса x_i, $i=1, 2, ..., n$ айнымалыларының теріс еместік шарты енгізіледі. Қосымша (әлсіз) теріс емес $Q=(q_1, q_2, ..., q_k)$ айнымалыларын енгізе отырып, және олардың квадраттарын $Q=(q_1^2, q_2^2, ..., q_л^2)$ (теріс еместік шартын қамтитын) пайдаланып шектеулер-теңсіздіктерді шектеулер-теңдіктер арқылы беруге болады. Сонда

$$\psi_j(X)+q_j^2=0, \ j=1, 2, ..., k$$

және Лагранж функциясы мына түрде жазылады:

$$L(\Lambda, \lambda_0, X, Q)=\lambda_0 f(X)+\sum_{j=1}^{k}\lambda_j(\psi_j(X)+q_j^2)+\sum_{j=k+1}^{m}\lambda_j\psi_j(X).$$

Егер оптимумның Y нүктесінде $q_j^2=0$ теңдігі орындалса, онда j-ші шектеу-теңсіздік $(\psi_j(Y)=0)$ теңдік ретінде орындалады және сәйкес j-ші ресурс толығымен жұмсалынады, және дефицит болып табылады; егер $q_j^2>0$ болса, онда $\psi_j(Y)<0$ және j-ші ресурс дефицит емес болып табылады.

(6.11)-(6.13) есебінің Y экстремальдық нүктесін табайық. Лагранждың жалпыланған әдісінің идеясы осыған дейін қойылған мәселеге тіреледі: егер $f(X)$ функциясының Y шартсыз экстремум нүктесі қойылған шектеулерді қанағаттандырмаса, онда Y шартты экстремум нүктесі D жарамды мәндер облысының шекарасында жатуы керек. Шектеулер-теңсіздіктері жоқ (6.12), (6.14) есептер үшін көмекші Лагранж функциясын жазайық:

$$L^0(\Lambda, X)=f(X)+\sum_j\lambda_j\psi_j(Y)-b_j, \ j=k+1, k+2, ..., m.$$

Егер $L^0(\Lambda, X)$ функциясының Y экстремум нүктесі (6.11) шектеулер-теңсіздіктерін қанағаттандырмаса, онда осы шектеулер-теңсіздіктерінің біреуі немесе бірнешеуі тура теңдіктер ретінде орындалуы керек. Сондықтан, *Лагранждың жалпыланған әдісінің есептеу алгоритмін* бірнеше кезең түрінде жазуға болады:

1-кезең. $L^0(\Lambda, X)$ Лагранж функциясының шартты экстремумының (6.12), (6.13) қосымша есептерін шығару керек. Егер алынған Y экстремум нүктесі (6.11) шектеулер-теңсіздігін қанағаттандырса, онда есеп шығарылған, және осы шектеулер артық болып табылады. Әйтпесе $I=1$ деп алып екінші кезеңге көшеміз.

2-кезең. (6.11) кез келген I шектеулер-теңсіздігін белсенді шектеулер ретінде, яғни шектеулер-теңдіктер түрінде жазамыз. Оларды $L^0(\Lambda, X)$ Лагранждың көмекші функциясына қосамыз. $L^0(\Lambda, X)$ функциясының Y экстремум нүктесін табу керек. Егер алынған Y нүктесі қалған шектеулер-теңсіздіктерді қанағаттандырса, онда шешім алынды. Кері жағдайда басқа I шектеулер-теңсіздіктерін белсенді ету керек. Егер іріктеп алған белсенді шектеулер ретіндегі барлық мүмкін I шектеулер-теңсіздіктер жарамды шешімді табуға мүмкіндік туғызбаса, онда үшінші кезеңге көшу керек.

3-кезең. Егер $I < k$ болса, онда $I = I + 1$ деп үйғарып, екінші кезеңге қайта оралу керек. Егер $I = k$ болса, жарамды шешім жоқ.

Қарастырылған алгоритм барлық уақытта, соның ішінде мақсат функция унимодальды болмаған жағдайда ауқымды экстремумды алуға кепілдік бермейтінін ескере кеткен жөн.

6.4. Якоби әдісі

Якоби әдісі – $J_0(Y) = \left\{ \dfrac{\partial \psi_j(Y)}{\partial x_i} \right\}$, $i = 1, 2, ..., n$, $j = 1, 2, ..., m$

матрицасының рангі m-ге тең болса, шартты экстремумның (6.2)-(6.3) классикалық есебін шартсыз экстремум есебіне келтіретін тәсілдердің бірі болып табылады.

(6.2)-(6.3) шартты экстремум есебінің X жарамды нүктесінің $U_\varepsilon^C(X)$ жарамды маңайынан n-өлшемді $X + \delta X$ жарамды нүктені n айнымалылардың толық жиынынан m бос (тәуелсіз) айнымалылардың сызықтық функциясы ретінде беру Якоби әдісінің негізіне жатады. Осындай тұжырым экстремумның қажетті және жеткілікті шарты ретінде 5.2-5.6 теоремаларды пайдалануға мүмкіндік береді. Бұл жерде X жарамды нүктесінің $U_\varepsilon(X)$ жарамды маңайында $\psi_i(X)$ функциясына беретін шектеуді Тейлор қатарына жіктейміз:

$$\psi_i(X + \delta X) = \psi_j(X) + \nabla \psi_j(X) \cdot \delta X + \left((\delta X)^2 \ \textit{ретіндегі шама}\right),$$

мұндағы $\delta X = (\delta x_1, \delta x_2, ..., \delta x_n)$ және $X \in U_\varepsilon(X) \subseteq \Gamma$,

$X + \delta X \in U_\varepsilon(X) \subseteq \Gamma$.

Кіші δX шамасында

$$\delta\psi_j(X)=\nabla\psi_j(X)\cdot\delta X,$$

мұндағы $\delta\psi_i(X)=\psi_j(X+\delta X)-\psi_j(X)$.

Жарамды облыстың барлығында $\psi_j(X+\delta X)=\psi_j(X)=0$, демек,

$$\nabla\psi_j(X)\cdot\delta X=0,\ \text{мұндағы}\ j=1,2,...,m. \tag{6.15}$$

$X=(x_1,x_2,...,x_n)$ – n айнымалысынан $Z=(z_1,z_2,...,z_{n-m})$ арқылы белгіленген ($n-m$) бос (тәуелсіз) айнымалыны таңдаймыз, ал X айнымалыларындағы қалған m айнымалыларды тәуелді $S=(s_1,s_2,...,s_m)$ айнымалылар ретінде белгілейміз.

Алынған (6.15) теңдеулер жүйесі n белгісіз δX -ке қатысты m сызықтық теңдеулерден тұратын жүйе болып табылады. Z айнымалылар және S градиенттер ұғымында $\psi_j(X)$ функциясын мына түрде жазамыз:

$$\nabla\psi_j(X)=(\nabla_Z\psi_j,\nabla_S\psi_j),$$

мұндағы

$$\nabla_Z\psi_j(X)=\frac{\partial\psi_j}{\partial z_1},\frac{\partial\psi_j}{\partial z_2},...,\frac{\partial\psi_j}{\partial z_{nm}};$$

$$\nabla_S\psi_j(X)=\left(\frac{\partial\psi_j}{\partial s_1},\frac{\partial\psi_j}{\partial s_2},...,\frac{\partial\psi_j}{\partial s_m}\right),$$

және (6.15) қатынастан

$$\nabla\psi_j(X)\cdot\delta X=(\nabla_Z\psi_j,\nabla_S\psi_j)\cdot(\delta Z,\delta S)=$$
$$=\nabla_Z\psi_j\cdot\delta Z+\nabla_S\psi_j\cdot\delta S=0. \tag{6.16}$$

$J(X)$ Якоби матрицасын және $C(X)$ басқару матрицасын енгіземіз:

$$J(X)=\nabla_S\varnothing=\begin{pmatrix}\nabla_S\varnothing_1\\ \nabla_S\varnothing_2\\ ...\\ \nabla_S\varnothing_m\end{pmatrix}_{m\times m},\quad C(X)=\nabla_Z\varnothing=\begin{pmatrix}\nabla_Z\varnothing_1\\ \nabla_Z\varnothing_2\\ ...\\ \nabla_Z\varnothing_m\end{pmatrix}_{m\times(n-m)}.$$

$J_0(X)=\left\{\dfrac{\partial\psi_j(Y)}{\partial x_i}\right\}$ матрицасының рангі m-ге тең болғандықтан $J(X)$ Якоби матрицасы өзгеше емес болатындай барлық уақытта X векторының координаталарынан S векторының координаталарын алуға болады.

Енгізілген белгілеулерді ескере отырып (6.16) теңдеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$J(X)\cdot\delta S^T=-C(X)\cdot\delta Z^T. \tag{6.17}$$

Осыдан, $J(X)$ Якоби матрицасының өзгеше еместігін ескеріп

$$\delta S^T(X)=-J^{-1}(X)C(X)\cdot\delta Z^T(X) \tag{6.18}$$

қатынасын аламыз, мұндағы $\delta S^T(X)$ және $\delta Z^T(X)$ белгілеулері ауытқудың X жарамды нүктеден және оның аймағынан алынатынын көрсетеді. (6.18) теңдеу δS айнымалыларының тәуелді өсімшесінің координаталарын δZ бос айнымалылардың өзгеру координаталары арқылы анықтайды.

Z бос айнымалылар кеңістігінде $f(X)$ мақсат функциясының градиенті үшін X басқарушы айнымалыларды Z бос айнымалыларға және S тәуелсіз айнымалыларға бөлуді пайдаланып өрнек құрамыз. Ол үшін $f(X)$ функциясын X жарамды нүктенің $U_\varepsilon^C(X)$ жарамды маңайында Тейлор қатарына жіктейміз

$$f(X+\delta X)=f(X)+\nabla f(X)\cdot\delta X+\left((\delta X)^2\ \textit{ретіндегі шама}\right)$$

Кіші δX шамасында

$$\delta f(X)=\nabla f(X)\cdot\delta X$$

қатынасын аламыз, осыдан

$$\delta f(X)\cdot\delta X=(\nabla_Z f(X),\nabla_S f(X))\cdot(\delta Z,\delta S)=$$
$$=\nabla_Z f(X)\cdot\delta Z+\nabla_S f(X)\cdot\delta S.$$

Осы алынған қатынасқа (6.17) формуланы қойып келесі қатынасты аламыз:

$$\delta f(X)=\left(\nabla_Z f(X)-\nabla_S f(X)\cdot J^{-1}\cdot C\right)\cdot\delta Z.$$

$\delta Z\to 0$ шегіне көше отырып Z бос айнымалылар кеңістігінде $f(X)$ мақсат функциясының градиенті үшін ізделінді өрнекті аламыз:

$$\nabla_* f(X)=\frac{\delta f(X)}{\delta Z}=\nabla_Z f(X)-\nabla_S f(X)\cdot J^{-1}\cdot C.$$

Бұл жердегі $\nabla_* f(X)$ – *келтірілген* немесе *шартты градиент* деп аталады.

Төңіректік экстремумның Y нүктесінде (n–m)-өлшемді $\nabla_* f(Y)$ векторы нөлге тең, бұл – экстремумның қажетті шарты. $\nabla_* f(Y)=0$ теңдігі орындалатын Y нүктесі *шартты экстремум есебінің стационар нүктесі* деп аталады. Y стационар нүктесі анықтама бойынша жарамды нүкте екенін ескерсек, Y стационар нүктесі келесі n теңдеулер жүйесінің

$$\nabla_* f(X)=\nabla_Z f(X)-\nabla_S f(X)\cdot J^{-1}\cdot C=0,$$
$$\psi_j(X)=0,\ j=1,2,...,m$$

шешімі болуы керек.

Гессе матрицасын алу үшін экстремумның жеткілікті шартына талдау жүргізген кезде Z бос айнымалылар бойынша күрделі функцияның дифференциалдау ережесін пайдаланып

$$\frac{\partial}{\partial z_i}=\sum_{k=1}^{m}\frac{\partial}{\partial s_k}\cdot\frac{\partial s_k}{\partial z_t},\ t=1,2,...,n-m,$$

$\dfrac{\partial\nabla_* f(Y)}{\partial Z}$ туындысын есептеу талап етіледі.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Вейерштрасс теоремасы.

2. Лагранждың көбейткіштер әдісінің негізгі идеясы.

3. Лагранждың көбейткіштер ережесі.

4. Лагранж функциясы қалай құрылады?

5. Лагранж функциясының Гессе матрицасына қатысты экстремумның жеткілікті шарты.

6. Регулярлық шарт, регулярлық функция дегеніміз не?

7. Якоби әдісі қандай есептерді шығару үшін қолданылады?

8. Шартты градиент дегеніміз не?

9. Лагранждың жалпыланған әдісінің есептеу алгоритмі қандай кезеңдерден тұрады?

10. x_i координаталары бойынша Лагранж функциясының екінші ретті туындысына қатысты экстремумның жеткілікті шарттарын тұжырымда.

11-15 есептердегі шектеулермен берілген $f(x)$ функциясының шартты экстремум нүктелерін Лагранж көбейткіштер әдісімен табу керек.

11. $f = 3x_1^2 + x_2^2 + x_2$, $\begin{cases} x_1 - x_2 \geq 2, \\ -4x_1 - 3x_2 \leq 12, \\ 0 \leq x_1 \leq 3. \end{cases}$

12. $f = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 - \frac{1}{4}x_1$, $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 \geq -15, \\ 3x_1 + x_2 \geq 3, \\ x_1 \geq 0. \end{cases}$

13. $f = 2x_1^2 + x_2^2 + x_1 x_2$, $\begin{cases} x_1 - 3x_2 \leq 3, \\ x_1 - x_2 \leq 4, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \leq 2. \end{cases}$

14. $f = 4x_1^2 - 8x_1 + x_2$, $\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 1, \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6, \\ -\frac{1}{2} \leq x_2 \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$

15. $f = x_1^2 + x_2^2 - \frac{1}{2}x_1 x_2$, $\begin{cases} 2x_1 + 6x_2 \leq 6, \\ -3x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ x_2 \leq \frac{3}{2}. \end{cases}$

7 - тарау. ДӨҢЕС ПРОГРАММАЛАУДЫҢ ЭЛЕМЕНТТЕРІ

7.1. Дөңес анализ элементтері

7.1.1. Дөңес жиындар

a және b нүктелерін қосатын $\{x : x \in E^n, x = ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$ жиыны *түзудің кесіндісі* деп аталады да, $[a, b]$ арқылы белгіленеді.

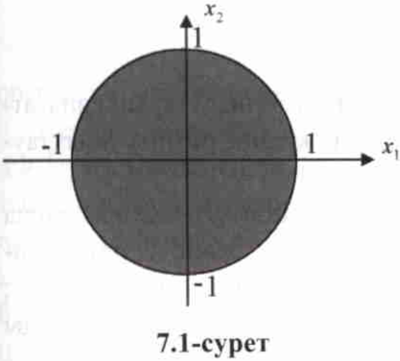
Кез келген $x, y \in D$ үшін, $[x, y] \subset D$ болса, $D \subset E^n$ жиыны *дөңес жиын* деп аталады.

7.1-мысал.

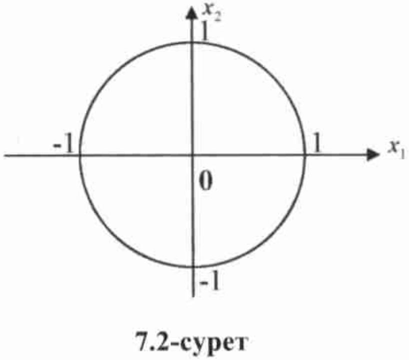
$D = \{x : x \in E^2, x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$ – дөңес жиын. Себебі, берілген D жиыны – дөңгелек. Дөңгелектегі кез келген екі нүктені алып, кесінді жүргізсек, осы кесіндінің кез келген нүктесі D жиынында жатады (7.1-сурет).

7.2-мысал.

$D = \{x : x \in E^2, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ – дөңес жиын емес. Себебі, берілген D жиыны – шеңбер. Шеңбердегі кез келген екі нүктені алып, кесінді жүргізсек, осы кесіндінің тек қана шекаралық нүктелері D жиынында жатады, ал басқа нүктелері шеңбердің ортасында (шеңберге тиісті емес жиында) жатады (7.2-сурет).



7.1-сурет



7.2-сурет

$n=2$ жағдайын (екіөлшемді кеңістік – жазықтық) қарастырайық. $X_1=\left(x_1^{(1)},x_2^{(1)}\right)$ және $X_2=\left(x_1^{(2)},x_2^{(2)}\right)$ – Ox_1x_2 жазықтығының нүктелері, ал $X=\left(x_1,x_2\right)$ – X_1X_2 кесіндісінің кез келген нүктесі болсын. XX_2 және X_1X_2 кесінділерінің ұзындықтарының α қатынасы $0\le\alpha\le1$ шартын қанағаттандырады. Осы α қатынасын нүктелердің координаталары арқылы жазайық:

$$\alpha=\frac{x_1^{(2)}-x_1}{x_1^{(2)}-x_1^{(1)}}=\frac{x_2^{(2)}-x_2}{x_2^{(2)}-x_2^{(1)}},$$

осыдан

$$\begin{cases}x_1=\alpha x_1^{(1)}+(1-\alpha)x_1^{(2)}\\ x_2=\alpha x_2^{(1)}+(1-\alpha)x_2^{(2)}\end{cases} \tag{7.1}$$

мұндағы

$$0\le\alpha\le1. \tag{7.2}$$

$\alpha_1=\alpha$ және $\alpha_2=1-\alpha$ деп ұсынсақ, (7.1) және (7.2) шарттары мына түрде жазылады:

$$\begin{cases}x_1=\alpha_1x_1^{(1)}+\alpha_2x_1^{(2)}\\ x_2=\alpha_1x_2^{(1)}+\alpha_2x_2^{(2)}\end{cases} \tag{7.3}$$

$$\alpha_1\ge0,\ \alpha_2\ge0,\ \alpha_1+\alpha_2=1. \tag{7.4}$$

(7.3) теңдігіндегі барлық амалдар координаталар бойынша (яғни x_1 айнымалысы және x_2 айнымалысы бойынша бөлек) орындалады деп түсіне отырып, мына түрде жазуға болады:

$$X=\alpha_1X_1+\alpha_2X_2.$$

Сонымен, X_1X_2 *кесіндісін* (7.4) және (7.3) шарттарын қанағаттандыратын нүктелердің (векторлардың) жиыны ретінде анықтауға болады.

n-өлшемді кеңістік жағдайында да кесінді ұғымы осылайша анықталады – (7.4) және (7.3) шарттарында X_1 және X_2 ретінде n-өлшемді кеңістіктің $X_1=(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, ..., x_n^{(1)})$ және $X_2=(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, ..., x_n^{(2)})$ нүктелері (векторлары) қарастырылса, онда осы шарттарды қанағаттандыратын нүктелер жиыны n-өлшемді кеңістік жағдайындағы кесінді ұғымын береді.

Теорема 7.1. $D_i \subset E^n$, $i = \overline{1,m}$ – дөңес жиындар болсын. Сонда $D = \bigcap_{i=1}^{m} D_i$ – дөңес жиын.

Теорема 7.2. $D_i \subset E^n$, $i = \overline{1,m}$ – дөңес жиындар, $a_i \in R$, $\forall\ i = \overline{1,m}$ болсын. Сонда $D = \bigcap_{i=1}^{m} a_i D_i$ – дөңес жиын.

Бірнеше нүкте үшін кесінді ұғымының жалпыламасы олардың дөңес сызықтық комбинациясы болып табылады.

Егер

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots + \alpha_n X_n,\ \alpha_j \geq 0\ \left(j = \overline{1, n}\right)\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

шарты орындалса, онда X нүктесі $X_1, X_2, \ldots, X_n$ нүктелерінің *дөңес сызықтық комбинациясы* деп аталады.

$n = 2$ дербес жағдайында осы нүктелерді қосатын кесінді екі нүктенің дөңес сызықтық комбинациясы болып табылады.

Сондықтан, нүктелер жиыны кез келген екі нүктесімен бірге олардың кез келген дөңес сызықтық комбинациясын қамтыса, нүктелер жиыны дөңес болып табылады.

Егер $[a, b]$ – сандық түзудегі кесінді болса және $x \in [a, b]$ болса, онда

$$x = \alpha a + (1 - \alpha) b,\ 0 \leq \alpha \leq 1$$

немесе

$$x = \alpha_1 a + \alpha_2 b\ \ \alpha_1 + \alpha_2 = 1,\ \alpha_1 \geq 0,\ \alpha_2 \geq 0 \qquad (7.5)$$

орындалатыны түзу кесіндісінің анықтамасынан белгілі.

Керісінше де ақиқат болады: егер (7.5) шарт орындалса, онда $x \in [a, b]$. Сонымен, $[a, b]$ кесіндісін (7.5) шартты қанағаттандыратын барлық x нүктелерінің жиыны ретінде анықтауға болады. Сонда дөңес жиын бұл – (7.5) шартты қанағаттандыратын жиынның кез келген a, b нүктелер жұбымен және барлық x нүктелерімен бірге алғандағы жиын. a, b, x – n-өлшемді кеңістіктің нүктелері ((7.5) шартындағы амалдар координаталар бойынша орындалады) болған жағдайда да кесіндінің және дөңес жиынның осы анықтамалары ақиқат болады.

$D \subset E^n$ жиынындағы кез келген ақырлы санды векторлардың мүмкін болатын дөңес комбинациялар жиыны D жиынының *дөңес қабықшасы* деп аталады да, $convD$ арқылы белгіленеді.

Кез келген $D_i \subset E^n$ жиыны үшін $convD$ жиыны дөңес болып табылады.

D жиынын қамтитын барлық дөңес жиындардың қиылысуы $convD$ жиынымен беттеседі.

Егер дөңес D жиынындағы x векторы осы D жиынындағы басқа ешқандай екі вектордың дөңес комбинациясы болмаса, онда дөңес D жиынындағы x векторы D жиынының *шеткі нүктесі* деп аталады.

Дөңес жиынның кез келген шеткі нүктесі оның шекаралық нүктесі болып табылады, бірақ кез келген шекаралық нүкте шеткі нүкте бола бермейді.

7.1.2. Дөңес функция

Егер кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін

$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \leq \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (7.6)$$

теңсіздігі орындалса, онда n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы *дөңес функция* деп аталады.

Егер кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін

$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) < \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (7.7)$$

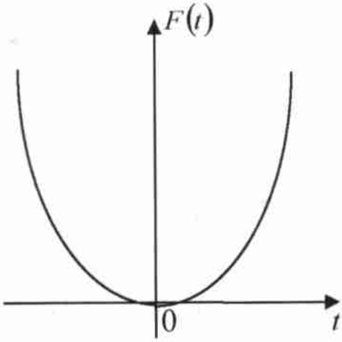
теңсіздігі орындалса, онда n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы *қатаң дөңес функция* деп аталады.

7.3-мысал.

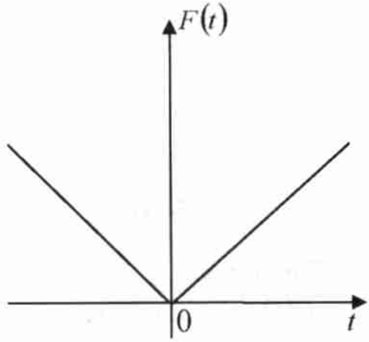
$F(t) = t^2$ функциясы $\forall t \in R$ үшін дөңес және қатаң дөңес болып табылады (7.3-сурет).

7.4-мысал.

$F(t)=|t|$, $\forall t \in R$ үшін дөңес, бірақ қатаң дөңес емес (7.4-сурет).



7.3-сурет



7.4-сурет

Егер кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін

$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \geq \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (7.8)$$

теңсіздігі орындалса, онда n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X)=F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы *ойыс функция* деп аталады.Егер кез келген X_1, $X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін

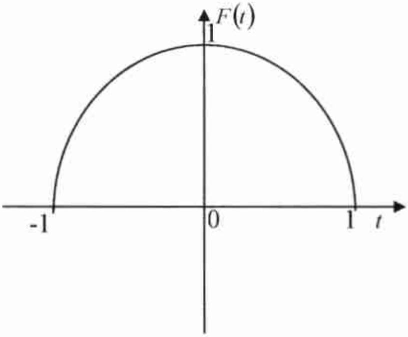
$$F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) > \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2) \qquad (7.9)$$

теңсіздігі орындалса, онда n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X)=F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы *қатаң ойыс функция* деп аталады.

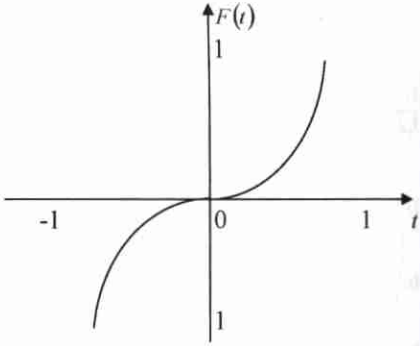
$M = E^n$ жағдайында $F(X)$ функциясы дөңес (ойыс) функция деп айтылады.

7.5-мысал.

$F(t)=1-t^2$, $\forall t \in R$ үшін ойыс (7.5-сурет).



7.5-сурет



7.6-сурет

7.6-мысал.

$F(t)=t^3$ дөңес те, ойыс та емес, бірақ $[0, \infty)$ жарты осінде дөңес, және $(-\infty, 0]$ жарты осінде ойыс (7.6-сурет).

7.2. Дөңес функциялардың қасиеттері

7.2.1. Дөңес функциялардың алгебралық және аналитикалық қасиеттері

1. Егер $F(X)$ функциясы дөңес болса, онда $-F(X)$ ойыс болады.

2. $F(X)=C$ функциясы және $F(X)=aX+b$ сызықтық функциясы барлық жерде дөңес және барлық жерде ойыс болып табылады.

3. Егер $F_i(X)$, $i=\overline{1,m}$ функциялары дөңес болса, онда кез келген нақты $\alpha_i \geq 0$ сандары үшін $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i F_i(X)$ функциясы да дөңес болып табылады.

4. Егер $F(X)$ функциясы дөңес болса, онда кез келген α саны үшін $F(X)<\alpha$ теңсіздігінің шешімдер облысы не дөңес жиын, не бос жиын болып табылады.

5. Егер $\varphi_i(X)$ функциялары айнымалылардың барлық теріс емес мәндерінде дөңес болса, онда $\varphi_i(X) \leq b_i$ теңсіздіктер жүйесінің шешімдер облысы дөңес жиын (егер ол бос жиын болмаса) болып табылады.

6. *M* дөңес жиында анықталған дөңес (ойыс) функция осы жиынның әрбір ішкі нүктесінде үзіліссіз болады.

7. Кез келген дифференциалданатын қатаң дөңес (ойыс) функцияның стационар нүктесінің (яғни барлық дербес туындылардағы нөлге тең нүктелер) саны бірден артық болмайды.

8. Екі рет дифференциалданатын $F(X)=F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функциясы кез келген $X \in M$ және бір мезгілде бірден нөлге тең болмайтын Δx_i, Δx_j үшін

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}\Delta x_i \Delta x_j \geq 0 \qquad (7.10)$$

теңсіздігі орындалған жағдайда ғана дөңес болып табылады.

Гессе матрицасының барлық бас минорлары, яғни

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix}, \; a_{ij} = \frac{\partial^2 F(X)}{\partial x_i \partial x_j}, \; k = \overline{1, n}$$

анықтауышы теріс емес болған жағдайда ғана (7.10) шарты орындалады.

Егер барлық $\Delta_k > 0$ болса, онда (7.10) теңсіздігі қатаң теңсіздік ретінде орындалады және F функциясы қатаң дөңес болып табылады.

7.2.2. Дөңес функциялардың дифференциалдық қасиеттері

Теорема 7.3. $G \subset E^n$ ашық жиын, $D \subset G$ дөңес жиын, f функциясы G жиынында анықталған және дифференциалданатын функция болсын. Сонда D жиынында дөңес болуы үшін

$$f(x) - f(x_0) \geq \{f'(x_0), x - x_0\}, \forall x, x_0 \in D$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Теорема 7.4. f функциясы E^n кеңістігінде анықталған және екі рет дифференциалданатын функция болсын. Сонда f функциясы дөңес болу үшін E^n кеңістігінде $f''(x)$ матрицасы теріс емес анықталған болуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Ескерту. $f''(x)$ матрицасының оң емес анықталған болуы – функцияның ойыстығының критерийі; $f''(x)$ матрицасының оң анықталған болуы – функцияның қатаң дөңестігінің критерийі; $f''(x)$ матрицасының теріс анықталған болуы – функцияның қатаң ойыстығының критерийі болып табылады.

Теорема 7.5. Кез келген $x, s \in E^n$ үшін $\varphi(t) = f(x + ts)$ функциясы дөңес болған жағдайда ғана E^n кеңістігінде анықталған f функциясы дөңес болып табылады.

7.2.3. Дөңес функциялардың экстремальдық қасиеттері

Теорема 7.6. $D \subset E^n$ дөңес жиынында f функциясы дөңес болсын. Сонда D жиынындағы f функциясының төңіректік минимумының кез келген $x^* \in D$ нүктесі D жиынында оның минимум (ауқымды) нүктесі болып табылады.

$D^* = \left\{x^* : x^* \in D, f(x^*) = \min\limits_{x \in D} f(x)\right\}$ белгілеуін енгізейік.

Теорема 7.7. $D \subset E^n$ дөңес жиынында f функциясы дөңес болсын. Сонда D^* жиыны – дөңес жиын болып табылады.

Теорема 7.8. $D \subset E^n$ дөңес жиынында f функциясы қатаң дөңес болсын. Сонда D^* жиыны бір нүктеден артық емес нүктені қамтиды.

Теорема 7.9. $D \subset E^n$ дөңес жиынында f функциясы дөңес және дифференциалданатын болсын. Сонда $x^* \in D$ нүктесі D жиынында f функциясының минимум нүктесі болуы үшін

$$\left\langle f'(x^*), x - x^* \right\rangle \geq 0, \ \forall x \in D$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Салдар 7.1. f функциясы E^n кеңістігінде дөңес және дифференциалданатын болсын. Сонда x^* нүктесі f функциясының шартсыз минимум нүктесі болуы үшін

$$f'(x) = 0$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

7.3. Дөңес программалау есебі

Қандай да бір M жиынында барлық $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ функциялары (шектеулер жүйесіндегі) дөңес, ал мақсат функциясы осы жиында не дөңес, не ойыс болатын сызықтық емес программалау есебі *дөңес программалау есебі* деп аталады.

Дөңес программалау есебі дөңес теңсіздіктер жүйесімен құрылған дөңес жиындағы дөңес функцияны минимизациялау, немесе ойыс функцияны максимизациялау есебі болып табылады. Сондықтан, сызықтық емес программалау есебіне қатысты барлық мәліметтер дөңес программалау есебі үшін де ақиқат болады.

Кез келген сызықтық программалау есебі дөңес программалау есебінің дербес жағдайы болып табылады. Жалпы жағдайда дөңес программалау есебі сызықтық емес программалау есебі болып табылады.

Кез келген дөңес функцияның төңіректік минимумы (ойыс функцияның төңіректік максимумы) бір мезгілде ауқымды болып та есептеледі. Сонымен қатар, тұйық шектелген жиында берілген дөңес (ойыс) функция осы жиында ауқымды максимум және ауқымды минимум мәндерге жетеді. Осыдан, егер мақсат функция қатаң дөңес (қатаң ойыс) болса және шектеулер жүйесінің шешімдер облысы бос емес және шектелген болса, онда барлық кезде дөңес программалау есебінің жалғыз шешімі бар болады. Бұл жағдайда шешімдер облысының ішінде стационар нүкте бар болса осы облыстың ішінде немесе егер оның ішінде стационар нүкте болмаса онда дөңес функция (ойыс функция) облыстың шекарасында минимумға (максимумға) жетеді.

Барлық $i = 1, ..., m$ үшін $f_i(z) < 0$ теңсіздігі орындалатындай z векторы бар болса, онда $f_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., m$ теңсіздіктер жүйесі *Слейтер шартын* қанағаттандырады деп айтады.

Егер барлық $x \ge 0$, $\lambda \ge 0$ үшін

$$L(x^*, \lambda) \le L(x^*, \lambda^*) \le L(x, \lambda^*)$$

теңсіздігі орындалса, онда (x^*, λ^*) векторы *Лагранж функциясының ер нүктесі* деп аталады, мұндағы $x^* \ge 0$, $\lambda^* \ge 0$.

$f(X)$ мақсат функциясының $Y=(y_1, y_2, ..., y_n)$ төңіректік экстремумын анықтайтын (5.3), (5.6) есептерін қарастырайық.

Y нүктесі k шектеулер-теңсіздіктерді

$$\psi_j(X) \le 0, \ j = 1, 2, ..., k, \tag{7.11}$$

және $(m-k)$ – шектеулер-теңдіктерді

$$\psi_j(X) = 0, \ j = k+1, k+2, ..., m \tag{7.12}$$

қанағаттандырсын, яғни $Y \in D$,

$$f(Y) = extr\, f(X); \tag{7.13}$$

мұндағы

$$D = \{X : X \in P, \psi_j(X) \le 0, j = 1, 2, ..., k, \psi_j(X) = 0,$$
$$j = k+1, k+2, ..., m\} \subseteq R^n$$

және $D \subset \Omega \cap \Omega'$.

(7.11)-(7.13) есептеріне Лагранж функциясын құрамыз:

$$L(\Lambda, \lambda_0, X) = \lambda_0 f(X) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \psi_j(X), \tag{7.14}$$

мұндағы λ_0 және $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ параметрлері – Лагранж көбейткіштері. $L(\Lambda, \lambda_0, X)$ функциясының x_i бойынша дербес туындысы (6.5)-(6.6) түрінде болады.

Теорема 7.10 (*Лагранж принципі*). (7.11)-(7.13) есептерінде P жиыны дөңес деп, $f(X)$, $\psi_1(X)$, $\psi_2(X)$, …, $\psi_k(X)$ функциялары $Y \in D$ нүктесінде дифференциалданады деп ұйғарайық. Ал $\psi_{k+1}(X)$, $\psi_{k+2}(X)$, …, $\psi_m(X)$ функциялары Y-тің қандай да бір маңайында (7.11)-(7.13) есебінің төңіректік минимум (максимум) нүктесі болса, онда барлық $X \in P$ және $\delta X = X - Y$ үшін

$$\frac{\sum_i \partial L(\Lambda', \lambda_0', Y)}{\partial x_i} \cdot \delta x_i \ge (\le) 0, \tag{7.15}$$

$$\lambda'_j \psi_j(Y) = 0, \quad j = 1, 2, ..., k, \tag{7.16}$$

$$\lambda'_j \geq (\leq) 0, \ j = 1, 2, ..., k \tag{7.17}$$

қатынастары орындалатындай, шектеулер-теңдіктерде (j = k+1, k+2, ..., m) Лагранж көбейткіштері кез келген таңбаны қабылдай алатындай бір мезгілде нөлге тең емес Λ' векторы және $\lambda'_0 > 0$ параметрі бар болады, мұндағы $L(\Lambda, \lambda_0, X)$ – (7.14) Лагранж көбейткіші.

(7.16) шарт *қатаң еместі толықтыратын шарт* деп аталады, ол шектеулер-теңсіздіктерді экстремум нүктесінде нөлге айналдыратын белсенді және Лагранж көбейткіштері нөлге айналатын белсенді емес болып бөлінеді.

(7.15)-(7.17) шарттары *Куна-Таккер шарттары* деп аталады.

Теорема 7.11 (*дөңес программалау есебінің Лагранж функциясының ер нүктесі туралы Куна-Таккер теоремасы*).

$$\min\{f(x) : x \in E^n, f_i(x) \leq 0, i = 1, ..., m, x_j \geq 0, \ j = 1, ..., n\}$$

түріндегі дөңес программалау есебі берілсін. $f_i(x) \leq 0, \ i = 1, ..., m$ теңсіздіктер жүйесі Слейтер шартын қанағаттандырсын. Сонда x^* теріс емес векторы дөңес программалау есебінің шешімі болу үшін (x^*, λ^*) векторы – Лагранж функциясының ер нүктесі болатындай Лагранж көбейткішінің λ^* теріс емес векторының бар болуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

$\langle g, y - x \rangle \leq 0$, теңсіздігі орындалса, онда $g \in E^n$ векторы $x \in E^n$ нүктесінде $D \subset E^n$ жиынына *тірек нүктесі* деп аталады, және бұл жерде $\{y : y \in E^n, \langle g, y - x \rangle = 0\}$ гипержазықтығы да $D \subset E^n$ *жиынына тірек нүктесі* деп аталады.

$\langle g, y - x \rangle < 0$, $\forall y \in D$, $y \neq x$ теңсіздігі орындалса, онда $g \in E^n$ векторы $x \in E^n$ нүктесінде $D \subset E^n$ жиынына *қатаң тірек нүктесі* деп аталады.

$T(x)$ арқылы D жиынына x нүктесіндегі барлық тірек векторларының жиынын белгілейміз. Сонымен,

$$T(x) = \{g : g \in E^n, \langle g, y - x \rangle \leq 0, \forall y \in D\}.$$

Теорема 7.12. f функциясы $D \subset E^n$ дөңес жиынында дөңес және дифференциалданатын болсын. Сонда $x^* \in D$ нүктесі D жиынында f функциясының минимум нүктесі болуы үшін келесі енгізуінің орындалуы қажетті және жеткілікті:

$$-f'(x^*) \in T(x^*).$$

Теорема 7.13 (*дөңес программалау есебі үшін дифференциалдық формадағы Куна-Таккер теоремасы*).

$$\min\{f(x): x \in E^n, f_i(x) \le 0, i = 1, ..., m, x_j \ge 0, \ j = 1, ..., n\}$$

түріндегі дөңес программалау есебі берілсін, мұндағы барлық $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ функциялары үзіліссіз дифференциалдансын, $f_i(x) \le 0$, $i = 1, ..., m$ теңсіздіктер жүйесі Слейтер шартын қанағаттандыратын болсын. Сонда, $x^* \in D$ векторы дөңес программалау есебінің шешімі болуы үшін

$$f'(x^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i^* f_i'(x^*) = 0 \text{ және } \left\langle \lambda^*, f(x^*) \right\rangle = 0$$

шарты орындалатындай Лагранж көбейткіштерінің λ^* теріс емес векторының бар болуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Сызықтық шектеулермен берілген дөңес программалау есебі үшін Куна-Таккер теоремаларының екі түрін қарастырайық.

Теорема 7.14 (*Лагранж функциясының ер нүктесі туралы Куна-Таккер теоремасы*).

$$\min\{f(x): x \in E^n, Ax \le b, x \ge 0\}$$

түріндегі дөңес программалау есебі берілсін, мұндағы $A - m \times n$ өлшемді матрица, $b - m$ өлшемді вектор. Сонда x^* теріс емес векторы дөңес программалау есебінің шешімі болу үшін (x^*, λ^*) векторы – Лагранж функциясының ер нүктесі болатындай Лагранж көбейткішінің λ^* теріс емес векторының бар болуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Теорема 7.15. $\min\{f(x): x \in E^n, Ax \le b\}$ түріндегі дөңес программалау есебі берілсін, мұндағы $f(x)$ үзіліссіз дифференциалданатын функция, $A - m \times n$ өлшемді матрица, $b - m$ өлшемді вектор болсын.

Сонда, $x^* \in D$ векторы дөңес программалау есебінің шешімі болуы үшін

$$f'(x^*) + \lambda^* A = 0 \text{ және } \langle \lambda^*, Ax^* - b \rangle = 0$$

шарты орындалатындай Лагранж көбейткіштерінің λ^* теріс емес векторының бар болуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Ескерту. Бұл жағдайда дөңес программалау есебі үшін Лагранж функциясы мына түрде беріледі: $L(x, \lambda) = f(x) + \langle \lambda, Ax - b \rangle$. 7.14 және 7.15-теоремалар үшін Слейтер шартының орындалуы талап етілмейді, сондықтан олар 7.11 және 7.13-теоремалардың дербес жағдайлары болмайды.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Дөңес жиынға қатысты негізгі ұғымдар: дөңес, ойыс, қатаң дөңес, қатаң ойыс функциялар, дөңес жиын және т.б.

2. Дөңес программалау есебінің қойылуы.

3. Лагранж принципі.

4. Куна-Таккер шарттары деп қандай шарттарды айтамыз?

5. Слейтер шарты.

6. Дөңес функциялардың алгебралық және аналитикалық қасиеттері.

7. Дөңес функциялардың дифференциалдық қасиеттері.

8. Дөңес функциялардың экстремальдық қасиеттері.

9. Куна-Таккер теоремалары.

10. Лагранж функциясының ер нүктесі. $D \subset E^n$ жиынына тірек нүктесі, қатаң тірек нүктесінің анықтамасы.

11-15 есептерде берілген X жиынының дөңестігін тексеру керек.

11. $X = \{(x_1, x_2) \mid x_1 - x_2 \le 2, x_1^2 + x_2^2 \le 4\}$.

12. $X = \{(x_1, x_2) \mid 2x_1 + x_2 \le 2, 2x_1 + x_2 \ge -2, x_2 \ge 0\}$.

13. $X = \left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1^2 + \dfrac{x_2^2}{2} + \dfrac{x_3^2}{2} \ge 1\right\}$.

14. $X = \{x \in R^3 : \mid x_1^2 - 2x_1x_3 + x_2^2 \le 0, x_1 \ge 0\}$.

15. $X = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + x_2 + x_3 \le 1, x_1 \ge 0, x_2 \ge 0\}$.

16-20 есептерде берілген $f(x)$ функцияның берілген жиында дөңестігін тексеру керек.

16. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2 + 25$,
$X = R^3$.

17. $f(x) = -x_1^3 - x_2^3 - x_3^3 + 10x_1 - x_2 + 15x_3 + 6$;
$X = \{x \in R^3 : x \geq 0\}$.

18. $f(x) = \frac{5}{2}x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + \frac{3}{2}x_1x_2 + 2x_1x_3 + \frac{1}{2}x_2x_3 + 8x_3 + 13$;

$X = R^3$.

19. $f(x) = -x_1^2 - \frac{3}{2}x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 - 2x_2x_3 + 8x_2$;

$X = R^3$.

20. $f(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 + 5x_2 + 25$,
$X = R^3$.

8.1. Итеративті әдістер ұғымы

$$f(x) \to \min_{x \in X}$$

сызықтық емес программалау есебін қарастырайық, мұндағы X – жарамды жиын. Берілген бастапқы $x_0 \in X$ нүктесінің көмегімен x^* тиімді шешімге жақындайтын жарамды $x_0, x_1, \dots, x_k, x_{k+1}, \dots$ нүктелер тізбегін алу әдісі *итеративті әдістер* деп аталады. x_k нүктесінен x_{k+1} нүктесіне өту *итерация* деп аталады. Егер итерацияның ақырлы санында әдіс тиімді шешімге әкелсе, онда ол *дәл әдіс*, кері жағдайда – *жуықтау әдісі* деп аталады. Негізі итерация мына сұлба бойынша құрылады:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k l_k, \; k = 0, 1, \dots,$$

мұндағы $l_k \in R^n$ векторы x_k *нүктесіндегі бағыт* деп аталады, ал λ_k саны – *қадам ұзындығы* деп аталады. Әр түрлі итеративті әдістер бір бірінен l_k мен λ_k мәндерін есептеу тәсілдерімен ерекшеленеді.

Итеративті әдістердің тиімділігі келесі факторлармен бағаланады:

1) әмбебаптылығымен;

2) дәлділігімен;

3) бастапқы мәліметтер мен параметрлерге сезімталдылығымен;

4) есептеулерге кететін шығындармен;

5) жинақтылығымен және жинақтылық жылдамдығымен.

Егер $\{x_k\}$ тізбегі тиімді шешімге жинақталса, онда итеративті әдіс жинақталады. Нүктелер тізбегі $(x_k \to x^*)$ бойынша жинақтылық немесе мақсат функциясы $(f(x_k) \to f(x^*))$ бойынша жинақтылық қарастырылады. Осыған байланысты итеративті үрдісті тоқтатудың әр түрлі ережелері қарастырылады:

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le \varepsilon, \; |f(x_{k+1}) - f(x_k)| \le \varepsilon, \; \|\nabla f(x_k)\| \le \varepsilon,$$

мұндағы $\varepsilon > 0$ бастапқы есептің шешімінің *дәлдігі* деп аталады.

Бұл жерде тиімді шешімнің жуықтауы ретінде x_{k+1} мәні алынады. Итеративті үрдістердің маңызды қасиеті мына түрде беріледі:

$$f(x_0) \geq f(x_1) \geq \ldots \geq f(x_k) \geq f(x_{k+1}) \geq \ldots .$$

Осындай қасиеті бар әдіс *түсу әдісі* деп аталады. l_k бағыты мен λ_k қадам ұзындығын есептеуде қолданылатын мақсат функциясының туындыларының сәйкес ретіне қатысты *0-ші, 1-ші, 2-ші және т.б. ретті әдістер* болып бөлінеді. 0-ші ретті (туындылар қолданылмайтын) әдістерді кейде *іздеу әдістері* деп айтады.

Тек қана жарамды нүктелер ($x_k \in X$ шартынан $x_{k+1} \in X$ шарты алынады) тізбегін құратын әдістер *мүмкін болатын бағыттар әдісі* деп аталады.

Бірөлшемді оңтайландыру әдістері, яғни $x \in R^1$, ал $X = [a, b]$– итеративті әдістердің ең қарапайымы болып табылады.

8.2. Бірөлшемді минимизациялау әдістері

Бір айнымалы функцияны минимизациялау есебі шартсыз минимизациялаудың әр түрлі әдістерінде және сызықтық емес программалау есептерін шығару әдістерінің саласында көмекші есептерді шығару барысында өзекті болып табылады. Мысалы, көпөлшемді оңтайландыру әдістерінің әр түрлі нұсқаларындағы толық қадамды табу кезінде бірөлшемді минимизациялау есебі пайда болады.

Теорема 8.1. φ функциясы $[a, b]$ кесіндісінде унимодальды, $t_1, t_2 \in [a, b]$ және $t_1 < t_2$ болсын. Сонда, егер $\varphi(t_1) \leq \varphi(t_2)$ болса, онда $t^* \leq t_2$. Егер $\varphi(t_1) \geq \varphi(t_2)$ болса, онда $t^* \geq t_1$.

Осылайша есептелген $\varphi(t)$ мәндерінің негізінде t^* нүктесі жатқан ұзындығы бастапқы $[a, b]$ кесіндісінің ұзындығынан кіші болатын $[a', b']$, яғни $L' = b' - a' < L = b - a$ кесіндісін көрсетуге болады.

Минимум t^* нүктесі $[a', b']$ кесіндісінде *төңіректелген*, ал $[a', b']$ кесіндісі *төңіректеу кесіндісі* деп аталады.

$L_i = b_i - a_i$, $i = 1, 2, \ldots$ арқылы $\varphi(t)$ мәндерін i-ші есептеуден кейінгі төңіректеу кесіндісінің ұзындығын белгілейміз, $L_0 = b - a$.

8.2.1. Минимумды анықтаудың пассивті әдісі

N – натурал сан болсын, $a = t_1 < t_2 < ... < t_{N-1} < t_N = b$ нүктелері берілсін. $\varphi_i = \varphi(t_i)$, $i = 1, ..., n$ белгілеуін енгізейік. $\varphi_s = \min\limits_{1 \le i \le N} \varphi(t_i)$. Сонда φ функциясының унимодальдылығы бойынша, егер $1 < s < N$ болса, онда $[t_{s-1}, t_{s+1}]$ кесіндісі, $s = 1$ болса – $[t_1, t_2]$ кесіндісі, $s = N$ болса – $[t_{N-1}, t_N]$ кесіндісі төңіректеу кесіндісі болады. Көбінесе t^* мәнінің жуықтауы ретінде не t_s, не алынған төңіректеу кесіндісінің ортасы таңдалынады.

t_i түйіндері бірдей қашықтықта орналасқан жағдайда осы әдісті қолданған ыңғайлы болады, яғни $t_{i+1} = t_i + h$, мұндағы $h > 0$ табуляциялау қадамы. Бұл жағдайда талап етілетін дәлдікке (алынған төңіректеу кесіндісінің ұзындығы) жететіндей N мәнін есептеу оңай болады.

Сонымен, пассивті әдісте табуляция нүктесі – N саны алдын ала анықталады және функцияның мәні барлық N нүктеде есептеледі. Әрбір ағымдық нүктедегі есептелген функцияның мәні келесі есептеулерге әсер етпейді.

Егер N жұп болса, яғни $N = 2l$, $l = 1, 2, ...$, онда t_i, $i = \overline{1, N}$ нүктелерін бірдей қашықтықтағы ε-жұбы бойынша бөлу арқылы осы нүктелерді ең тиімді (төңіректеу кесіндісін максималды түрде кішірейту мағынасында) орналастыруға болады, яғни

$$t_{2j-1} = a + \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} j - \frac{\varepsilon}{2}, \; t_{2j} = a + \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} j + \frac{\varepsilon}{2}, \; j = \overline{1, \frac{N}{2}}, \quad (8.1)$$

мұндағы ε – қандай да бір кіші оң сан.

Бұл жерде

$$L_N = \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{L_0}{l+1} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Егер N тақ болса, яғни $N = 2l+1$, $l = 1, 2, ...$, онда нүктелерді бірқалыпты орналастыру ең жақсысы болып табылады, яғни

$$t_i = a + \frac{b-a}{N+1} i, \; i = \overline{1, N}. \quad (8.2)$$

Бұл жерде $L_N = 2\dfrac{b-a}{N+1} = \dfrac{L_0}{l+1}$.

Іздеудің пассивті әдісінде тақ санды нүктелерді пайдаланған тиімді емес.

t_i, $i=\overline{1,N}$ нүктелерін анықтағаннан кейін $f(t_i)$ функцияларының мәндері есептелінеді. $f(t_k)=\min\limits_{i=\overline{1,N}} f(t_i)$ болсын. Сонда, $t_0 = a$, $t_{N+1} = b$ деп ұсына отырып, қорытынды $\Delta_N = [t_{k-1}, t_{k+1}]$ төңіректеу кесіндісі анықталады. t_k нүктесі t^* минимум нүктесінің аппроксимациясы (бағалауы) ретінде, функцияның $f(t_k)$ мәні $f^* = f(t^*)$ бағалауы ретінде қабылданады, яғни

$$t^* \cong t_k,\ f^* \cong f(t_k).$$

8.1-мысал.

N=6, $\varepsilon = 0{,}1$ мәндерінде [0, 2] кесіндісінде берілген $f(t) = t + \dfrac{1}{t}$ функциясының минимумын пассивті әдіспен анықтау керек.

Шығарылуы. N=6 – нүктелер саны жұп болғандықтан t_{2j-1}, t_{2j} нүктелер жұбын (8.1) формуласының көмегімен есептейміз.

$$t_{2j-1} = a + \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} j - \frac{\varepsilon}{2} = 0 + \frac{2-0}{\frac{6}{2}+1} j - \frac{0{,}1}{2} = 0{,}5j - 0{,}05,$$

$$j = \overline{1, \frac{N}{2}} = \overline{1, 3}, \tag{a}$$

$$t_{2j} = a + \frac{b-a}{\frac{N}{2}+1} j + \frac{\varepsilon}{2} = 0 + \frac{2-0}{\frac{6}{2}+1} j + \frac{0{,}1}{2} = 0{,}5j + 0{,}05,$$

$$j = \overline{1, \frac{N}{2}} = \overline{1, 3}. \tag{ә}$$

t_1, t_3, t_5 мәндері (a) формуласымен, t_2, t_4, t_6 мәндері (ә) формуласымен анықталады. Есептеулерді кестеде берген ыңғайлы:

j	t_j	$f(t_j)$
1	0,45	2,67
2	0,55	2,37
3	0,95	2,0026
4	1,05	2,0024
5	1,45	2,14
6	1,55	2,20

$f(t_j)$ мәндерінің арасындағы ең кішісі $f(t_4) = 2,0024$ болғандықтан,

$$\Delta_6 = [t_3, t_5] = [0,95; 1,45],\ t^* \cong t_4 = 1,05,\ f^* \cong f(t_4) = 2,0024.$$

Жауабы: $\Delta_6 = [0,95; 1,45],\ t^* \cong 1,05,\ f^* \cong 2,0024.$

8.2.2. Минимумды анықтаудың белсенді әдістері

Пассивті іздеу әдісінен ерекше, есептеу барысында алдын ала алынған ақпараттар пайдаланылатын әдістер кездеседі. Мұндай әдістер жалпы түрде *минимумды іздеудің белсенді әдістері (немесе біртіндеп іздеу әдістері)* деп аталады.

Осы әдістер келесі сұлбаға негізделеді. Бірін-бірі қамтитын төңіректеу кесінділерінің тізбегі құрылады: $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \ldots$, мұндағы $[a_0, b_0] = [a, b]$. Егер $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$ болса, онда $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \lim\limits_{k\to\infty} b_k = t^*$. Практикада төңіректеу кесінділерінің осындай тізбегін білу қажетті дәлдіктегі минимумды төңіректеуге мүмкіндік береді. Мысалы, егер қандай да бір $\varepsilon > 0$ саны берілсе, онда $b_N - a_N \le \varepsilon$ теңсіздігі орындалатындай $k = N$ мәнінде $[a_N, b_N]$ кесіндісінің кез келген $\tilde{t}$ нүктесін есептің жуық шешімі деп есептеуге болады. Бұл жерде $|\tilde{t} - t^*| \le \varepsilon$.

Біртіндеп іздеу әдістері $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \ldots$ кесінділер тізбегін құрумен ерекшеленеді. Дербес жағдайда, алынған төңіректеу кесінділерінде пассивті іздеуді бірнеше рет қайталау біртіндеп іздеу нұсқаларының бірі болып табылады. Мысалы, егер әрбір k қадамда $N = 5$ деп ұсынсақ, яғни $t_1 = a$, $t_5 = b$, $t_3 = \dfrac{t_1 + t_5}{2}$, $t_2 = \dfrac{t_1 + t_3}{2}$

және $t_4 = \dfrac{t_3 + t_5}{2}$ онда t_i нүктелері төңіректеу кесіндісін 4 бірдей бөлікке бөледі. Демек, жаңа $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ төңіректеу кесіндісінің ұзындығы $[a_k, b_k]$ кесіндісінің ұзындығынан 2 есе (кей жағдайда 4 есе кіші болуы мүмкін) кіші болады.

Төңіректеу кесіндісін қысқартудың жоғары жылдамдылығы (әрбір итерацияда, оның ұзындығы кем дегенде екі есе кішірейеді) осы әдістің қолайлы жағдайы болып есептеледі. Берілген дәлдікке жету үшін қажетті N итерация санын есептеу оңай болады. Шыныда да, кез келген k үшін $b_k - a_k = \dfrac{b-a}{2^k}$ қатынасы орындалатындықтан, N саны $\dfrac{b-a}{2^k} \le \varepsilon$ теңсіздігі орындалатын k-ның ең кіші мәні болады. Сонымен, $N = \left]\log_2 \dfrac{b-a}{\varepsilon}\right[$. Әрбір итерацияда алдыңғы итерациядан қалған t_{s-1}, t_s, t_{s+1} үш нүктеге t_2, t_4 жаңа нүктелерін қосып, φ_2, φ_4 функцияларының мәнін есептеудің қажеттілігі әдістің қолайсыз жері болып есептеледі.

Әрі қарай әрбір қадамда белгілі түйіндерге тек қана бір жаңа түйін қосуға мүмкіндік беретін төңіректеу кесіндісін құру мүмкіндігін қарастырамыз.

Теорема 8.2 (*функцияның $[a, b]$ кесіндісіндегі унимодальдылық қасиеті*) $a = t_1 < t_2 = b$ қатынасы орындалатындай t_1, t_2 нүктелері бар болсын. Егер $\varphi_1 < \varphi_2$ болса, онда $[a, t_2]$ кесіндісі, егер $\varphi_1 > \varphi_2$ болса, онда $[t_1, b]$ кесіндісі төңіректеу кесіндісі болып табылады.

Теорема 8.3 (φ *унимодальды функциясын минимизациялау әдісінің принципиальды сұлбасы*). φ унимодальды функция үшін $[a_0, b_0]$ төңіректеу кесіндісі белгілі болсын. $[a_k, b_k]$, $k = 0, 1, \ldots$ төңіректеу кесінділері құрылсын. $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ кесіндісін табу тәсілін сипаттайық. Қандай да бір тәсілмен $a_k < t_1 < t_2 < b_k$ теңсіздігін қанағаттандыратын t_1, t_2 сандары табылсын. Егер $\varphi_1 \le \varphi_2$ болса, $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = t_2$ деп ұсынамыз. Кері жағдайда $a_{k+1} = t_1$, $b_{k+1} = b_k$ деп ұсынамыз.

Осы сұлбаның аясындағы әдістердің негізгі айырмашылығы – t_1, t_2 нүктелерін есептеудің ережелерінің әр түрлілігінде. Көптеген әдістерде t_1, t_2 нүктелері төңіректеу кесіндісінің ортасына қатысты симметриялы орналасады. Осындай әдістерге мысалы дихотомия, алтын қима, Фибоначчи және т.б. әдістерді жатқызуға болады.

8.3. Дихотомия әдісі

Бір айнымалы функцияны минимизациялау есебінде x^* төңіректік минимум нүктесі жататын, $f(x)$ сызықтық функция унимодальды болатын $[a, b]$ аралығы анықталсын.

Унимодальдылық аралықты тарылту үшін $[a, b]$ кесіндісінің ортасына симметриялы орналасқан x_1 және x_2 нүктелерін пайдаланамыз:

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm k\frac{a-b}{2}.$$

k саны 1 санынан едәуір кіші деп есептейік. Сонда x_1, x_2 нүктелері $[a, b]$ кесіндісінде жатады және кішірейтілген $[a_1, b_1]$ аралығын аламыз. Мүмкін болатын келесі үш жағдайдың әрқайсысында кішірейтілген кесіндінің ұзындығын бағалаймыз:

1. $y_1 < y_2$ $a_1 = a$, $b_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2} - k\dfrac{a-b}{2}$,

$$b_1 - a_1 = \frac{a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} - a = \frac{-a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} = -\frac{a-b}{2} - k\frac{a-b}{2} =$$

$$= -(a-b)\left(\frac{1}{2} + \frac{k}{2}\right) = \frac{1+k}{2}(b-a),$$

$$b_1 - a_1 = \frac{1+k}{2}(b-a);$$

2. $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1 = \dfrac{a+b}{2} + k\dfrac{a-b}{2}$,

$$b_1 = b,\ b_1 - a_1 = \frac{1+k}{2}(b-a);$$

3. $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1 = \dfrac{a+b}{2} + k\dfrac{a-b}{2}$, $b_1 = x_2 = \dfrac{a+b}{2} - k\dfrac{a-b}{2}$,

$$b_1 - a_1 = k(b - a).$$

Осылайша түрлендірудің бірінші қадамынан кейін ұзындығы кішірейген $[a_1, b_1]$ унимодальдылық аралығы табылады.

Егер k шамасы өте аз болса, онда 1-ші және 2-ші жағдайларда унимодальдылық b–a кесіндісінің ұзындығы екі есе дерлік кішірейеді.

Енді жаңа кішірейген $[a_1, b_1]$ аралығында осы кесіндінің ортасына симметриялы $x_1^{(1)}$, $x_2^{(1)}$ нүктелерін таңдаймыз:

$$x_{1,2}^{(1)} = \frac{a_1 + b_1}{2} \pm k\frac{a_1 - b_1}{2}.$$

Кішірейген $[a_1, b_1]$ аралығын тапқанымыз секілді есептеулерді жүргізе отырып ұзындығы $b_2 - a_2 = \frac{1+k}{2}(b_1 - a_1) = \frac{(1+k)^2}{4}(b-a)$ шамасынан артық болмайтын $[a_2, b_2]$ аралығын аламыз, және т.т.

Нәтижесінде, $f(x)$ функциясының x^* төңіректік минимум нүктесі әрқайсысында жататын және $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, тізбектерінің ортақ шегі болатын, бірінің ішінде бірі орналасқан $[a, b]$, $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, ..., $[a_n, b_n]$, ... кесінділер тізбегін аламыз.

Осыдан $x^* \approx a_n \approx b_n$ жуық теңдігін аламыз, оның n-ші қадамдағы дәлдігі

$$0 \le x^* - a_n \le b_n - a_n \le \frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon \qquad (8.3)$$

теңсіздігімен бағаланады.

(8.3) теңсіздіктен берілген дәлдікке жету мақсатында n қадам санын анықтауға болады:

$$\frac{(1+k)^n}{2^n}(b-a) < \varepsilon \Rightarrow \left(\frac{1+k}{2}\right)^n < \frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow \ln\left(\frac{1+k}{2}\right)^n < \ln\frac{\varepsilon}{b-a} \Rightarrow$$

$$n > \frac{\ln\frac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\frac{1+k}{2}\right)}. \qquad (8.4)$$

Бұл әдісте әрбір итерацияда төңіректеу кесіндісі екі есе дерлік кішірейеді. Сондықтан кейбір әдебиеттерде бұл әдісті *қақ бөлу әдісі* деп айтады. Әрине, бұл әдістің артықшылығын көрсетеді. Сонымен қатар, (8.4) қатынастан берілген дәлдіктегі есептің жуық шешімін табу үшін итерация санын алдын ала есептеге болады.

8.2-мысал.

$[a, b] = [-2, 3]$ кесіндісінде берілген $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ функциясының минимумын $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдікпен, дихотомия әдісін пайдаланып анықтау керек.

Шығарылуы. $n > \dfrac{\ln \dfrac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\dfrac{1+k}{2}\right)}$ теңсіздігін пайдаланып ең аз қадам санын анықтаймыз:

$$n > \frac{\ln \dfrac{\varepsilon}{b-a}}{\ln\left(\dfrac{1+k}{2}\right)} = \frac{\ln \dfrac{0{,}1}{3-(-2)}}{\ln \dfrac{1+0{,}1}{2}} = \frac{\ln 0{,}02}{\ln 0{,}55} = 6{,}54,\ n > 6{,}54.\ n_{\min} \approx 7.$$

$$x_1^{(i)} = \frac{a_i + b_i}{2} + k\frac{a_i - b_i}{2},\ y_1^{(i)} = f\left(x_1^{(i)}\right),$$

$$x_2^{(i)} = \frac{a_i + b_i}{2} - k\frac{a_i - b_i}{2},\ y_2^{(i)} = f\left(x_2^{(i)}\right),\ \left(i = \overline{0, n}\right)$$

белгілеулерін енгіземіз, мұндағы $a_0 = a = -2$, $b_0 = b = 3$, a_i, b_i – есептеудің i-ші қадамында алынған кесіндінің басының және соңының координаталары, $x_1^{(i)}$ және $x_2^{(i)}$ – $[a_i, b_i]$ кесіндісіне тиісті.

Біртіндеп есептеулерді жүргіземіз.

$[a, b] = [-2, 3]$.

$$x_1^{(0)} = \frac{-2+3}{2} + 0{,}1 \cdot \frac{-2-3}{2} = 0{,}5 + 0{,}1 \cdot (-2{,}5) = 0{,}25,\ x_1^{(0)} = 0{,}25.$$

$$x_2^{(0)} = \frac{-2+3}{2} - 0{,}1 \cdot \frac{-2-3}{2} = 0{,}5 - 0{,}1 \cdot (-2{,}5) = 0{,}75,\ x_2^{(0)} = 0{,}75.$$

$y_1^{(0)}=1{,}1992,\ y_2^{(0)}=-5{,}4883,\ y_1^{(0)}>y_2^{(0)}.$

1. $[a_1;b_1]=[x_1^{(0)};\quad b]=[0{,}25;3].$

$x_1^{(1)}=1{,}4875,\ x_2^{(1)}=1{,}7625,\ y_1^{(1)}=-23{,}0296,\ y_2^{(1)}=-28{,}2278,$

$y_1^{(1)}>y_2^{(1)}.$

2. $[a_2,b_2]=[x_1^{(1)},b_1]=[1{,}4875;3].$

$x_1^{(2)}=2{,}1681,\ x_2^{(2)}=2{,}3194,\ y_1^{(2)}=-28{,}885,\ y_2^{(2)}=-25{,}6452,$

$y_1^{(2)}<y_2^{(2)}.$

3. $[a_3,b_3]=[a_2;x_2^{(2)}]=[1{,}4875;2{,}3194].$

$x_1^{(3)}=1{,}8618,\ x_2^{(3)}=1{,}945\ ,\ y_1^{(3)}=-29{,}3645,\ y_2^{(3)}=-29{,}8945,$

$y_1^{(3)}>y_2^{(3)}.$

4. $[a_4,b_4]=[x_1^{(3)},b_3]=[1{,}8618;2{,}3194].$

$x_1^{(4)}=2{,}0677,\ x_2^{(4)}=2{,}1135,\ y_1^{(4)}=-29{,}8286,\ y_2^{(4)}=-29{,}5066,$

$y_1^{(4)}<y_2^{(4)}.$

5. $[a_5,b_5]=[a_4;x_2^{(4)}]=[1{,}8618;2{,}1135].$

$x_1^{(5)}=1{,}9751,\ x_2^{(5)}=2{,}0002,\ y_1^{(5)}=-29{,}978,\ y_2^{(5)}=-30,\ y_1^{(5)}>y_2^{(5)}.$

6. $[a_6,b_6]=[x_1^{(5)},b_5]=[1{,}9751;2{,}1135].$

$x_1^{(6)}=2{,}0374,\ x_2^{(6)}=2{,}0512,\ y_1^{(6)}=-29{,}9487,\ y_2^{(5)}=-29{,}9029,$

$y_1^{(6)}<y_2^{(6)}.$

7. $[a_7,b_7]=\left[a_6,x_2^{(6)}\right]=[1{,}9751;2{,}0512].$

$\Delta=b_7-a_7=2{,}0512-1{,}9751=0{,}0761<\varepsilon=0{,}1.$

Алынған есептеулерді кестеге енгізейік:

Итерация саны	a_j	b_j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$f_1^{(j)}$	$\le$ $>$	$f_2^{(j)}$	$\Delta = b_j - a_j$
0	-2	3	0,25	0,75	1,1992	>	-5,4883	5
1	0,25	3	1,4875	1,7625	-23,0296	>	-28,2278	2,75
2	1,4875	3	2,1681	2,3194	-28,885	≤	-25,6452	1,5125
3	1,4875	2,3194	1,8618	1,945	-29,3645	>	-29,8945	0,8319
4	1,8618	2,3194	2,0677	2,1135	-29,8286	≤	-29,5066	0,4576
5	1,8618	2,1135	1,9751	2,0002	-29,978	>	-30	0,2517
6	1,975	2,1135	2,0374	2,0512	-29,9487	≤	-29,9029	0,1385
7	1,9751	2,0512						0,0761

Кестеден көріп отырғанымыздай, берілген $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдікке итерацияның 7-қадамында жетеміз. Төңіректік минимум нүктесі – $[a_7, b_7] = [1{,}9751; 2{,}0512]$ аралығында, $x^* \approx 2{,}0002$, $f^* = -30$.

Жауабы. $[a, b] = [1{,}9751\,; 2{,}0512\,]\, x^* \approx 2{,}0002$, $f^* = -30$.

8.4. Фибоначчи әдісі

Фибоначчи әдісі біртіндеп іздеу әдістерінің ішіндегі ең «жақсы» (төңіректеу кесіндісінің ұзындығын максималды кішірейту мағынасында) әдіс болып табылады.

Фибоначчи әдісі бойынша, бірінші қадамда (итерацияда) $\Delta_0 = [a, b]$ кесіндісінің ортасына қатысты симметриялы орналасқан $x_1^{(1)}$ және $x_2^{(1)}$ нүктелеріндегі ($x_1^{(1)} < x_2^{(1)}$) $f(x)$ функциясының екі мәні есептеледі. Есептеу нәтижесі бойынша кесіндінің бір бөлігі ($[a, x_1^{(1)}]$ не $[x_2^{(1)}, b]$) қарастырылмайды, және есептеулер жүргізілген нүктелердің (сәйкес $x_2^{(1)}$ не $x_1^{(1)}$) біреуі $\Delta_2 \equiv \Delta^{(1)}$ кесіндісінде қалады. Әрбір келесі қадамда кезектегі есептелетін нүкте қалған нүктеге симметриялы таңдалынады. Сонымен, бірінші итерацияда $f(x)$ функциясының екі мәні, ал келесі итерацияларда – бір мәні есептеледі. Сондықтан, N есептеулер саны берілген кезде $N - 1$ қадам (итерация) орындалады.

$x_1^{(j)}$ және $x_2^{(j)}$, $j = \overline{1, N-1}$ мәндері есептелген кезде келесі түрде анықталатын Фибоначчи сандары пайдаланылады:

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_k = F_{k-1} + F_{k-2},\ k = 2, 3, \ldots .$$

Берілген N есептеу санының орындалуы есептелудің аяқталғанын білдіреді.

Сонымен, *унимодальды функцияның минимумын Фибоначчи әдісімен табу алгоритмін* (ретін) көрсетуге болады:

1. N мәні беріледі, F_k, $k = \overline{0, N+1}$ – Фибоначчи саны анықталады,

$$\varepsilon < \frac{b-a}{F_{N+1}}$$

шартынан ε мәні таңдалынады. $j = 1$ деп ұйғарылады.

2. j-ші итерацияда келесі мәндер есептеледі:

$$x_1^{(j)} = a^{(j-1)} + \frac{F_{N-j-1}}{F_{N-j+1}}\left(b^{(j-1)} - a^{(j-1)}\right) - \frac{(-1)^{N-j+1}}{F_{N-j+1}}\varepsilon,$$

$$x_2^{(j)} = a^{(j-1)} + \frac{F_{N-j}}{F_{N-j+1}}\left(b^{(j-1)} - a^{(j-1)}\right) + \frac{(-1)^{N-j+1}}{F_{N-j+1}}\varepsilon,$$

$$f_1^{(j)} = f\left(x_1^{(j)}\right),\ f_2^{(j)} = f\left(x_2^{(j)}\right).$$

Егер $f_1^{(j)} \le f_2^{(j)}$ болса, онда $a^{(j)} = a^{(j-1)}$, $b^{(j)} = x_2^{(j)}$, $x_2^{(j+1)} = x_1^{(j)}$; егер $f_1^{(j)} > f_2^{(j)}$ болса, онда $a^{(j)} = x_1^{(j)}$, $b^{(j)} = b^{(j-1)}$, $x_1^{(j+1)} = x_2^{(j)}$.

3. Есептеудің аяқталу шарты тексеріледі:

$$j = N-1.$$

Егер шарт орындалса, онда қорытынды төңіректеу кесіндісі, x^* минимум нүктесі мен $f^* = f\left(x^*\right)$ минимум шамаларының бағасы анықталады, есептеулер тоқтатылады.

Егер шарт орындалмаса, онда $j = j+1$ деп ұйғарылып алгоритмнің 2-қадамына көшіріледі.

Ескерту. j-ші итерацияда $(j > 1)$ алдыңғы итерацияда анықталмаған $x_i^{(j)}$, $i = 1, 2$ нүктесі есептеледі.

Қорытынды Δ_N төңіректеу кесіндісінде қалған $x_i^{(N-1)}$, $i = 1, 2$ нүктесі минимум нүктесінің бағалауы болып табылады.

8.3-мысал.

$[a,\, b] = [-2,\, 3]$ кесіндісінде берілген $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ функциясының минимумын $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдікпен, $N = 7$ мәнінде Фибоначчи әдісін пайдаланып анықтау керек.

Шығарылуы. Берілген есеп үшін $N - 1 = 6$ итерация орындалады.

F_k, $k = \overline{1, 8}$ Фибоначчи сандарын анықтаймыз:

$$F_0 = F_1 = 1,\ F_2 = 2,\ F_3 = 3,\ F_4 = 5,\ F_5 = 8,\ F_6 = 13,\ F_7 = 21,$$

$$F_8 = 34\ .$$

$$\varepsilon < \frac{b-a}{F_8} = \frac{3-(-2)}{34} = 0{,}15\,.$$

$\varepsilon = 0{,}1$ болсын.

Бірінші итерация. $j = 1$.

$$x_1^{(1)} = a^{(0)} + \frac{F_{N-1-1}}{F_{N-1+1}} \cdot \left(b^{(0)} - a^{(0)}\right) - \frac{(-1)^{N-1+1}}{F_{N-1+1}} \cdot \varepsilon = -2 + \frac{F_5}{F_7} \cdot (3-(-2)) -$$

$$-\frac{(-1)^7}{F_7} \cdot 0{,}1 = -2 + \frac{8 \cdot 5 + 0{,}1}{21} = -0{,}09$$

$$x_2^{(1)} = a^{(0)} + \frac{F_{N-1}}{F_{N-1+1}} \cdot \left(b^{(0)} - a^{(0)}\right) + \frac{(-1)^{N-1+1}}{F_{N-1+1}} \cdot \varepsilon = -2 + \frac{F_6}{F_7} \cdot (3-(-2)) +$$

$$+\frac{(-1)^7}{F_7} \cdot 0{,}1 = -2 + \frac{13 \cdot 5 - 0{,}1}{21} = 1{,}09$$

$y_1^{(1)} = 1{,}9059$, $y_2^{(1)} = -13{,}2026$.

$y_1^{(1)} > y_2^{(1)}$, $a^{(1)} = x_1^{(1)} = -0{,}09$, $b^{(1)} = b^{(0)} = 3$, $x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = 1{,}09$.

Екінші итерация. $j = 2$.

$$x_2^{(2)} = a^{(1)} + \frac{F_5}{F_6} \cdot \left(b^{(1)} - a^{(1)}\right) + \frac{(-1)^6}{F_6} \cdot \varepsilon = -0{,}09 + \frac{8}{13} \cdot (3-(-0{,}09)) +$$

$$+\frac{1}{13} \cdot 0{,}1 = 1{,}8192\,.$$

$$y_1^{(2)} = -13{,}2026\,,\ \ y_2^{(2)} = -28{,}9382\,.$$

$$y_1^{(2)} > y_2^{(2)}\,,\ a^{(2)} = x_1^{(2)} = 1{,}09\,,\ b^{(2)} = b^{(1)} = 3\,,\ x_1^{(3)} = x_2^{(2)} = 1{,}8192\,.$$

Үшінші итерация. $j = 3$.

$$x_2^{(3)} = a^{(2)} + \frac{F_4}{F_5}\cdot\left(b^{(2)} - a^{(2)}\right) + \frac{(-1)^5}{F_5}\cdot\varepsilon = 1{,}09 + \frac{5}{8}\cdot(3 - 1{,}09) +$$

$$+\frac{-1}{8}\cdot 0{,}1 = 2{,}2713\,.$$

$$y_1^{(3)} = -28{,}9382\,,\ \ y_2^{(3)} = -26{,}936\,.$$

$$y_1^{(3)} < y_2^{(3)}\,,\ a^{(3)} = a^{(2)} = 1{,}09\,,\ b^{(3)} = x_2^{(3)} = 2{,}2713\,,$$

$$x_2^{(4)} = x_1^{(3)} = 1{,}8192\,.$$

Төртінші итерация. $j = 4$.

$$x_1^{(4)} = a^{(3)} + \frac{F_2}{F_4}\cdot\left(b^{(3)} - a^{(3)}\right) - \frac{(-1)^4}{F_4}\cdot\varepsilon = 1{,}09 + \frac{2}{5}(2{,}2713 - 1{,}09) -$$

$$-\frac{1}{5}\cdot 0{,}1 = 1{,}5425\,.$$

$$y_1^{(4)} = -24{,}2487\,,\ \ y_2^{(4)} = -28{,}9382\,.$$

$$y_1^{(4)} > y_2^{(4)}\,,\ a^{(4)} = x_1^{(4)} = 1{,}5425\,,\ b^{(4)} = b^{(3)} = 2{,}2712\,,$$

$$x_1^{(5)} = x_2^{(4)} = 1{,}8192\,.$$

Бесінші итерация. $j = 5$.

$$x_2^{(5)} = a^{(4)} + \frac{F_2}{F_3}\cdot\left(b^{(4)} - a^{(4)}\right) + \frac{(-1)^3}{F_3}\cdot\varepsilon = 1{,}5425 + \frac{2}{3}\cdot(2{,}2712 -$$

$$-1{,}5425) + \frac{-0{,}1}{3} = 1{,}995\,.$$

$$y_1^{(5)} = -28{,}9382\,,\ \ y_2^{(5)} = -29{,}9991\,.$$

$$y_1^{(5)} > y_2^{(5)}\,,\ a^{(5)} = x_1^{(5)} = 1{,}9192,\ b^{(5)} = b^{(4)} = 2{,}2712\,,\ x_1^{(6)} = x_2^{(5)} = 1{,}995.$$

Алтыншы итерация. $j = 6$.

$$x_2^{(6)} = a^{(5)} + \frac{F_1}{F_2} \cdot \left(b^{(5)} - a^{(5)}\right) + \frac{(-1)^2}{F_2} \cdot \varepsilon = 1{,}8192 + \frac{1}{2} \cdot (2{,}2712 -$$

$$-1{,}8192) + \frac{1}{2} \cdot 0{,}1 = 2{,}0952.$$

$y_1^{(6)} = -29{,}9991$, $y_2^{(6)} = -29{,}6562$.

$y_1^{(6)} < y_2^{(6)}$, $a^{(6)} = a^{(5)} = 1{,}8592$, $b^{(6)} = x_2^{(6)} = 2{,}0952$.

Алгоритмнің 3-қадамында көрсетілген шарт орындалады ($j = N - 1 = 6$), есептеулер тоқтатылады.

Есептеулер нәтижелерін кестеге жазайық:

Итерация саны	a_j	b_j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$f_1^{(j)}$	$\le$ $>$	$f_2^{(j)}$
0	-2	3					
1	-0,09	3	-0,09	1,09	1,9059	>	-13,2026
2	1,09	3	1,09	1,8192	-13,2026	>	-28,9382
3	1,09	2,2713	1,8192	2,2713	-28,9382	≤	-26,936
4	1,5425	2,2713	1,5425	1,8192	-24,2487	>	-28,9382
5	1,8192	2,2713	1,8192	1,995	-28,9382	≤	-29,9991
6	1,8192	2,0952	1,995	2,0952	-29,9991	≤	-29,6562

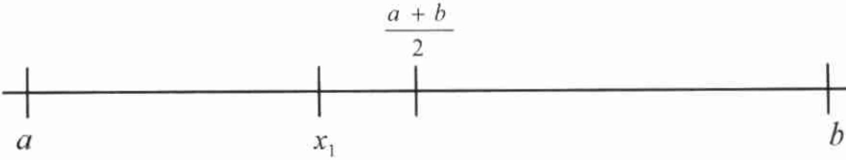
Төңіректік минимум нүктесі – $[a_6, b_6] = [1{,}8192; 2{,}0952]$ аралығында, $x^* \approx 2{,}0952$, $f^* = -29{,}9991$.

Жауабы. $[a, b] = [1{,}8192; 2{,}0952]$, $x^* \approx 2{,}0952$, $f^* = -29{,}9991$.

8.5. Алтын қима әдісі

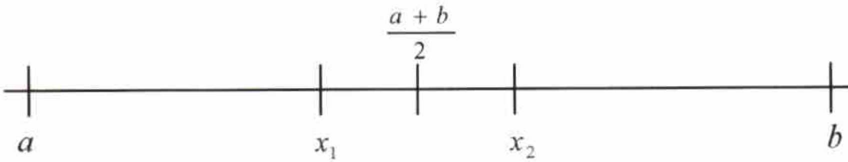
$x_1 \in (a, b)$ нүктесі $[a, b]$ кесіндісін бірдей емес екі бөлікке бөлсін. Егер $[a, b]$ кесіндісінің толық ұзындығының $b - x_1$ үлкен бөлігінің ұзындығына қатынасы үлкен бөліктің ұзындығының $x_1 - a$ кіші бөлігінің ұзындығына қатынасына тең болса, онда x_1 нүктесі $[a, b]$ кесіндісінің *алтын қимасы* болып табылады (8.1-сурет), яғни

егер $\dfrac{b-a}{b-x_1} = \dfrac{b-x_1}{x_1-a}$ қатынасы ақиқат болса, онда x_1 – алтын қима.



8.1-сурет. x_1 – $[a, b]$ кесіндісінің алтын қимасы

Осылайша, $[a, b]$ кесіндісінің ортасына қатысты x_1 нүктесіне симметриялы x_2 нүктесі осы кесіндінің екінші алтын қимасы болып табылады (8.2-сурет).



8.2-сурет. x_1, x_2 – $[a, b]$ кесіндісінің алтын қималары

x_1 және x_2 нүктелері $[a, b]$ кесіндісінің ортасына қатысты симметриялы орналасқандықтан,

$$x_{1,2} = \frac{a+b}{2} \pm k\frac{a-b}{2}. \tag{8.5}$$

$$b - x_1 = b - \frac{a+b}{2} - k\frac{a-b}{2} = \frac{b-a}{2} + k\frac{b-a}{2} = (1+k)\frac{b-a}{2},$$

$$x_1 - a = \frac{a+b}{2} + k\frac{a-b}{2} - a = \frac{b-a}{2} - k\frac{b-a}{2} = (1-k)\frac{b-a}{2},$$

алтын қима анықтамасын пайдалана отырып $k > 0$ мәнін есептейміз:

$$\frac{b-a}{b-x_1} = \frac{b-x_1}{x_1-a} \Rightarrow \frac{b-a}{(1+k)\frac{b-a}{2}} = \frac{(1+k)\frac{b-a}{2}}{(1-k)\frac{b-a}{2}} \Rightarrow \frac{2}{1+k} = \frac{1+k}{1-k} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k^2 + 4k - 1 = 0 \Rightarrow k_1 = -2 + \sqrt{5},\ k_2 = -2 - \sqrt{5}.$$

$$k > 0 \quad k = -2 + \sqrt{5}.$$

Теорема 8.4. x_1, x_2 – $[a, b]$ кесіндісінің алтын қималары болсын, $x_1 < x_2$. Сонда x_1 – $[a, x_2]$ кесіндісінің, x_2 – $[x_1, b]$ кесіндісінің алтын қимасы болып табылады.

8.4-теореманың негізінде бастапқы итерациядан басқа, әрбір итерацияда алтын қиманың бір ғана нүктесін және осы нүктедегі функцияның мәнін есептеу қажет. Осы мағынада қарастырғанда алтын қима әдісінің алдында қарастырған әдістерден (әрбір итерацияда жаңа екі нүктедегі функцияның мәндері есептеледі) артықшылығы байқалады.

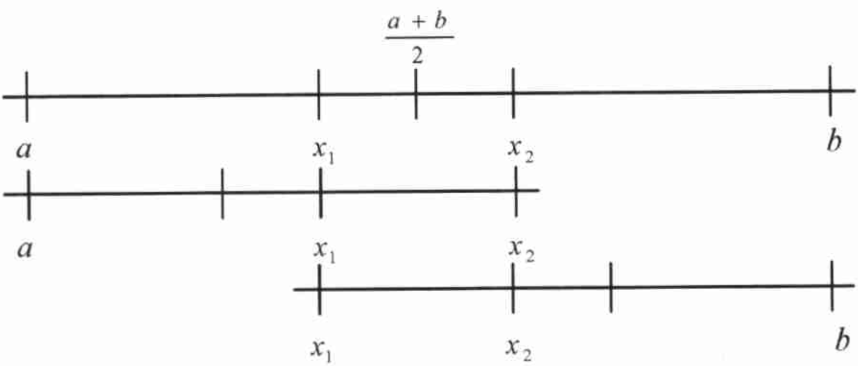
Алтын қима әдісінде төңіректеу кесіндісінің ұзындығын кішірейту жылдамдығы дихотомия әдісіне қарағанда едәуір төмен.

Соған қарамастан, алтын қима әдісінде берілген дәлдікке жету үшін функцияны есептеудің саны аз болғандықтан бұл әдіс дихотомия әдісімен салыстырғанда тиімді болып табылады.

Бірақ, алтын қима нүктелерін есептеу барысында иррационал сан кездесетіндіктен алтын қима нүктесі қандай да бір қателікпен есептеледі.

Алтын қиманың қасиеттері:

$[a, b]$ кесіндісінің x_1 және x_2 екі алтын қимасы болсын, сонда x_1 бір мезгілде $[a, x_2]$ кесіндісінің, ал x_2 – $[x_1, b]$ кесіндісінің алтын қимасы болып табылады (8.3-сурет).



8.3-сурет. x_1 – $[a, b]$ және $[a, x_2]$ кесінділерінің алтын қимасы, x_2 – $[a, b]$ және $[x_1, b]$ кесінділерінің алтын қимасы

Унимодальды $f(x)$ функциясының x^* төңіректік минимум нүктесіне тарылатын бірінің ішіне бірі тізбектей орналасқан $[a_i, b_i]$, $(i=\overline{1,n})$ кесінділерін *алтын қима әдісімен табудың алгоритмі*

1. (8.5) формула бойынша $k=-2+\sqrt{5}$ болғанда бастапқы $[a, b]$ кесіндісінде x_1 және x_2 нүктелерін, содан кейін $\Delta_1 x = x_2 - x_1$ айырымын табамыз.

2. Функцияның $y_1 = f(x_1)$ және $y_2 = f(x_2)$ мәндерін есептейміз.

3. Функцияның унимодальдылық аралығын тарылту сұлбасына сәйкес $[a_1, b_1]$ тарылған кесіндіні құрамыз.

4. Келесі қадамға дайындала отырып және алтын қима қасиетін пайдалана отырып, $[a, b]$ кесіндісінде $x_1^{(1)}$ және $x_2^{(1)}$ – екі алтын қиманы табамыз. Бұл жерде үш жағдай болуы мүмкін:

1. $y_1 < y_2$, $a_1 = a$, $b_1 = x_2$, $x_2^{(1)} = x_1$, $x_1^{(1)} = a_1 + \Delta_1 x$, $y_2^{(1)} = y_1$.

2. $y_1 > y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = b$, $x_1^{(1)} = x_2$, $x_2^{(1)} = b_1 - \Delta_1 x$, $y_1^{(1)} = y_2$.

3. $y_1 = y_2$, $a_1 = x_1$, $b_1 = x_2$, $x_{1,2}^{(1)} = \dfrac{a_1 + b_1}{2} \pm k\dfrac{a_1 - b_1}{2}$.

Енді қарастырылған сұлба бойынша, 1-ші және 2-ші жағдайлардағы $y_2^{(i)}$ немесе $y_1^{(i)}$ $(i = 1, 2, ..., n)$ мақсат функцияларының мәндері алдыңғы қадамда есептелгенін ескере отырып $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$ және т.б. кесінділерді табамыз. Жуық $x^* \approx a_n \approx b_n$ теңдігінің n-ші қадамдағы есептеу дәлдігін

$$0 \le x^* - a_n \le \frac{b-a}{\tau^n} < \varepsilon \tag{8.6}$$

теңсіздігімен бағалауға болады, мұндағы $\tau = \dfrac{2}{1+k} = \dfrac{1}{\sqrt{5}-2} \approx 1{,}618$.

8.4-мысал.

$[a, b] = [-2, 3]$ кесіндісінде берілген $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2$ функциясының минимумын $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдікпен алтын қима әдісін пайдаланып анықтау керек.

$$f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 2,\ [a, b] = [-2; 3],\ \ \varepsilon = 0{,}1.$$

Шығарылуы. $\dfrac{b-a}{\tau^n} < \varepsilon$ теңсіздігін есептеудің ең аз қадам санын анықтаймыз.

$$n > \frac{\ln\frac{b-a}{\varepsilon}}{\ln\tau} = \frac{\ln\frac{5}{0{,}1}}{\ln 1{,}618} = \frac{\ln 50}{\ln 1{,}618} = 8{,}1299\,,\ n > 8{,}1299\,,\ n_{\min} = 9\,.$$

$$k = -2 + \sqrt{5} = 0{,}236\,.$$

$x_{1,2} = \dfrac{a+b}{2} \pm k\dfrac{a-b}{2}$ формуласын пайдаланып айнымалылардың мәндерін есептейміз.

$[a, b] = [-2; 3]$, $x_1 = -0{,}09$, $x_2 = 1{,}09$,

$\Delta_1 x = 1{,}09 - (-0{,}09) = 1{,}18$, $y_1 = 1{,}9059$, $y_2 = -13{,}2026$,

$y_1 > y_2$, $\Delta = b - a = 5$.

1. $[a_1, b_1] = [x_1; b] = [-0{,}09; 3]$,

$x_1^{(1)} = x_2 = 1{,}09$, $x_2^{(1)} = 3 - 1{,}18 = 1{,}82$, $\Delta_1 x = 1{,}82 - 1{,}09 = 0{,}73$,

$y_1^{(1)} = y_2 = -13{,}2026$, $y_2^{(1)} = -28{,}9471$, $y_1^{(1)} > y_2^{(1)}$,

$\Delta = b_1 - a_1 = 3{,}09$.

2. $[a_2, b_2] = [x_1^{(1)}; b_1] = [1{,}09; 3]$,

$x_1^{(2)} = x_2^{(1)} = 1{,}82$, $x_2^{(2)} = 3 - 0{,}73 = 2{,}27$,

$\Delta_2 x = 2{,}27 - 1{,}82 = 0{,}45$,

$y_1^{(2)} = y_2^{(1)} = -28{,}9471$, $y_2^{(2)} = -26{,}966$, $y_1^{(2)} < y_2^{(2)}$,

$\Delta = b_2 - a_2 = 1{,}91$.

3. $[a_3, b_3] = [a_2; x_2^{(2)}] = [1{,}09; 2{,}27]$,

$x_1^{(3)} = 1{,}09 + 0{,}45 = 1{,}54$, $x_2^{(3)} = x_1^{(2)} = 1{,}82$,

$\Delta_3 x = 1{,}82 - 1{,}54 = 0{,}28$,

$y_1^{(3)} = -24{,}1948$, $y_2^{(3)} = y_1^{(2)} = -28{,}9471$, $y_1^{(3)} > y_2^{(3)}$,

$\Delta = b_3 - a_3 = 1{,}18$.

4. $[a_4, b_4] = [x_1^{(3)}; b_3] = [1{,}54; 2{,}27]$,

$x_1^{(4)} = x_2^{(3)} = 1{,}82$, $x_2^{(4)} = 2{,}27 - 0{,}28 = 1{,}99$,

$\Delta_4 x = 1{,}99 - 1{,}82 = 0{,}17$,

$y_1^{(4)} = y_2^{(3)} = -28{,}9471$, $y_2^{(4)} = -29{,}9964$, $y_1^{(4)} > y_2^{(4)}$,

$\Delta = b_4 - a_4 = 0{,}73$.

5. $[a_5, b_5] = [x_1^{(4)}; b_4] = [1{,}82; 2{,}27]$,

$x_1^{(5)} = x_2^{(4)} = 1{,}99$, $x_2^{(5)} = 2{,}27 - 0{,}17 = 2{,}1$,

$\Delta_5 x = 2{,}1 - 1{,}99 = 0{,}11$,

$y_1^{(5)} = y_2^{(4)} = -29{,}9964$, $y_2^{(5)} = -29{,}6197$, $y_1^{(5)} < y_2^{(5)}$,

$\Delta = b_5 - a_5 = 0{,}45$.

6. $[a_6, b_6] = [a_5; x_2^{(5)}] = [1{,}82; 2{,}1]$,

$x_1^{(6)} = 1{,}82 + 0{,}11 = 1{,}93$, $x_2^{(6)} = x_1^{(5)} = 1{,}99$,

$\Delta_6 x = 1{,}99 - 1{,}93 = 0{,}06$,

$y_1^{(6)} = -29{,}8304$, $y_2^{(6)} = y_1^{(5)} = -29{,}9964$, $y_1^{(6)} > y_2^{(6)}$,

$\Delta = b_6 - a_6 = 0{,}28$.

7. $[a_7, b_7] = [x_1^{(6)}; b_6] = [1{,}93; 2{,}1]$,

$x_1^{(7)} = x_2^{(6)} = 1{,}99$, $x_2^{(7)} = 2{,}1 - 0{,}06 = 2{,}04$,

$\Delta_7 x = 2{,}04 - 1{,}99 = 0{,}05$,

$y_1^{(7)} = y_2^{(6)} = -29{,}9964$, $y_2^{(7)} = -29{,}9411$, $y_1^{(7)} < y_2^{(7)}$,

$\Delta = b_7 - a_7 = 0{,}17$.

8. $[a_8, b_8] = [a_7; x_2^{(7)}] = [1{,}93; 2{,}04]$,

$x_1^{(8)} = 1{,}93 + 0{,}05 = 1{,}98$, $x_2^{(8)} = x_1^{(7)} = 1{,}99$,

$\Delta_8 x = 1{,}99 - 1{,}98 = 0{,}01$,

$y_1^{(8)} = -29{,}9857$, $y_2^{(8)} = y_1^{(7)} = -29{,}9964$, $y_1^{(8)} > y_2^{(8)}$,

$\Delta = b_8 - a_8 = 0{,}11$.

9. $[a_9, b_9] = [x_1^{(8)}; b_8] = [1{,}98; 2{,}04]$,

$$x_1^{(9)} = x_2^{(8)} = 1{,}99, \; x_2^{(8)} = 2{,}04 - 0{,}01 = 2{,}03,$$

$$\Delta_9 x = 2{,}03 - 1{,}99 = 0{,}04,$$

$$y_1^{(9)} = y_2^{(8)} = -29{,}9964, \; y_2^{(9)} = -29{,}967,$$

$$\Delta = b_9 - a_9 = 0{,}06 < 0{,}1.$$

Алгоритмнің 9-қадамында есептеуді тоқтатамыз. Себебі, талап етілген дәлдік алынды: $\Delta = b_9 - a_9 = 0{,}06 < 0{,}1$.

Есептеулер нәтижелерін кестеге жазайық:

Итерация саны	a_j	b_j	$x_1^{(j)}$	$x_2^{(j)}$	$f_1^{(j)}$	$\le$ $>$	$f_2^{(j)}$	$\Delta = b_j - a_j$
0	-2	3	-0,09	1,09	1,9059	>	-13,2026	5
1	-0,09	3	1,09	1,82	-13,2026	>	-28,9471	3,09
2	1,09	3	1,82	2,27	-28,9471	<	-26,966	1,91
3	1,09	2,27	1,54	1,82	-24,1948	>	-28,9471	1,18
4	1,54	2,27	1,82	1,99	-28,9471	>	-29,9964	0,73
5	1,88	2,27	1,99	2,1	-29,9964	<	-29,6197	0,45
6	1,82	2,1	1,93	1,99	-29,8304	>	-29,9964	0,28
7	1,93	2,1	1,99	2,04	-29,9964	<	-29,9411	0,17
8	1,93	2,04	1,98	1,99	-29,9857	>	-29,9964	0,11
9	1,98	2,04	1,99	2,03	-29,9964	<	-29,967	0,06

Төңіректік минимум нүктесі – $[a_9, b_9] = [1{,}98; 2{,}04]$ аралығында, $x^* \approx 1{,}99$, $f^* = -29{,}9964$.

Жауабы. $[a, b] = [1{,}98; 2{,}04]$, $x^* \approx 1{,}99$, $f^* = -29{,}9964$.

8.6. Градиенттік әдістер

$$f(x) \to \min_{x \in X}$$

сызықтық емес программалау есебі берілсін, мұндағы X – жарамды жиын.

$$x_0, x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots \qquad (8.7)$$

нүктелер тізбегін құру керек. Жалпы x_0 нүктесі ретінде шешімдер облысының кез келген нүктесі алынады және әрбір келесі нүкте алдыңғы нүктеден мына формуланың көмегімен анықталады:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k l_k,\ k = 0, 1, \dots, \quad (8.8)$$

мұндағы l_k – бағыт, ал λ_k – қадам ұзындығы. Бұл жерде l_k мен λ_k (8.7) тізбегін x^* тиімді шешімге жинақталуын қамтамасыз ету керек. Жалпы жағдайда x_k жуықтау тізбегін алу ақырсыз болып келеді. Кей жағдайда үрдіс ақырлы итерация санында аяқталып, төңіректік оптимумды, ал дөңес программалау есептерінде ауқымды оптимумды да беруі мүмкін.

Мақсат функцияның ∇Z градиентінің бағыты оның тез өсуінің бағыты болғандықтан, ойыс функцияның максимумын (дөңес функцияның минимумын) іздеген кезде l_k ретінде ∇Z ($-\nabla Z$) мәні алынады және (8.8) формула мына түрде жазылады:

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot \nabla Z(x_k),\ \lambda > 0 \text{ (егер } Z_{\max} \text{ ізделінсе)} \quad (8.9)$$

немесе

$$x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot \nabla Z(x_k),\ \lambda > 0 \text{ (егер } Z_{\min} \text{ ізделінсе)} \quad (8.9')$$

(8.9) (немесе (8.9’)) формуламен табылатын және (8.7) итерациялық тізбекті анықтайтын әдістер *градиенттік әдістер* деп аталады.

Жоғарыда айтып кеткеніміздей градиенттік әдістер бір-бірінен λ_k – қадам ұзындығын таңдау және егер x_k нүктесі шешімдер жиынының шекарасында және (8.9) формула x_{k+1} нүктесін осы облыстың шекарасынан шығаратын болған кезде x_{k+1} нүктесін табу алгоритмін таңдау тәсілдерімен ерекшеленеді (қадам ұзындығын таңдау – өте маңызды, себебі ізделінді оптимумды беретін нүктеден өтіп кетуіміз мүмкін).

8.7. Тездетіп түсу әдісі

Егер функцияның ∇Z өсімшесі x_k нүктесінен x_{k+1} нүктесіне өткен кезде ең үлкен ($Z_{\max}$) немесе ең кіші ($Z_{\min}$) болатындай λ_k таңдалынса, онда градиенттік әдіс *тездетіп түсу әдісі* деп аталады.

$Z = f(x)$ функциясының шартсыз, яғни шектеулер қойылмаған жағдайдағы экстремумын табуды қарастырайық. Шығару үрдісі итеративті болып табылады.

Тездетіп түсу әдісі бойынша $\Delta Z = Z(x_{k+1}) - Z(x_k)$ функциясы экстремумға жететіндей (8.9) формуладан λ_k таңдалынады.

Ескерту. x_{k+1} нүктесін тапқан кезде алдыңғы x_k нүктесі белгілі, яғни $Z(x_k)$ және $\nabla Z(x_k)$ – тұрақты шамалар болып табылады, ал ∇Z – λ_k бір айнымалыдан тәуелді функция.

(8.9) формуладағы x_{k+1} өрнегін және x_k нүктесіндегі градиенттің $\nabla Z(x_k) = \left(\frac{\partial Z}{\partial x_1}(x_k), \frac{\partial Z}{\partial x_2}(x_k), \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_n}(x_k) \right)$ өрнегін ескеріп ∇Z функциясын дифференциалдағанда экстремумның қажетті шарты $\left(\frac{d\Delta Z}{d\lambda} = 0 \right)$ төмендегі түрде болатынын аламыз:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1}(x_{k+1}) \cdot \frac{\partial Z}{\partial x_1}(x_k) + \frac{\partial Z}{\partial x_2}(x_{k+1}) \cdot \frac{\partial Z}{\partial x_2}(x_k) + \ldots +$$

$$+ \frac{\partial Z}{\partial x_n}(x_{k+1}) \cdot \frac{\partial Z}{\partial x_n}(x_k) = 0. \qquad (8.10)$$

Егер векторлардың скаляр көбейтіндісін пайдалансақ, осы формуланы ықшамды түрде жазуға болады:

$$\nabla Z(x_{k+1}) \cdot \nabla Z(x_k) = 0. \qquad (8.10')$$

Осы теңдеулерден λ_k мәнін есептейміз, x_{k+1} нүктесін анықтаймыз. Егер алынған жаңа x_{k+1} нүктесінде $\nabla Z(x_{k+1}) = 0$ болса есептеу тоқтатылады, себебі градиент бойымен әрі қарай жылжу мүмкін емес. Егер $\nabla Z(x_{k+1}) \neq 0$ болса, x_{k+1} нүктесін бастапқы нүкте ретінде алып, нөлдік градиент алынғанша есептеу үрдісі жалғастырылады.

Теңдеулер мен теңсіздіктер түріндегі берілген шектеулері бар сызықтық емес программалау есебінде, яғни шартты оңтайландыру есебінде λ_k көбейткішін таңдау барысында қосымша шарттар қойылады: жаңа x_{k+1} нүктесі жарамды шешімдер облысынан тыс болмауы керек.

$$\begin{cases} g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \le 0 \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \end{cases} \qquad (8.11)$$

шектеулерін қанағаттандыратын

$$Z = f(x) \to \min_{x \in X} \tag{8.12}$$

дөңес программалау есебі берілсін.

Тездетіп түсу әдісінің алгоритмі

1. Функцияның $\nabla Z(x_1)$ градиентін табу керек және $\nabla Z(x) = 0$ теңдеуін шығара отырып (8.11) жүйені қанағаттандыратын стационар нүктелерді анықтау керек. Осы нүктелердегі (8.12) мақсат функциясының мәндерін есептеу керек.

2. $g_i(x)$ функцияларының градиенттерін табу керек және сәйкес облыстың i-ші шекарасына тиісті стационар нүктелерді анықтау керек. Ол үшін

$$\begin{cases} \nabla Z(x) + \lambda_i \nabla g_i(x) = 0 \\ g_i(x) = 0 \end{cases} \tag{8.13}$$

теңдеулер жүйесін шығару керек.

(8.13) жүйе шешімдерінің арасынан (8.11) шарттарды және $\lambda_i \geq 0$ шартын қанағаттандыратын шешімдерді іріктеп алу керек. Осы нүктелердегі мақсат функцияның мәнін есептеу керек.

3. $\begin{cases} \nabla Z(x) + \lambda_p \nabla g_p(x) + \lambda_k \nabla g_k(x) = 0 \\ \nabla g_p(x) = 0 \\ \nabla g_k(x) = 0 \end{cases}$

түріндегі теңдеулер жүйесін шығарып, барлық шекаралық гипербеттердің қиылысуын анықтау керек, мұндағы $p = \overline{1, s}$, $k = \overline{1, s}$, $p \neq k$.

$\lambda_p \geq 0$ және $\lambda_k \geq 0$ мәндеріндегі жарамды шешімдерді іріктеп, осы шешімдердегі $Z(x)$ мәндерін есептеу керек.

Егер $g_i(x) < 0$ болса, онда жарамды шешімдер облысының бұрыштық нүктелерін табу жеткілікті және осы нүктелердегі мақсат функцияның мәнін есептеу керек.

4. Мақсат функциясының 1-3 қадамдарда алынған барлық нүктелердегі мәндерін салыстырып, $Z_{\min}$ және $Z_{\max}$ – таңдау керек.

8.5-мысал.

$$Z = -x_1^2 - 4x_2^2 + 6x_1 + 32x_2 \to \max$$

функциясының максимумын тездетіп түсу әдісімен анықтау керек, $x_0 = (7, 4)$ (*шартсыз оңтайландыру есебі*).

Шығарылуы. Бастапқы нүктедегі функцияның градиентін анықтаймыз. Ол үшін бірінші дербес туындыларды табамыз:

$$\frac{\partial Z}{\partial x_1} = -2x_1 + 6, \ \frac{\partial Z}{\partial x_2} = -8x_2 + 32.$$

$$\nabla Z(x) = \begin{pmatrix} -2x_1 + 6 \\ -8x_2 + 32 \end{pmatrix}, \ \nabla Z(x_0) = \begin{pmatrix} -2 \cdot 7 + 6 \\ -8 \cdot 4 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Жаңа x_1 нүктесін таңдаймыз:

$$x_1 = x_0 + \lambda_1 \nabla Z(x_0) = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - 8\lambda_1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Жаңа нүктедегі градиентті табамыз:

$$\nabla Z(x_1) = \begin{pmatrix} -2 \cdot (7 - 8\lambda_1) + 6 \\ -8 \cdot 4 + 32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16\lambda_1 - 8 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{d\nabla Z}{d\lambda_1} = \nabla Z(x_0) \cdot \nabla Z(x_1) = \begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\lambda_1 - 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

теңдеуін шешеміз.

$$\begin{pmatrix} -8 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 16\lambda_1 - 8 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow -8 \cdot (16\lambda_1 - 8) + 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow 16\lambda_1 - 8 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

$$x_1 = \begin{pmatrix} 7 - 8 \cdot \frac{1}{2} \\ 4 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Осы нүктедегі градиент мәнін есептейміз:

$$\nabla Z(x_1) = \begin{pmatrix} 16 \cdot \frac{1}{2} - 8 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Нөлдік градиент алынды, демек, $x_1 = (3, 4)$ стационар нүкте. Мақсат функция дөңес болғандықтан берілген нүктеде максимум мәні алынады. $Z_{max} = -3^2 - 4 \cdot 4^2 + 6 \cdot 3 + 32 \cdot 4 = 73$.

Жауабы. $Z_{max} = 73$, $x_1 = (3, 4)$.

Осы мысалда біз бір итерацияда дәл оптимумды алдық. Бұл заңдылық емес. Практикада тиімді шешімі бірнеше итерацияда немесе итерацияның ақырлы қадамында жуық шешімі ғана алынуы мүмкін есептер де кездеседі.

8.6-мысал.

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 30 \\ x_1 + x_2 \le 15 \\ 5x_1 + 2x_2 \le 60 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0$$

шектеулеріндегі

$$Z = 4x_1^2 + x_2^2 - 40x_1 - 22x_2 + 221 \to \min$$

функциясының минимумын тездетіп түсу әдісімен анықтау керек (*шартты оңтайландыру есебі*).

Шығарылуы. Шектеулер жүйесін келесі түрде жазамыз:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 30 \le 0 \\ x_1 + x_2 - 15 \le 0 \\ 5x_1 + 2x_2 - 60 \le 0 \\ -x_1 \le 0 \\ -x_2 \le 0 \end{cases}$$

Мақсат функциясының градиентін анықтаймыз:

$$\nabla Z(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 40 \\ 2x_2 - 22 \end{pmatrix}.$$

Стационар нүктені анықтаймыз:

$$\begin{cases} 8x_1 - 40 = 0 \\ 2x_2 - 22 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_1 = 5, \; x_2 = 11.$$

Алынған стационар нүкте шектеулер жүйесін (1-ші және 2-ші теңсіздіктерді) қанағаттандырмайтындықтан жарамды емес болып табылады. Демек, жарамды шешімдердің ішінде мақсат функциясының экстремумы жоқ, ауқымды экстремум тек қана шекараларында немесе шешімдер облысының төбелерінде болуы мүмкін.

1. $g_1 = x_1 + 3x_2 - 30$ шекаралық сызығын қарастырайық. Осы сызық үшін (8.3) түріндегі жүйені құрамыз:

$$\begin{cases} \nabla Z + \lambda_1 \nabla g_1(x) = 0 \\ g_1(x) = 0 \end{cases}, \text{ мұндағы } \nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_1}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 8x_1 - 40 \\ 2x_2 - 22 \end{pmatrix} + \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 30 \end{cases} \text{ немесе } \begin{cases} 8x_1 - 40 + \lambda_1 = 0 \\ 2x_2 - 22 + 3\lambda_1 = 0 \\ x_1 + 3x_2 = 30 \end{cases}$$

Осы жүйені шеше отырып $x_1 = \dfrac{177}{37}$, $x_2 = \dfrac{311}{37}$, $\lambda_1 = \dfrac{64}{37}$ мәндерін аламыз. $\left(\dfrac{177}{37}; \dfrac{311}{37}\right)$ шектеулер жүйесін қанағаттандырады және $\lambda_1 > 0$. Сондықтан, $\left(\dfrac{177}{37}; \dfrac{311}{37}\right)$ нүктесі – стационар нүкте.

2. Келесі $g_2 = x_1 + x_2 - 15$ шекаралық сызығын қарастырамыз.

$$\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_2}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}8x_1-40\\2x_2-22\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\\x_1+x_2=15\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x_1-40+\lambda_2=0\\2x_2-22+\lambda_2=0\,.\Rightarrow\\x_1+x_2=15\end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1=\frac{24}{5},\ x_2=\frac{51}{5},\ \lambda_2=\frac{8}{5}.$$

$\left(\frac{24}{5},\frac{51}{5}\right)$ нүктесі шектеулер жүйесін (бірінші теңсіздікті) қанағаттандырмайды. Сондықтан $g_2=x_1+x_2-15$ шекаралық сызығында стационар нүктелер жоқ.

3. $g_3=5x_1+2x_2-60$ шекаралық сызығын қарастырамыз.

$$\nabla g_3(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_3}{\partial x_1}\\\dfrac{\partial g_3}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}8x_1-40\\2x_2-22\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}=0\\5x_1+2x_2=60\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}8x_1-40+5\lambda_3=0\\2x_2-22+2\lambda_3=0\Rightarrow\\5x_1+2x_2=60\end{cases}$$

$$\Rightarrow\ x_1=\frac{270}{41},\ x_2=\frac{555}{41},\ \lambda_3=-\frac{104}{41}.$$

$\lambda_3<0$ болғандықтан $g_3=5x_1+2x_2-60$ шекаралық сызығында стационар нүктелер жоқ.

4. Келесі шекаралық сызық – $g_4=-x_1$.

$$\nabla g_4(x)=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial g_4}{\partial x_1}\\\dfrac{\partial g_4}{\partial x_2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 8x_1 - 40 \\ 2x_2 - 22 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - 40 - \lambda_4 = 0 \\ 2x_2 - 22 = 0 \\ -x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x_1 = 0,\ x_2 = 11,\ \lambda_4 = -40 .$$

$\lambda_4 < 0$ сондықтан $g_4 = -x_1$ шекаралық сызығында стационар нүктелер жоқ.

5. Келесі шекаралық сызық – $g_5 = -x_2$

$$\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g_5}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial g_5}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} 8x_1 - 40 \\ 2x_2 - 22 \end{pmatrix} + \lambda_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \\ -x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8x_1 - 40 = 0 \\ 2x_2 - 22 - \lambda_5 = 0 \Rightarrow \\ -x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_1 = 5,\ x_2 = 0,\ \lambda_5 = -22 .$$

$\lambda_5 < 0$ сондықтан $g_5 = -x_2$ шекаралық сызығында стационар нүктелер жоқ.

Шекаралық сызықтардың теңдеулер жүйесін шешу нәтижесінде жарамды шешімдер облысының бұрыштық нүктелерін табамыз:

$$\left(\frac{15}{2}; \frac{15}{2}\right);\ (10;\, 5);\ (0;\, 10);\ (12;\, 0);\ \left(\frac{177}{37}; \frac{311}{37}\right).$$

Осы нүктелердегі және табылған стационар нүктедегі Z функциясының мәндерін есептейміз:

$$Z\left(\frac{15}{2}; \frac{15}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{2}\right)^2 - 40 \cdot \left(\frac{15}{2}\right) - 22 \cdot \left(\frac{15}{2}\right) + 221 = 37{,}25;$$

$$Z(10;\, 5) = 4 \cdot 10^2 + 5^2 - 40 \cdot 10 - 22 \cdot 5 + 221 = 136;$$

$$Z(0;10)=4\cdot 0^2+10^2-40\cdot 0-22\cdot 10+221=101;$$

$$Z(12;0)=4\cdot 12^2+0^2-40\cdot 12-22\cdot 0+221=317;$$

$$Z\left(\frac{177}{37};\frac{311}{37}\right)=4\cdot\left(\frac{177}{37}\right)^2+\left(\frac{311}{37}\right)^2-40\cdot\frac{177}{37}-$$

$$-22\cdot\frac{311}{37}+221=6{,}92.$$

Алынған мәндердің арасынан ең кішісін таңдаймыз:

$$x=\left(\frac{177}{37};\frac{311}{37}\right),\ Z_{\min}\approx 6{,}92\ .$$

Жауабы. $x=\left(\frac{177}{37};\frac{311}{37}\right),\ Z_{\min}\approx 6{,}92$.

8.8. Қадамды бөліктеу әдісі

Қарастырылып отырған әдісте l_k ретінде нормаланған антиградиент $\frac{-f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|}$ пайдаланылады, яғни x_k келесі қатынастың көмегімен анықталады:

$$x_k=x_{k-1}-\lambda_k\frac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|}.$$

λ_k шамасы

$$f(x_k)<f(x_{k-1}) \qquad (8.14)$$

теңсіздігі орындалатындай таңдалынады. λ_k шамасын таңдау үрдісі былайша жүзеге асырылады. Қандай да бір $\alpha>0$ және $0<\beta<1$ (көбінесе $\beta=\frac{1}{2}$) тұрақтылары таңдалынады. k-шы (k = =1, 2, ...) итерацияда $\lambda_k=\alpha$ болған кезде (8.14) шартының орындалуы тексеріледі. Егер шарт орындалмаса, онда қадамды бөліктейміз, яғни $\lambda_k = \alpha\beta$ және қайтадан (8.14) шартының орындалуын тексереміз. Бөліктеу үрдісі, яғни ағымдық λ_k мәнін β -ға көбейту (8.14) шарт орындалғанша жалғасады.

Шартсыз минимизациялау есебін қадамды бөліктеу әдісімен шығару алгоритмі

1. α , β , ε , x_0 беріледі; $f(x_0)$ және $f'(x_0)$, $\|f'(x_0)\|$ мәндері есептеледі, $k = 1$ болсын деп ұйғарамыз.

2. $\lambda_k = \alpha$ деп ұсынамыз.

3. $\Delta x_k = -\lambda_k \dfrac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|}$, $x_k = x_{k-1} + \Delta x_k$, $f(x_k)$ есептейміз.

4. λ_k мәнін таңдау шартын: $f(x_k) < f(x_{k-1})$ тексереміз.

Егер осы шарт орындалса, онда алгоритмнің 5-қадамына көшеміз.

Егер шарт орындалмаса, онда $\lambda_k = \lambda_k\beta$ деп ұсынып, алгоритмнің 3-қадамына көшеміз.

5. $f'(x_k)$, $\|f'(x_k)\|$ мәндерін есептейміз.

6. Есептеуді тоқтату шартын тексереміз: $\|f'(x_k)\| \le \varepsilon$.

Егер осы шарт орындалса, онда $x^* \cong x_k$, $f^* \cong f(x_k)$ деп алып, есептеуді тоқтатамыз.

Егер шарт орындалмаса, онда $k = k + 1$ деп ұсынып, алгоритмнің 2-қадамына көшеміз.

Қарастырылған алгоритмнен өзге, бастапқы λ_k мәнінің орнына соңғы λ_{k-1} мәні пайдаланылатын алгоритм де қолданылады. Бұл жерде қарастырылған алгоритмдегі 1-қадамда λ_0 мәнін анықтау қосылады: $\lambda_0 = \alpha$; алгоритмнің 2-қадамында мәнін анықтау алмастырылады: $\lambda_k = \lambda_{k-1}$.

8.7-мысал.

$$f = x_1^2 + 4x_2^2 - 6x_1 - 32x_2 \to \min$$

функциясының минимумын қадамды бөліктеу әдісімен анықтау керек, $\alpha = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$, $\varepsilon = 0{,}1$, $x_0 = (7,\, 4)$ (*шартсыз оңтайланды-ру есебі*).

Шығарылуы.

$k = 1$.

Z функциясының бірінші дербес туындыларын табамыз:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - 6,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8x_2 - 32.\ x_1 = 7,\ x_2 = 4,$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot 7 - 6 = 8,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 \cdot 4 - 32 = 0,\ \|f'\| = \sqrt{8^2 + 0^2} = 8.$$

1-итерация.

$$\lambda_1 = \alpha = 1;\ \Delta x_1 = -\lambda_k \cdot \frac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|} = -1 \cdot \frac{8}{8} = -1;$$

$$\Delta x_2 = -\lambda_k \cdot \frac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|} = -1 \cdot \frac{0}{8} = 0;$$

$$x_1 = 7 + (-1) = 6;\ x_2 = 4 + 0 = 4;$$

$$f_1 = 6^2 + 4 \cdot 4^2 - 6 \cdot 6 - 32 \cdot 4 = -64;$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 2 \cdot 6 - 6 = 6,\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 8 \cdot 4 - 32 = 0;\ \|f'\| = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6.$$

2-*итерация.*

$$\lambda_1 = 1;\ \Delta x_1 = -\lambda_k \cdot \frac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|} = -1 \cdot \frac{6}{6} = -1;$$

$$\Delta x_2 = -\lambda_k \cdot \frac{f'(x_{k-1})}{\|f'(x_{k-1})\|} = -1 \cdot \frac{0}{6} = 0;$$

$$x_1 = 6 + (-1) = 5;\ x_2 = 4 + 0 = 4;$$

$$f_2 = 5^2 + 4 \cdot 4^2 - 6 \cdot 5 - 32 \cdot 4 = -69.$$

$f_2 < f_1$ (алгоритмнің 4-қадамы орындалады, сондықтан 5-қадамға көшеміз).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\cdot 5-6=4,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=8\cdot 4-32=0;\ \|f'\|=\sqrt{4^2+0^2}=4.$$

$\|f'\|=4\le\varepsilon=0{,}1$ – шарты орындалмайды.

$$k=k+1=2.$$

3-*итерация*.

$$\lambda_2=1;\ \Delta x_1=-1\cdot\frac{4}{4}=-1;\ \Delta x_2=-1\cdot\frac{0}{4}=0;$$

$$x_1=5+(-1)=4;\ x_2=4+0=4;$$

$$f_3=4^2+4\cdot 4^2-6\cdot 4-32\cdot 4=-72.$$

$f_3<f_2$ (алгоритмнің 4-қадамы орындалады, 5-қадамға көшеміз).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\cdot 4-6=2,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=8\cdot 4-32=0;\ \|f'\|=\sqrt{2^2+0^2}=2.$$

$\|f'\|=2\le\varepsilon=0{,}1$ – шарты орындалмайды.

$k=3$.

4-*итерация*.

$$\lambda_3=1;\ \Delta x_1=-1\cdot\frac{2}{2}=-1;\ \Delta x_2=-1\cdot\frac{0}{4}=0;$$

$$x_1=4+(-1)=3;\ x_2=4+0=4;$$

$$f_4=3^2+4\cdot 4^2-6\cdot 3-32\cdot 4=-73.$$

$f_4<f_3$ (алгоритмнің 4-қадамы орындалады, 5-қадамға көшеміз).

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=2\cdot 3-6=0,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}=8\cdot 4-32=0;\ \|f'\|=\sqrt{0^2+0^2}=0.$$

$\|f'\|=0\le\varepsilon=0{,}1$ – шарты орындалады. Демек, есептеу үрдісі тоқтатылады.

Жауабы. $x^*=(3;4)$, $f^*=-73$.

8.9. Түйіндес бағыттар әдісі

Түйіндес бағыттар әдісінің негізгі идеясы $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық келесі түрде $\{x^{(k)}\}$ тізбегін құру:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \alpha_k p^{(k)},\ k = 0, 1, \dots,\ x^{(0)} \in R^n, \qquad (8.15)$$

мұндағы $x^{(0)}$ – алдын ала таңдалынған бастапқы жуықтау, α_k – төмендегі қатынастардан алынады:

$$\Phi_k(\alpha_k) = \min_{\alpha>0} \Phi_k(\alpha), \text{ мұндағы } \Phi_k(\alpha) = f\left(x^{(k)} - \alpha p^k\right), \quad (8.16)$$

ал түсу бағыты $p^{(k)}$ келесі формуламен анықталады:

$$p^{(k)} = f'\left(x^{(k)}\right) + \beta_k p^{(k-1)},\ k = 1, 2, \dots,\ p^{(0)} = f'\left(x^{(0)}\right),$$

мұндағы

$$\beta_k = \frac{\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\|^2}{\left\|f'\left(x^{(k-1)}\right)\right\|^2} = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial f\left(x^{(k-1)}\right)}{\partial x_i}\right)^2}. \qquad (8.17)$$

Сонымен, түйіндес бағыттар әдісі тездетіп түсу әдісінен тек қана әрбір қадамдағы функцияның кему бағытымен ($-f'\left(x^{(k)}\right)$ шамасының орнына $-p^{(k)}$) ерекшеленеді.

(8.17) формуладағы $p^{(k)}$ тек қана $-f'\left(x^{(k)}\right)$ – антиградиентпен ғана емес, сонымен қатар алдыңғы қадамдағы $-p^{(k-1)}$ түсу бағытымен де анықталады. Бұл осыған дейін қарастырған градиенттік әдістерге қарағанда $f(x)$ функциясының минимум нүктесіне жуық (8.15) тізбекті құруда берілген функцияның ерекшеліктерін толығырақ ескереді.

Түйіндес бағыттар әдісінде есептеулердің белгілі дәлдікке жету критерийі ретінде негізінен

$$\left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\| \le \varepsilon \text{ немесе } \left\|f'\left(x^{(k)}\right)\right\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial f\left(x^{(k)}\right)}{\partial x_i}\right]^2} \le \varepsilon$$

теңсіздігі қарастырылады. Есептеулерде пайда болған қателіктердің әсер етуін азайту мақсатында көбінесе әрбір N итерациядан кейін $\beta_{mN} = 0$, $m = 0, 1, \ldots$ – деп алады, яғни әдісті жаңартады (N – алгоритм параметрі).

R_n кеңістігінде дөңес квадраттық функцияны минимизациялау үшін түйіндес бағыттар әдісінің n-нен артық емес итерациясы талап етіледі.

8.8-мысал.

$f(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_2^2 + x_1 - x_2$ функциясының x^* минимум нүктесін түйіндес бағыттар әдісімен табу керек.

Шығарылуы. $f(x)$ – R^2-де берілген квадраттық функция, сондықтан, x^* нүктесі түйіндес бағыттар әдісінің екі қадамынан кейін анықталуы мүмкін.

I-қадам. $x^{(0)} = (0; 0)$ – бастапқы жуықтауын таңдап, (8.15)-(8.16) формулалар бойынша есептеулер жүргіземіз. Алдымен функцияның бірінші ретті дербес туындыларын табамыз:

$$f'_{x_1}(x) = 2x_1 - 2x_2 + 1;$$

$$f'_{x_2}(x) = -2x_1 + 12x_2 - 1.$$

$$p^{(0)} = f'(x^{(0)}) = (1; -1);$$

$$\Phi_0(\alpha) = f(0 - \alpha \cdot 1; 0 - \alpha \cdot (-1)) = f(-\alpha; \alpha) = (-\alpha)^2 - 2 \cdot (-\alpha) \cdot \alpha +$$

$$+ 6 \cdot \alpha^2 + (-\alpha) - \alpha = 9\alpha^2 - 2\alpha;$$

$$\Phi_0(\alpha) = 9\alpha^2 - 2\alpha.$$

$\Phi'_0(\alpha) = 18\alpha - 2$; $\Phi'_0(\alpha) = 0$ шартынан $\Phi_0(\alpha)$ минимумын аламыз: $\alpha_0 = \dfrac{1}{9}$. Осыдан, $x^{(1)} = (0; 0) - \dfrac{1}{9} \cdot (1; -1) = \left(-\dfrac{1}{9}; \dfrac{1}{9}\right)$.

II-қадам.

$$f'_{x_1}(x^{(1)}) = 2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right) - 2 \cdot \frac{1}{9} + 1 = \frac{5}{9};$$

$$f'_{x_2}\left(x^{(1)}\right)=-2\cdot\left(-\frac{1}{9}\right)+12\cdot\frac{1}{9}-1=\frac{5}{9}.$$

$$f'\left(x^{(1)}\right)=\left(\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right).$$

(8.17) формуланың көмегімен β_1 мәнін есептейміз:

$$\beta_1=\frac{\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(1)}\right)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(1)}\right)}{\partial x_2}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_1}\right)^2+\left(\dfrac{\partial f\left(x^{(0)}\right)}{\partial x_2}\right)^2}=\frac{\dfrac{25}{81}+\dfrac{25}{81}}{1+1}=\frac{25}{81};$$

$$p^{(1)}=\left(\frac{5}{9};\frac{5}{9}\right)+\frac{25}{81}(1;-1)=\left(\frac{70}{81};\frac{20}{81}\right).$$

$$\Phi_1(\alpha)=f\left(\left(-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)-\alpha\left(\frac{70}{81};\frac{20}{81}\right)\right)=f\left(-\frac{1}{9}-\alpha\frac{70}{81};\frac{1}{9}-\alpha\frac{20}{81}\right)=$$

$$=\left(-\frac{1}{9}-\alpha\frac{70}{81}\right)^2-2\left(-\frac{1}{9}-\alpha\frac{70}{81}\right)\cdot\left(\frac{1}{9}-\alpha\frac{20}{81}\right)+6\left(\frac{1}{9}-\alpha\frac{20}{81}\right)^2-\frac{1}{9}-$$

$$-\alpha\frac{70}{81}+\frac{1}{9}-\alpha\frac{20}{81}=\frac{500}{729}\alpha^2+\frac{1}{9};$$

$$\Phi_1(\alpha)=\frac{500}{729}\alpha^2+\frac{1}{9}.$$

$$\Phi_1'(\alpha)=\frac{1000}{729}\alpha,\ \Phi_1'(\alpha)=0,\ \alpha_1=0.$$

$$x^{(2)}=\left(-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)-0\cdot\left(\frac{70}{81};\frac{20}{81}\right)=\left(-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right).$$

Жауабы: $x^*\approx\left(-\frac{1}{9};\frac{1}{9}\right)$.

8.10. Градиентті проекциялау әдісі

E^n кеңістігінде анықталған және екі рет дифференциалданатын f функциясының дөңес $D \subset E^n$ жиынында шартты минимумды табу талап етілсін. Еркін алынған $x_0 \in D$ нүктесінен бастап $x_1, x_2, ..., x_n \in D$ жуықтаулары табылды деп есептейік. Келесі формула градиентті проекциялау әдісімен кезектегі жуықтауды есептеудің ережесін береді:

$$x_{k+1} = P(x_k - t_k f'(x_k)),$$

мұндағы P – D жиынындағы нүктелердің проекциялары, t_k – қадамдық көбейткіш.

Теорема 8.5. $D \subset E^n$ – дөңес тұйық жиын, f функциясы – E^n кеңістігінде анықталған, үзіліссіз дифференциалданатын және дөңес функция болсын. $x^* \in D$ нүктесі D жиынындағы f функциясының шартты минимум нүктесі болуы үшін, $x_{k+1} = P(x^* - tf'(x^*)) = x^*$, $\forall t \geq 0$ орындалуы қажет.

Градиентті проекциялау әдісінде пайдаланылатын t_k қадамдық көбейткішті реттеудің кейбір тәсілдерін қарастырамыз. Олардың ішіндегі ең қарапайымы – шартсыз минимизациялаудағы толық қадамды градиент әдісіндегідей t_k мәнін табу:

$$f(x_k - t_k f'(x_k)) = \min_{t \geq 0} f(P(x_k - tf'(x_k))).$$

Бұл формуланың қарапайымдылығы – t_k қадамын таңдаған кезде айнымалылардың өзгеру облысына қойылатын шектеулер жалпы ескерілмейді. Шектеулер тек қана проекциялау есебінен орындалады. Мысалы, ең қарапайым шартты минимум есебінде $\min\limits_{t \geq 0} f(x_k - tf'(x_k))$ есебінің шешімі болмауы мүмкін.

Қадамды анықтаудың басқа әдісінің идеясы мынада:

$$f(x_{k+1}) = \min_{t \geq 0} f(P(x_k - tf'(x_k))).$$

Бұл тәсілдің де кемшіліктері бар: бұл есепті шығару барысында да үлкен есептеулер талап етіледі.

$$f(x_k) - f(P(x_k - tf'(x_k))) \geq \gamma \|x_k - P(x_k - tf'(x_k))\|^2$$

теңсіздігінің оң шешімін табудың көмегімен қадамдық көбейткішті анықтау қандай да бір мағынада осы екі әдістің арасындағы «алтын ортасы» болып табылады, мұндағы γ – (0, 1] аралығындағы нақты тұрақты. Егер қандай да бір t_k оң мәні осы теңсіздікті қанағаттандырса, онда оны осы теңсіздікке қоя отырып келесі қатынасты аламыз:

$$f(x_k) - f(x_{k+1}) \geq \gamma \|x_k - x_{k+1}\|^2 . \qquad (8.18)$$

(8.18) теңсіздіктен қадамдық көбейткішті табу осы әдістегі жиі қолданылатын қадамды реттеу тәсілі болып табылады. Градиентті проекциялау әдісінің осындай нұсқасын пайдалану мүмкіндігін негіздейміз және (8.18) теңсіздікті шешу әдісін келтіреміз.

Кейбір көмекші қатынастарды келтірейік. $\langle P(x) - x, y - P(x) \rangle \geq 0$, $\forall y \in D$ теңсізідігінде кез келген k үшін

$$x = x_k - t_k f'(x_k), \; P(x) = x_{k+1},$$

$$\langle x_{k+1} - x_k + t_k f'(x_k), y - x_{k+1} \rangle \geq 0,$$

осыдан

$$\langle x_{k+1} - x_k, y - x_{k+1} \rangle + t_k \langle f'(x_k), y - x_{k+1} \rangle \geq 0 .$$

Сонда $\forall y \in D$ үшін

$$\langle f'(x_k), y - x_{k+1} \rangle \geq \frac{1}{t_k} \langle x_{k+1} - x_k, y - x_{k+1} \rangle, \; k = 0, 1, ... \qquad (8.19)$$

Теорема 8.6 (*қадамдық көбейткішті таңдау туралы*). $D \subset E^n$ – дөңес тұйық жиын, f функциясы E^n кеңістігінде анықталған, үзіліссіз дифференциалданатын және дөңес функция, және оның f' градиенті кеңістігінде L тұрақтысымен Липшиц шартын қанағаттандыратын болсын. Сонда кез келген $t_k \in \left(0, \dfrac{2}{L + 2\gamma}\right]$ мәні (8.18) теңсіздікті қанағаттандырады.

Теорема 8.7. 8.6-теореманың барлық шарттары орындалатын болсын. Сонымен қатар, егер f функциясы E^n кеңістігінде төменнен шектелген болса, онда $\lim\limits_{k \to \infty} \|x_k - x_{k+1}\| = 0$ болады.

Теорема 8.8 (*градиентті проекциялау әдісінің жинақтылығы туралы*). 8.6 және 8.7-теоремалардың барлық шарттары орындалсын. δ тұрақтысы $0<\delta<\dfrac{2}{L+2\gamma}$ қос теңсіздігін қанағаттандырсын, f функциясы D жиынында дөңес, $E(x_0)$ жиыны шектелген болсын, $\{x_k\}$, $k=0,1,2,\ldots$ тізбегі градиентті проекциялау әдісімен құрылсын. Мұндағы $t_k\in\left(\delta,\dfrac{2}{L+2\gamma}\right]$. Сонда f функциясының D жиынында минимумы бар болады, $\{x_k\}$, $k=0,1,2,\ldots$ тізбегінің шекті нүктелері бар, минимизацияланатын болып табылады және оның кез келген шекті нүктесі D жиынындағы f функциясының шартты минимум нүктесі болып табылады.

Теорема 8.9. 8.8-теореманың барлық шарттары орындалсын, және f функциясының D жиынында шартты минимумның жалғыз x^* нүктесі бар болсын. Сонда, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=x^*$.

(8.19) теңсіздікті қанағаттандыратын t_k қадамдық көбейткіш мәнін табу тәсілдерімен танысайық. Мақсат функцияның градиентінің Липшиц константасының мәнін білу қажет болғандықтан 8.6-теореманы біз практикада тікелей пайдалана алмаймыз. (8.19) теңсіздікті қанағаттандыратын t_k қадамдық көбейткішті табу тәсілі осы теңсіздіктің шешімдер облысының оң жағына мүмкіндігінше жақын t_k мәнін табуға мүмкіндік береді. Еркін алынған бастапқы $t_{k,0}>0$ мәнін алайық. Егер ол үшін (8.19) теңсіздік орындалмаса, 8.6-теоремадан байқауға болатындай, $t_{k,0}$ мәні өте үлкен таңдалынған. $t_{k,1}=\dfrac{t_{k,0}}{2}$ деп алып, жаңа алынған мән үшін (8.19) теңсіздіктің орындалатынын тексереміз. Егер орындалмаса бөліктеуді әрі қарай жалғастырамыз. 8.6-теорема бойынша мұндай бөліктеу ақырлы болады. $t_{k,i}=2^i t_{k,0}$ шамасы (8.19) теңсіздікті қанағаттандыратын, ал $t_{k,i+1}=2^{i+1}t_{k,0}$ – қанағаттандырмайтындай i-мәні болсын. Сонда $t_k=t_{k,i}$ деп ұсынамыз. Бөліктеу саны үшін, не арттыру саны үшін бастапқы $t_{k,0}$ мәнін t_{k-1} мәніне тең деп аламыз. $t_{0,0}$ мәні еркін таңдалынады.

Сонымен, осы әдістің әрбір итерациясында, егер $x_{k+1}\notin X$

болған жағдайда ғана $x_{k+1} = x_k - t_k f(x_k)$ нүктелері X жарамды жиынға қайтарылады. Мұндай қайтару Px_{k+1} шамасын X-ке проекциялау арқылы жүзеге асырылады: $x_{k+1} = P_x(x_k - t_k \nabla f(x_k))$. Бұл жерде қадам ұзындығын әр түрлі тәсілдермен таңдауға болады. Мысалы, егер $\nabla f(x_k)$ – липшецтік, яғни $\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| \le L\|x' - x''\|$ болса, онда $t_k = t \in \left(0; \dfrac{2}{L}\right)$ деп ұсынылады.

$P_x(y)$, $y \in R^n$ проекциясын есептеу $|y - x| \to \min\limits_{x \in X}$ есебін минимизациялау болып табылады, және X-тің күрделі түрлерінде қиындық туғызуы мүмкін. Дегенмен, егер X – тұйық шар $x_1^2 + ... + x_n^2 \le r^2$ болса, онда келесі проекциялау қатынасы ақиқат болады:

$$P_x(y) = \begin{cases} y, \textit{егер } y_1^2 + ... + y_n^2 \le r^2, \\ \dfrac{ry}{\sqrt{y_1^2 + ... + y_n^2}}, \textit{егер } y_1^2 + ... + y_n^2 > r^2. \end{cases} \tag{8.20}$$

8.9-мысал.

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1$$

шектеулеріндегі

$$f(x) = -x_1 + x_2^2 \to \min$$

сызықтық емес программалау есебін градиенттік проекциялау әдісімен шығару керек.

$$\|x_{k+1} - x_k\| \le 0{,}01 \text{ немесе } \|\nabla f(x_k)\| \le 0{,}01$$

шарттарының біреуі орындалған кезде есептеулерді тоқтату керек.

Шығарылуы. Бастапқы нүкте ретінде $x_0 = (0; 0{,}5) \in X$ – нүктесін алайық. Мұндағы $X = \{x \in R^2 \,|\, x_1^2 + x_2^2 \le 1\}$.

$$\|\nabla f(x') - \nabla f(x'')\| = \sqrt{(-1 - (-1))^2 + \left(2x_2' - 2x_2''\right)} =$$

$$= 2\left|x_2' - x_2''\right| \le 2\|x' - x''\|.$$

Яғни L=2 – Липшиц тұрақтысы.

Сондықтан, $t_k = t = 0,75$ деп алайық, $k = 0, 1, ...$

I-қадам.

$$\nabla f(x) = (-1;\ 2x_2).$$

$$x_1 = P_x(x_0 - t\nabla f(x_0)) = P_x|(0;\ 0,5) - 0,75\nabla f((0;\ 0,5))| = P_x|(0;\ 0,5) -$$

$$-0,75(-1;1)| = P_x|(0,75;\ -02,5)|.$$

$$x_1^2 + x_2^2 \le 1 \ \Rightarrow \ (0,75)^2 + (-0,25)^2 = 0,625 \le 1,$$

яғни $(0,75;\ -02,5) \in X$ болғандықтан, (8.20) қатынастың 1-формуласы бойынша $x_1 = (0,75;\ -0,25)$.

$$\|x_1 - x_0\| = \|(0,75;\ -0,25) - (0;\ 0,5)\| = \|(0,75;\ -0,75)\| =$$

$$= \sqrt{(0,75)^2 + (-0,75)^2} = 1,0607\ .$$

$\|x_1 - x_0\| = 1,06 > 0,01$ болғандықтан талап етілетін дәлдік орындалмайды, сондықтан есепті әрі қарай жалғастырамыз.

II-қадам.

$$x_2 = P_x(x_1 - t\nabla f(x_1)) = P_x|(0,75;\ -0,25) - 0,75 \cdot (-1;\ -0,5)| =$$

$$= P_x|(0,75 - 0,75 \cdot (-1);\ -0,25 - 0,75 \cdot (-0,5))| = P_x|(1,5;\ 0,125)|.$$

$x_1^2 + x_2^2 \le 1 \ \Rightarrow \ (1,5)^2 + (0,125)^2 = 2,266 > 1$ болғандықтан (1,5; 0,125) нүктесі X жиынында жатпайды, және X радиусы 1-ге тең түйық шар екенін ескерсек, онда (8.20) қатынастың 2-формуласынан:

$$x_2 = P_x|(1,5;\ 0,125)| = (1,5;\ 0,125) / \sqrt{(1,5)^2 + (0,125)^2} =$$

$$= (1,5;\ 0,125)/1,505199 = (0,9965;\ 0,08304)$$

$$x_2 = (0,9965\ ;\ 0,08304\ ).$$

$$\|x_2 - x_1\| = \|(0,9965;\ 0,08304) - (0,75;\ -0,25)\| = \|(0,9965 -$$

$$-0{,}75;\,0{,}08304+0{,}25)\| = \sqrt{(0{,}2465)^2+(0{,}33304)^2} = 0{,}414\,.$$

$\|x_2 - x_1\| = 0{,}414 > 0{,}01$ болғандықтан талап етілетін дәлдік орындалмайды, сондықтан есепті әрі қарай жалғастырамыз.

III-қадам.

$$x_3 = P_x(x_2 - t\nabla f(x_2)) = P_x|(0{,}9965;\,0{,}08304) - 0{,}75\cdot(-1;\,0{,}16608)| =$$
$$= (1{,}7465;\,-0{,}04152).$$

$(1{,}7465\,;\,-0{,}04152\,)$ нүктесі X жиынында жатпайды.

$$x_3 = P_x|(1{,}7465;\,-0{,}04152)| = (1{,}7465;\,-0{,}04152)/$$
$$/\sqrt{(1{,}7465)^2+(-0{,}04152)^2} =$$
$$= (1{,}7465;\,-0{,}04152)/1{,}746993 = (0{,}999718;\,-0{,}023767),$$
$$x_3 = (0{,}999718;\,-0{,}023767).$$

$$\|x_3 - x_2\| = \|(0{,}999718;-0{,}023767) - (0{,}9965;0{,}08304)\| =$$
$$= \|(0{,}003218;-0{,}106807)\| = 0{,}106855.$$

$\|x_3 - x_2\| = 0{,}106855 > 0{,}01$ – берілген дәлдік орындалмайды, есепті шығару жалғастырылады.

IV-қадам.

$$x_4 = P_x|(0{,}999718;-0{,}023767) - 0{,}75\cdot(-1;-0{,}047534)| =$$
$$= (1{,}749718;0{,}011884)$$

$(1{,}749718\,;\,0{,}011884\,)$ – нүктесі X жиынында жатпайды.

$$x_4 = P_x|(1{,}749718;\,0{,}011884)| = (1{,}749718;\,0{,}011884)/$$
$$/\sqrt{(1{,}749718)^2+(0{,}011884)^2} =$$
$$= (1{,}749718\,;\,0{,}011884\,)/1{,}749758 = (0{,}999977\,;\,0{,}006791\,).$$

$$x_4 = (0{,}999977\,;\,0{,}006791\,).$$

$$\|x_4 - x_3\| = \|(0,999977; 0,006791) - (0,999718; -0,023767)\| =$$
$$= \|(0,000259; 0,0030558)\| = 0,030559.$$

$\|x_4 - x_3\| = 0,030559 > 0,01$ дәлдік орындалған жоқ.

V-қадам.

$$x_5 = P_x|(0,999977; 0,006791) - 0,75 \cdot (-1; 0,013582)| =$$
$$= (1,749977; -0,0034).$$

$(1,749977 ; -0,0034)$ нүктесі X жиынында жатпайды.

$$x_5 = P_x|(1,749977; -0,0034)| = (1,749977; -0,0034)/$$
$$/\sqrt{(1,749977)^2 + (-0,0034)^2} =$$
$$= (1,749977 ; -0,0034)/1,74998 = (0,999998 ; -0,00194).$$
$$x_5 = (0,999998; -0,00194).$$

$$\|x_5 - x_4\| = \|(0,999994; -0,00194) - (0,999977; 0,006791)\| =$$
$$= \|(0,0000212; -0,00873)\| = 0,008732$$
$$\|x_5 - x_4\| = 0,008732 < 0,01.$$

Есеп шартында қойылған дәлдікке жеттік, есептеу тоқтатылады. $x_5 = (0,999998; -0,00194)$. $f(x_5) = -0,99999$.

Жауабы. Есептің шешімі 5-қадамда 0,01 дәлдікпен анықталды: $x = (0,999998 ; -0,00194)$. $f(x) = -0,99999$.

Салыстыру үшін: берілген есептің дәл шешімі – $x^* = (1, 0)$, $f(x^*) = -1$.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Итеративті әдістердің көмегімен не анықталады? Төңіректелген нүкте, төңіректелген кесінді ұғымдары.

2. Итеративті әдістердің тиімділігі қандай факторлармен бағаланады?

3. Минимумды анықтаудың пассивті әдістері мен белсенді әдістерінің айырмашылығы.

4. Дихотомия әдісінің алгоритмі.

5. Фибоначчи әдісінің алгоритмі.

6. Алтын қиманың анықтамасы, қасиеттері. Алтын қима әдісінің алгоритмі.

7. Градиенттік әдістер. Тездетіп түсу әдісінің алгоритмі.

8. Қадамды бөліктеу әдісінің алгоритмі.

9. Түйіндес бағыттар әдісінің алгоритмі.

10. Градиентті проекциялау әдісінің алгоритмі.

11-15 есептерде бастапқы жуықтау ретінде $x^{(0)}$ нүктесін таңдап алып, берілген $f(x)$ функциясын

а) градиенттік түсу әдісімен минимизациялау керек. $\varepsilon = 0{,}05$;

ә) ең тез түсу әдісімен минимизациялау керек. Есептеуді $\varepsilon = 0{,}05$ мәні үшін (8.6) теңсіздік ақиқат болғанға дейін жалғастыру керек.

б) түйіндес бағыттар әдісімен минимизациялау керек. Есептеуді $\varepsilon = 0{,}05$ мәні үшін (8.6) теңсіздік ақиқат болғанға дейін жалғастыру керек.

11. $f(x) = 7x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_1x_2 + x_1 - 10x_2$.

12. $f(x) = x_1^4 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3$.

13. $f(x) = 4x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 + x_1x_3 + x_1 - x_2 + x_3$.

14. $f(x) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 2)^2 + (x_1 - x_2 - 4)^2$.

15. $f(x) = x_1^3 + 8x_2^3 - 6x_1x_2 + 1$.

16-20 есептерде берілген $f(x)$ функциясының унимодальдылық аралығында (5-тараудағы 11-15 есептердің нәтижесінде алынған аралықты пайдаланыңыз)

а) дихотомия әдісімен, $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдігімен x^* төңіректік минимум нүктесін табу керек. k=0,1 деп ұсынып, ε дәлдікке жету үшін алдын ала ең аз қадам санын анықтап, есептеулерді жүргізу керек;

ә) Фибоначчи әдісімен $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдігімен N=9 мәнінде x^* төңіректік минимум нүктесін табу керек;

б) алтын қима әдісімен, $\varepsilon = 0{,}1$ дәлдігімен x^* төңіректік минимум нүктесін табу керек. k=0,1 деп ұсынып, ε дәлдікке жету үшін алдын ала ең аз қадам санын анықтап, есептеулерді жүргізу керек.

16. $f(x) = x^3 + 6x^2 + 9x$.

17. $f(x) = 3x^4 - 8x^3 + 6x^2$.

18. $f(x) = (1-x)^2(1+x)(1+x+x^2)$.

19. $f(x) = 2x - 3x^{\frac{2}{3}}$.

20. $f(x) = x^4 - 10x^3 + 36x^2 + 5x$.

9 - тарау. ДИНАМИКАЛЫҚ ПРОГРАММАЛАУ МОДЕЛЬДЕРІ

9.1. Динамикалық программалау есебінің жалпы қойылуы

Динамикалық программалау – шешімді қабылдау үрдісі бірнеше кезеңдерге бөлінуі мүмкін амалдарға бейімделген оңтайландыру әдістері. Мұндай амалдар *көпқадамды* деп аталады.

Динамикалық программалау есепті бірнеше кезеңге декомпозициялау (бөлу) арқылы тиімді шешімін табуға мүмкіндік береді. Бұл декомпозициялау әр түрлі принциптер бойынша жүзеге асырылады. Кейбір есептерде уақыт аралығы бойынша, ал басқаларында – басқару нысаны бойынша жүзеге асырылады. Оңтайлылық – есепті кезеңдерге бөлудің негізін құрайтын динамикалық программалаудың іргелі принципі болып табылады.

Осындай тәсіл өлшемділігі бойынша үлкен бір есепті кіші мөлшерлі көптеген есептерге әкеледі. Бұл есептеу көлемін едәуір қысқартады және басқару шешімдерін қабылдау үрдісін тездетеді. Динамикалық программалаудағы есептеу бір ішкі есептің тиімді шешімі келесі есеп үшін бастапқы мәліметтер ретінде пайдаланылатындығымен рекуррентті болып келеді.

Егер сызықтық программалау модельдерін экономикада күрделі жағдайлардағы үлкен масштабтағы жоспарлардың шешімдерін қабылдау үшін пайдаланатын болса, онда динамикалық программалау модельдерін кіші масштабтағы есептерді шығару үшін, мысалы, қорларды толықтыру мезгілін және толықтыратын қорлардың өлшемін анықтайтын қорларды басқару ережесін дайындау кезінде; өндірістің күнтізбелік жоспарлау принципін дайындау және өнімге сұраныстың тұрақты болмаған жағдайында оны бос болмайтындай бірқалыпты ету кезінде; мүмкін болатын жаңа бағыттар арасында жетіспейтін қаржыны бөліп, оларды пайдалану кезінде; күрделі құралдарды ағымдық және түпкілікті жөндеуге және қажет болған жағдайда оларды ауыстыру үшін күнтізбелік жоспар жасау кезінде, әуе шабуылына қарсы қорғаныстың бірнеше жолағын ұшақтар тобымен басып алу кезінде, аппаратураны тексеру барысында қолданылатын тесттердің тізбегі және т.б. пайдаланылады. Кейбір амалдар (жоғарыда келтірілген) қадамдарға бөлінеді; осындай бөлулердің кейбіреуі жасанды түрде жүзеге асырылады. Айталық, ракетаның мақсатына жетуі үшін үрдісті шартты түрде кезеңдерге бөлуге болады, олардың әрқайсысы қандай да бір Δt уақытын алады.

Нақты жұмыс атқаратын үлкен экономикалық жүйелерде күнделікті микроэкономикалық шешімдерді қабылдау талап етіледі. Динамикалық программалау модельдері адамдардың аз араласуымен стандарттық тәсілдің негізінде осындай шешімдерді қабылдау мүмкіндігімен құнды. Егер осындай шешімдерді жеке қарастырған кезде маңыздылығы аз болса, онда оларды жалпы алғанда пайда түсіруге өте көп әсер етуі мүмкін.

Енді динамикалық программалау есебінің жалпы қойылуын қарастырайық.

Басқарылатын (мысалы, қаражаттарды өндірістерге бөлу, ресурстарды бірнеше жыл пайдалану, құрал-жабдықтарды ауыстыру, қорларды толықтыру және т.т. кезіндегі экономикалық үрдіс) үрдісті қарастырайық. Басқару нәтижесінде U жүйе (басқару нысаны) u_0 бастапқы жағдайдан $\hat{u}$ жағдайға көшеді. Айталық, басқаруды n қадамға бөлуге болсын, яғни шешім біртіндеп әрбір қадамда қабылданады, ал U жүйесін бастапқы жағдайдан соңғы жағдайға көшіретін басқару n қадамдық басқару жиынтығын береді.

W_k арқылы k-шы ($k=\overline{1,n}$) қадамдағы басқаруды белгілейміз. W_k айнымалылары кейбір шектеулерді қанағаттандырады және осы мағынада *жарамды* (W_k – сан, n-өлшемді кеңістіктегі нүкте, сапалы белгі болуы мүмкін) деп аталады.

$W(W_1, W_2, \ldots, W_n)$ – U жүйесін u_0 жағдайдан $\hat{u}$ жағдайына көшіретін басқару болсын. u_k арқылы k-шы басқарудан кейінгі жүйенің жағдайын белгілейік. $u_0, u_1, \ldots, u_{k-1}, u_k, \ldots, u_{n-1}, u_n = \hat{u}$ жағдайлар тізбегін аламыз:

$$u_0 \xrightarrow{W_1} u_1 \xrightarrow{W_2} \ldots \xrightarrow{W_{k-1}} u_{k-1} \xrightarrow{W_k} u_k \xrightarrow{W_{k+1}} \ldots \xrightarrow{W_{n-1}} u_{n-1} \xrightarrow{W_n} \hat{u}_n$$

Қарастырылайын деп отырған басқарылатын амалдың тиімділік көрсеткіші – мақсат функция – бастапқы жағдайдан және басқарудан тәуелді болады:

$$Z = F(u_0, W). \tag{9.1}$$

Бірнеше тұжырымдаманы келтірейік.

1. Жүйенің u_k жағдайы k-шы қадамның соңында тек қана алдыңғы u_{k-1} жағдайынан тәуелді болады және k-шы қадамдағы басқарудан (алдыңғы жағдайлар мен басқарулардан тәуелсіз) тәуелді болады. Бұл қойылып отырған талап «кейінгі әсердің болмауы» деп аталады. Алынған тұжырымдаманы *жағдайлар теңдеуі* деп аталатын теңдеу түрінде жазуға болады:

$$u_k = \varphi_k(u_{k-1}, W_k),\ k = \overline{1, n}. \tag{9.2}$$

2. (9.1) мақсат функциясы әрбір қадамда тиімділік көрсеткішінен аддитивті болып табылады.

Бірнеше айнымалылардан тұратын функцияның мәнін тек қана бір x_j айнымалысынан тұратын қандай да бір f_j функцияларының қосындысы ретінде қарастыруға болатын функция *аддитивті функция* деп аталады. k-шы қадамдағы тиімділік көрсеткішін

$$Z_k = f_k(u_{k-1}, W_k), \tag{9.3}$$

арқылы белгілейміз. Сонда

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(u_{k-1}, W_k). \tag{9.4}$$

Динамикалық программалау есебі былай қойылады:

1. оңтайландыру есебі басқаруды n қадамды үрдіс ретінде түсіндіріледі;

2. мақсат функциясы әрбір қадамдағы мақсат функциялардың қосындысына тең болады;

3. k-шы қадамдағы басқаруды таңдау осы қадамның жағдайынан тәуелді, алдындағы қадамдарға әсер етпейді (кері байланыс жоқ);

4. басқарудың k-шы қадамынан кейінгі u_k жағдайы тек қана

алдындағы u_{k-1} жағдайынан және k-шы қадамдағы W_k басқарудан (кейінгі әсердің болмауы) тәуелді болады;

5. W_k басқару әрбір қадамда тек қана басқарушы айнымалылардың ақырлы санынан, ал u_k жағдайы – параметрлердің ақырлы санынан тәуелді болады.

9.2. Тиімділік принципі. Беллман теңдеуі

Тиімділік принципін алғашқы рет 1953 ж. Р.Беллман ойлап тапқан болатын. Жүйенің u жағдайы қандай болса да қандай да бір қадам санының нәтижесінде орындалып жатырған қадаммен бірге қалған қадамның барлығында тиімді басқарумен бірге тиімді ұтысқа келтіретіндей ең жақын қадамда басқаруды таңдау керек. Сонымен қатар Р.Беллман принцип ақиқат болатындай шартты қарастырды. Негізгі қойылатын талап – басқару үрдісі кері байланыссыз болуы керек, яғни қарастырылып отырған қадамдағы басқару алдындағы қадамдарға әсерін тигізбеу керек.

Тиімділік принципі кері байланыссыз тиімді басқару кез келген үрдіс үшін кез келген ішкі үрдістің бастапқы жағдайына қатысты осы ішкі үрдіс барысында тиімді болып табылуы керек. Сондықтан, әрбір қадамдағы шешім тұтасымен алғандағы басқару тұрғысынан қарағанда ең жақсы болады. Егер тиімді траекторияны қисық сызық түрінде геометриялық кескіндесе онда осы сынықтың әрбір бөлігі басы мен соңына қатысты тиімді траектория болып табылады.

Беллман теңдеуі. Бекітілген n қадам санымен және u_0 бастапқы жағдайымен берілген бастапқы динамикалық программалау есебінің орнына тиімділік принципін пайдалана отырып әр түрлі u жағдайларында: бірқадамды, екіқадамды және т.т. біртіндеп $n = 1, 2, ...$ мәндері үшін есептер тізбегін қарастырамыз.

Динамикалық программалау есебінде енгізілген жаңа белгілеулер үлкен ақпараттық жүктемені қамтиды, сондықтан оларды толық және дәл меңгеру керек.

u_{k-1} жүйенің кез келген жағдайының әрбір қадамында W_k шешімі келесі u_k жағдайына және әрі қарай u_k жағдайына тәуелді басқару үрдісіне әсер ететіндіктен W_k шешімін таңдағанда «мұқият» болу керек. Бұл тиімділік принципінен алынады.

Бірақ, тек қана осы қадамнан алынатын кез келген u_{n-1} жағдай үшін төңіректік-оңтайлы жоспарлауға болатын тағы бір соңғы қадам бар.

n-ші қадамды қарастырайық: жүйенің n-ші қадамының басындағы u_{n-1} жағдайы, $u_n = \hat{u}$ – соңғы жағдайы, W_n – n-ші қадамдағы басқару, ал $f_n(u_{n-1}, W_n)$ – n-ші қадамдағы мақсат функция (ұтыс).

Тиімділік принципіне сәйкес, кез келген u_{n-1} жағдайы үшін осы қадамда мақсат функцияның максимум мәнін алатындай W_n басқаруын таңдау керек.

$Z_n^*(u_{n-1})$ арқылы соңғы қадамның басына W жүйесі еркін алынған u_{n-1} жағдайында, ал соңғы қадамда басқару тиімді болатындай мақсат функцияның максимумын n-ші қадамдағы тиімділік көрсеткішін белгілейміз.

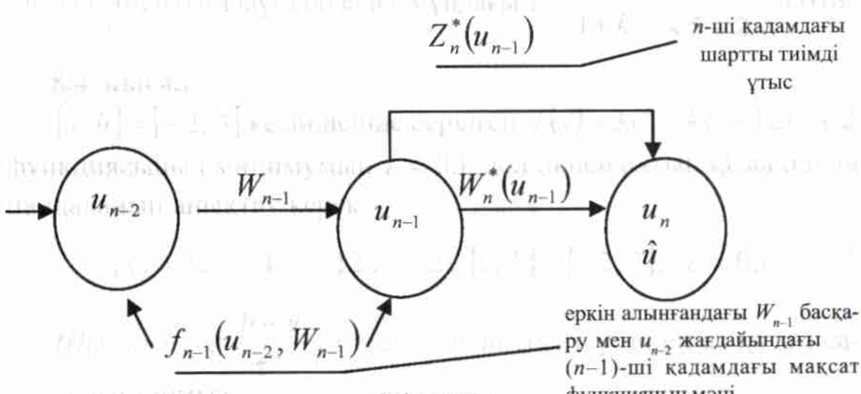
$Z_n^*(u_{n-1})$ – n-ші қадамдағы мақсат функциясының *шартты максимумы* деп аталады:

$$Z_n^*(u_{n-1}) = \max_{\{W_n\}} f_n(u_{n-1}, W_n). \tag{9.5}$$

Максимизациялау барлық жарамды W_n басқаруы бойынша жүргізіледі.

$Z_n^*(u_{n-1})$ мәнінде алынатын W_n шешімі де u_{n-1} жағдайынан тәуелді және n-ші қадамдағы *шартты тиімді басқару* деп аталады да, $W_n^*(u_{n-1})$ – арқылы белгіленеді.

(9.5) теңдеуі бойынша төңіректік оңтайландырудың бірөлшемді есебін шығарып барлық мүмкін болатын u_{n-1} жағдайы үшін $Z_n^*(u_{n-1})$ және $W_n^*(u_{n-1})$ екі функцияны табамыз.



9.1-сурет

Енді екіқадамды есепті қарастырайық: n-ші қадамға n–1-ші қадамды қосамыз (9.1-сурет).

Кез келген u_{n-2} жағдайы, еркін алынған W_{n-1} басқаруы және n-ші қадамдағы тиімді басқару үшін соңғы екі қадамдағы мақсат функциясының мәні мынаған тең:

$$f_{n-1}(u_{n-2}, W_{n-1}) + Z_n^*(u_{n-1}). \tag{9.6}$$

Тиімділік принципіне сәйкес кез келген u_{n-2} жағдайы үшін шешім соңғы (n–m)-қадамда тиімді басқарумен бірге соңғы екі қадамда мақсат функция максимум мәнді қабылдайтындай шешімді таңдау керек. Демек, (9.6) өрнегінің барлық жарамды W_{n-1} басқаруы бойынша максимумын табу керек. Осы қосындының максимумы u_{n-2} жағдайынан тәуелді, $Z_n^*(u_{n-2})$ арқылы белгіленеді және соңғы екі қадамдағы тиімді басқарудағы мақсат функцияның *шартты максимумы* деп аталады.

$$Z_{n-1}^*(u_{n-2}) = \max_{\{W_{n-1}\}}\left\{f_{n-1}(u_{n-2}, W_{n-1}) + Z_n^*(u_{n-1})\right\}. \tag{9.7}$$

(9.7) қатынасындағы фигуралық жақшадағы өрнек u_{n-1} мәнін $k = n-1$ болғанда (9.2) жағдай теңдеуінен

$$u_{n-1} = \varphi_{n-1}(u_{n-2}, W_{n-1})$$

табуға болатындықтан және $Z_n^*(u_{n-1})$ функциясындағы u_{n-1} орнына қоюға болатындықтан тек қана u_{n-2} және W_{n-1} мәндерінен тәуелді болады.

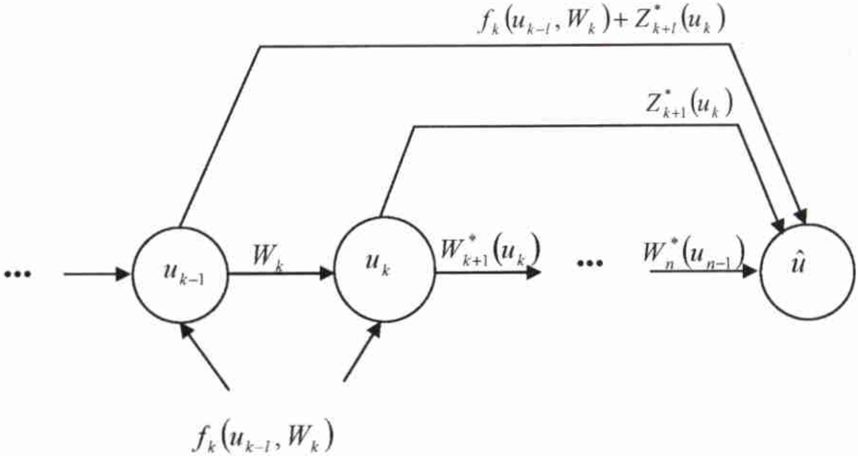
(9.7) теңдеуіне сәйкес тек қана W_{n-1} бір айнымалы бойынша максимизациялау нәтижесінде қайтадан екі функция алынады:

$$Z_{n-1}^*(u_{n-2}) \text{ және } W_{n-1}^*(u_{n-2}).$$

Әрі қарай үш қадамды есеп қарастырылады: соңғы екі қадамға (n–2)-ші қадам қосылады және т.т.

$Z_k^*(u_{k-1})$ арқылы k-шы қадамның басына жүйе u_{k-1} жағдайында болатын шарт орындалғанда k-шы қадамнан бастап соңына дейінгі $n-k+1$-ші қадамдағы тиімді басқарудағы мақсат функциясының шартты максимумын белгілейміз.

Бұл функция мына түрде анықталады:



9.2-сурет

$$Z^*_k(u_{k-1}) = \max_{\{(x_k, \ldots, x_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(u_{i-1}, W_i).$$

Сонда

$$Z^*_{k+1}(u_k) = \max_{\{(x_{k+1}, \ldots, x_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(u_{i-1}, W_i).$$

k-шы қадамдағы еркін алынған W_k басқаруда және келесі $n–k$ қадамдағы тиімді басқаруда соңғы $n–k$ қадамдағы мақсат функция (9.2-сурет) мына түрде есептеледі:

$$f_k(u_{k-1}, W_k) + Z^*_{k+1}(u_k).$$

Тиімділік принципіне сәйкес осы қосындының максимум шартынан W_k таңдалынады:

$$Z^*_k(u_{k-1}) = \max_{\{W_k\}} \left\{ f_k(u_{k-1}, W_k) + Z^*_{k+1}(u_k) \right\},\ k = \overline{n-1, 1}. \quad (9.8)$$

(9.8) максимумды қабылдайтын k-шы қадамдағы W_k басқаруы $W^*_k(u_{k-1})$ арқылы белгіленеді және k-шы қадамдағы шартты тиімді басқару болып табылады ((9.8) теңдеуінің оң жағына u_k -ның орнына жағдайлар теңдеуінен алынған $u_k = \varphi_k(u_{k-1}, W_k)$ өрнегін қоямыз).

(9.8) теңдеуі *Беллман теңдеуі* деп аталады. Бұл рекуррентті қатынас функцияның келесі мәндерін біле отырып алдыңғы мәндерін табуға мүмкіндік береді. Егер (9.5) теңдеуінен $Z_n^*(u_{n-1})$ мәнін анықтауға болса, онда $k=n-1$ болғанда барлық мүмкін болатын u_{n-2} мәндері үшін максимизациялау есебін шығарып (9.8) теңдеуінен $Z_{n-1}^*(u_{n-2})$ үшін өрнекті және сәйкес $W_{n-1}^*(u_{n-2})$ мәнін табуға болады.

(9.5) және (9.8) теңдеулерін шығару үрдісі *шартты оңтайландыру* деп аталады (бұл жерде «кері сұлба» қарастырылады, яғни соңғы қадамнан бастап шығарылады, n -ші қадаммен 1-ші қадамның орындарын алмастыруға болады, онда «тура сұлба» алынады).

Шартты оңтайландыру нәтижесінде екі тізбек алынады:

$$Z_n^*(u_{n-1}),\ Z_{n-1}^*(u_{n-2}),\ ...,\ Z_2^*(u_1),\ Z_1^*(u_0)$$

соңғы, соңғы екі, ..., n-ші қадамдардағы мақсат функциялардың шартты максимумдары, және

$$W_n^*(u_{n-1}),\ W_{n-1}^*(u_{n-2}),\ ...,\ W_2^*(u_1),\ W_1^*(u_0)$$

n-ші, (n–1)-ші, ..., 1-ші қадамдардағы шартты тиімді басқарулар.

Осы тізбектерді пайдалана отырып n және u_0 мәндеріндегі динамикалық программалау есептерінің шешімін табуға болады. 1-ші қадамның басында жүйе u_0 жағдайында, яғни $Z_{\max}=Z_1^*(u_0)$ шарты орындалған жағдайда анықтама бойынша $Z_1^*(u_0)-n$ қадамдағы мақсат функцияның шартты максимумы, яғни

$$Z_{\max}=Z_1^*(u_0).$$

Осыдан кейін шартты тиімді басқаруды және (9.2) жағдайлар теңдеуінің тізбегін пайдаланған дұрыс.

Бекітілген u_0 мәнінде $W_1^*=W_1^*(u_0)$ мәнін аламыз. (9.2) теңдеуінен $u_1^*=\varphi_1(u_0,W_1^*)$– табамыз және осы өрнекті шартты тиімді басқару тізбегіне қоямыз:

$$W_2^*=W_2^*(u_1^*)$$

және т.т. (мұндағы u_k^* арқылы k-шы қадамда тиімді басқару таңдалынған кездегі k-шы қадамнан кейінгі жүйенің жағдайы белгіленген):

$$W_1^* = W_1^*(u_0) \to u_1^* = \varphi_1(u_0, W_1^*) \to W_2^* = W_2^*(u_1^*) \to$$
$$\to u_2^* = \varphi_2(u_1^*, W_2^*) \to W_3^* = W_3^*(u_2^*) \to \ldots \to$$
$$\to u_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(u_{n-2}^* W_{n-1}^*) \Rightarrow W_n^* = W_n^*(u_{n-1}^*),$$

$\to$ – жағдайлар теңдеуінің пайдаланылатынын, $\Rightarrow$ – шартты тиімді басқару тізбегінің пайдаланылатынын білдіреді.

Динамикалық программалау есебінің тиімді шешімін аламыз:

$$W^* = (W_1^*, W_2^*, \ldots, W_n^*).$$

9.1-мысал.

Өнеркәсіп арасында инвестицияларды бөлу есебі.

Өнеркәсіптік бірлестік төрт өндірістік кәсіпорыннан тұрады. Бастапқы қаражат – $u_0 = 7$ шартты бірлікті құрайды. Әрбір өнеркәсіпке бөлінетін қаражат 1 шартты бірлікке еселі болып келеді. k-шы $(k = \overline{1, 4})$ өнеркәсіпке бөлінген x қаражат жылдың соңында $f_k(x)$ пайда береді. $f_k(x)$ функциялары 9.1-кестеде берілген. Бұл жерде мына мәселелерді ескеру қажет:

1. $f_k(x)$ пайдасы басқа кәсіпорындарға бөлінген инвестициялардан тәуелсіз;

2. әрбір кәсіпорыннан түсетін пайда бірдей шартты бірлікпен беріледі;

3. жалпы пайда әрбір кәсіпорыннан түскен пайдалардың қосындысына тең.

Барлық кәсіпорындардағы жалпы пайданы максимизациялайтындай кәсіпорындардың арасында инвестицияны үлестіруді табу талап етіледі.

9.1-кесте.

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	20	18	25	30
2	34	29	41	52
3	46	45	52	76
4	53	62	74	90
5	55	78	82	104
6	60	90	88	116
7	60	98	90	125

Шығарылуы. x_k арқылы k-шы кәсіпорынға бөлінген қаражатты белгілейміз.

Жалпы қосынды:

$$Z = \sum_{k=1}^{4} f_k(x_k). \tag{9.9}$$

x айнымалысы келесі шектеулерді қанағаттандырады:

$$\sum_{k=1}^{4} x_k = 7\,,\ x_k \geq 0\,,\ k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{9.10}$$

(9.10) шектеулер жүйесін қанағаттандыратын және (9.9) функция максимум мәнді қабылдайтындай x_1, x_2, x_3, x_4 айнымалыларын табу керек.

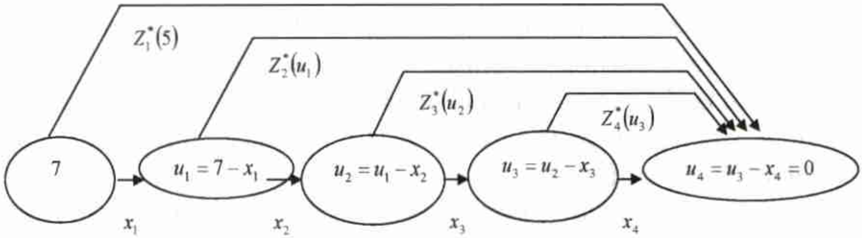
u_0= 7 қаражатын үлестіруді шешу үрдісін төрт қадамды ретінде қарастыруға болады. Қадам нөмірі кәсіпорын нөмірімен бірдей болады. x_1, x_2, x_3, x_4 айнымалыларын таңдау – сәйкес I, II, III, IV-қадамдарды басқару. $\hat{u}$ үлестіру үрдісінің соңғы жағдайы, барлық инвестицияны кәсіпорындарға бөліп беру қажет болғандықтан оның мәні нөлге тең, $\hat{u}$ =0. Үлестіру сұлбасы 9.3-суретте келтірілген.

Берілген есеп үшін (9.2) жағдай теңдеуі мына түрде жазылады:

$$u_k = u_{k-1} - x_k\,,\ k = 1, 2, 3, 4\,, \tag{9.11}$$

мұндағы u_k – жағдай параметрі, k-шы қадамнан кейін қалған инвестиция мөлшері, яғни қалған $4 - k$ кәсіпорындарға үлестірілетін инвестиция саны.

$Z_k^*(u_{k-1})$ функциясын қарастырамыз. $Z_k^*(u_{k-1})$ – егер k-шы, (k+1)-ші, ..., 4-ші кәсіпорындар арасында u_{k-1} $(0 \leq u_{k-1} \leq 7)$ қара-



9.3-сурет

жаты тиімді үлестірілсе, онда осы кәсіпорындардан алынған шартты тиімді пайда. k-шы қадамдағы жарамды басқару $0 \le x_k \le u_{k-1}$ (не k-шы кәсіпорынға ештеңе бермейміз, x_k=0, не k-шы қадамдағы бар қаражаттан артық емес x_k / u_{k-1} қаражат береміз) шартын қанағаттандырады.

(9.5) және (9.8) теңдеулері мына түрде жазылады:

$$k = 4\,,\; u_4 = 0 \;\Rightarrow\; Z_4^*(u_3) = \max_{0 \le x_4 \le s_3} f_4(x_4); \qquad (a)$$

$$Z_3^*(u_2) = \max_{0 \le x_3 \le u_2} \{f_3(x_3) + Z_4^*(u_3)\}; \qquad (ә)$$

$$Z_2^*(u_1) = \max_{0 \le x_2 \le u_1} \{f_2(x_2) + Z_3^*(u_2)\}; \qquad (б)$$

$$Z_1^*(5) = \max_{0 \le x_1 \le 5} \{f_1(x_1) + Z_2^*(u_1)\}. \qquad (в)$$

Әрбір қадамның шартты оңтайландыруын (9.3-сурет) жүргізе отырып жазылған теңдеулерді біртіндеп шығарамыз.

IV-қадам. 9.1-кестеде $f_4(x)$ пайдасы монотонды өседі, сондықтан IV-қадамда қалған қаражаттың барлығын 4-ші кәсіпорынға жұмсаған дұрыс. Бұл жерде мүмкін болатын $u_3 = 0, 1, ..., 7$ мәндері үшін мына қатынасты аламыз:

$$Z_4^*(u_3) = f_4(u_3) \text{ және } x_4^*(u_3) = u_3 .$$

III-қадам. III-қадамға калған (яғни x_1 және x_2 таңдағаннан кейін) u_2 қаражатқа қатысты барлық ұсыныстарды қарастырамыз. u_2 – 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 мәндерін қабылдауы мүмкін (мысалы, u_2 = 0, егер барлық қаражат 1-ші және 2-ші кәсіпорындарға жұмсалса; u_2 = 7, егер 1-ші және 2-ші кәсіпорындарға ештеңе берілмесе, және т.т.). Осыған байланысты $0 \le x_3 \le u_2$ таңдаймыз, $u_3 = u_2 - x_3$ – анықтаймыз және $f_3(x_3) + Z_4^*(u_3)$ қосындысының мәнін бекітілген u_2 мәнінде әр түрлі x_3 үшін салыстырамыз. Әрбір u_2 үшін $Z_3^*(u_2)$ осы мәндердің ішіндегі ең үлкені – u_2 қаражатын 3-ші және 4-ші кәсіпорындарға тиімді үлестіргенде алынатын шартты тиімді пайда. k = 3 мәніндегі оңтайландыру 9.2-кестеде берілген. Әрбір u_2 мәні үшін $Z_3^*(u_2)$ және $W_3^*(u_2)$ сәйкес 5-ші және 6-шы бағандарда көрсетілген.

II-қадам. k = 2 үшін (*б*) теңдеуіне сәйкес шартты оңтайландыру 9.2-кестеде келтірілген. Мүмкін болатын барлық u_1 мәні үшін

$Z_2^*(u_1)$ және $W_2^*(u_1)$ мәндері сәйкес 8-ші және 9-шы бағанда келтірілген; 7-ші бағандағы бірінші қосылғыштар – $f_2(x_2)$ мәндері 9.1-кестеден, ал екінші қосылғыштар $u_2 = u_1 - x_2$ мәнінде 9.2-кестенің 5-ші бағанынан алынған.

I-қадам. Шартты оңтайландырудың I-қадамында кестенің $u_0 = 7$ мәніне сәйкес бөлімді толтырса жеткілікті. $u_0 = 7$ үшін $k = 1$ болғандағы шартты оңтайландыру ((*в*) теңдеуі) 9.2-кестеде келтірілген. Егер $x_1 = 0$ болса, онда $u_1 = 7$, төрт кәсіпорыннан алынған пайда; $u_1 = 7$ қалған үш кәсіпорынның арасында тиімді үлестірілген жағдайда $f_1(0) + Z_2^*(7) = 0 + 101 = 101$ мәніне тең болады ($Z_2^*(7)$ мәні $u_1 = 7$ мәнінде 9.2-кестенің 9-шы бағанынан алынған). Егер $x_1 = 1$ болса, онда $u_2 = 6$. $u_2 = 6$ қалған үш кәсіпорынның арасында тиімді үлестірілген жағдайдағы жалпы пайда $f_1(1) + Z_2^*(6) = 20 + 135 = 155$ мәніне тең болады ($f_1(1)$ мәні 9.1-кестеден, $Z_2^*(6)$ мәні 9.2-кестенің 9-шы бағанынан алынған). Осылайша

$x_1 = 2$ болғанда, $u_2 = 5$ және $f_1(2) + Z_2^*(5) = 34 + 119 = 153$;

$x_1 = 3$ болғанда, $u_2 = 4$ және $f_1(3) + Z_2^*(4) = 46 + 101 = 147$;

$x_1 = 4$ болғанда, $u_2 = 3$ және $f_1(4) + Z_2^*(3) = 53 + 77 = 130$;

$x_1 = 5$ болғанда, $u_2 = 2$ және $f_1(5) + Z_2^*(2) = 55 + 55 = 110$;

$x_1 = 6$ болғанда, $u_2 = 1$ және $f_1(6) + Z_2^*(1) = 60 + 26 = 86$;

$x_1 = 7$ болғанда, $u_2 = 0$ және $f_1(7) + Z_2^*(0) = 60 + 0 = 60$.

Алынған нәтижелерді салыстыра отырып, $x_1^* = x_1^*(7) = 1$ мәнінде $Z_1^*(7) = 155\,ш.б. = Z_{max}$.

(9.11) теңдеуді пайдаланып $u_1^* = 7 - 1 = 6$ мәнін аламыз, ал 9.2-кесте бойынша 9-бағаннан $x_2^* = x_2^*(6) = 1$ мәнін табамыз.

$u_2^* = 6 - 1 = 5$, 9.2-кесте бойынша 6-бағаннан $x_3^* = x_3^*(5) = 2$;
$u_3^* = 5 - 2 = 3$, $x_4^* = x_4^*(3) = 3$, яғни $W^*(1; 1; 2; 3)$.

1-ші кәсіпорынға 1 *ш.б.*; 2-ші кәсіпорынға 1 *ш.б.*; 3-ші кәсіпорынға 2 *ш.б.*; 4-ші кәсіпорынға 3 *ш.б.* қаражат бөлінген кезде жалпы пайданың максимумы – 155 *ш.б.* тең.

Жауабы. 1-ші кәсіпорынға 1 *ш.б.*; 2-ші кәсіпорынға 1 *ш.б.*; 3-ші кәсіпорынға 2 *ш.б.*; 4-ші кәсіпорынға 3 *ш.б.* көлеміндегі инвестицияларды үлестірген кезде жалпы пайданың максимумы – 155 *ш.б.* тең болады.

9.2-кесте

u_{k-1}	x_k	u_k	$k=3$			$k=2$			$k=1$		
			$f_3(x_3)+$ $+Z_4^*(u_3)$	Z_3^* (u_2)	x_3^* (u_2)	$f_2(x_2)+$ $+Z_3^*(u_2)$	Z_2^* (u_1)	x_2^* (u_1)	$f_1(x_1)+$ $+Z_2^*(u_1)$	Z_1^* (u_0)	x_1^* (u_0)
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	0+1=1	25	0	0+25=25	25	0	0+25=25	25	0
	1	0	25+0=25			18+0=18			20+0=20		
2	0	2	0+52=52	55	1	0+55=55	55	0	0+55=55	55	0
	1	1	25+30=55			18+25=43			20+25=45		
	2	0	41+0=41			29+0=29			34+0=34		
3	0	3	0+76=76	77	1	0+77=77	77	0	0+77=77	77	0
	1	2	25+52=77			18+55=73			20+55=75		
	2	1	41+30=71			29+25=54			34+25=59		
	3	0	52+0=52			45+0=45			46+0=46		
4	0	4	0+90=90	101	1	0+101=101	101	0	0+101=101	101	0
	1	3	25+76=101			18+77=95			20+77=97		
	2	2	41+52=93			29+55=84			34+55=89		
	3	1	52+30=82			45+25=70			46+25=71		
	4	0	74+0=74			62+0=62			53+0=53		
5	0	5	0+104=104	117	2	0+117=117	119	1	0+119=119	121	1
	1	4	25+90=115			18+101=119			20+101=121		
	2	3	41+76=117			29+77=106			34+77=111		
	3	2	52+52=104			45+55=100			46+55=101		
	4	1	74+30=104			62+25=87			53+25=78		
	5	0	82+0=82			78+0=78			55+0=55		
6	0	6	0+116=116	131	2	0+131=131	135	1	0+135=135	139	1
	1	5	25+104=129			18+117=135			20+119=139		
	2	4	41+90=131			29+101=130			34+101=135		
	3	3	52+76=128			45+77=122			46+77=123		
	4	2	74+52=116			62+55=117			53+55=108		
	5	1	82+30=110			78+25=103			55+25=80		
	6	0	88+0=88			90+0=90			60+0=60		
7	0	7	0+125=125	150	4	0+150=150	150	0	0+150=150	155	1
	1	6	25+116=141			18+131=149			20+135=155		
	2	5	41+104=145			29+117=146			34+119=153		
	3	4	52+90=142			45+101=146			46+101=147		
	4	3	74+76=150			62+77=139			53+77=130		
	5	2	82+52=134			78+55=133			55+55=110+		
	6	1	88+30=118			90+25=115			60+25=85		
	7	0	90+0=90			98+0=98			60+0=60		

Ескертулер.

1. Төртөлшемді 9.1-мысалда шартты экстремумды анықтау есебі төрт бірөлшемді есепті шешуге келтірілді: әрбір қадамда бір x айнымалысы анықталды.

2. Шығарылған 9.1-мысалды талдау нәтижесінде функцияның берілу түрі мен тәсілі динамикалық программалау әдісіне ешқандай әсер етпейтінін көрдік: $f_k(x)$ кестемен берілді, сондықтан, $Z_k^*(u)$ шамасы да, $W_k^*(u)$ шамасы да 9.2-кестеде келтірілген дискретті мәндерді қабылдады.

3. Іріктеу әдісі динамикалық программалау мен осы есепке ұқсас дискретті есептердің арасындағы балама болып табылады. Шартты оңтайландырудың кезеңінде қолайлы емес нұсқаларды жазбай тастап кетуге болатындықтан динамикалық программалау әдісі «жақсы әдіс» болып табылады.

4. u_0 жағдайы мен n қадам санының өзгерген мәндері үшін де осы әдісті пайдалануға болатынын әдістің жетістігі ретінде қарастыруға болады.

5. Өлшемділігі артқан кезде есептеу барысында техникалық қиындықтардың пайда болуын осы әдістің кемшілігі ретінде қарауға болады. Егер әрбір W_k^* басқару τ айнымалысынан, ал u_k^* жағдайы μ параметрінен тәуелді болса, онда әрбір қадамда оңтайландырудың $\tau\mu$-өлшемді есебі пайда болады.

9.3. Динамикалық программалау әдісін қолданудың жалпы сұлбасы

Динамикалық программалау әдістеріне қойылатын барлық талаптар орындалады деп ұйғарайық. Есептерді шығару үшін динамикалық программалау модельдерін құру мен динамикалық программалау әдістерін қолдану келесі кезеңдерге әкеледі:

1. басқару үрдісін қадамдарға бөлу тәсілі таңдалынады;

2. u_k жағдайының параметрлері мен әрбір қадамдағы W_k басқару айнымалылары анықталады;

3. жағдай теңдеуі жазылады;

4. k-шы қадамдағы мақсат функциясы мен жалпы мақсат функциясы енгізіледі;

5. $Z_k^*(u_{k-1})$ шартты максимумы (минимумы) және k-шы (k=n, n–1, ..., 2, 1) қадамдағы $W_k^*(u_{k-1})$ шартты тиімді басқаруды қарастыру енгізіледі;

6. $Z_n^*(u_{n-1})$ және $Z_k^*(u_{k-1})$, k= n–1, ..., 2, 1 үшін динамикалық программалау сұлбасы үшін негізгі Беллман теңдеуі жазылады;

7. біртіндеп Беллман теңдеуі (оңтайландыру шарты) шығарылады және функциялардың екі тізбегі алынады:

$$\left\{Z_k^*(u_{k-1})\right\} \text{ және } \left\{W_k^*(u_{k-1})\right\}.$$

8. шартты оңтайландыру орындалғаннан кейін нақты бастапқы u_0 жағдайы үшін тиімді шешім:

1) $Z_{\max} = Z_1^*(u_0)$ және

2) тізбек бойынша

$u_0 \Rightarrow W_1^* \to u_1^* \Rightarrow W_2^* \to u_2^* \ldots \Rightarrow W_{n-1}^* \to u_{n-1}^* \Rightarrow W_n^* \to u_n^*$

тиімді басқару: $W^*\left(W_1^*, W_2^*, \ldots, W_n^*\right)$ алынады.

Осы келтірілген сұлбаны нақты мысалда қарастырайық.

9.2-мысал.

Өндірістің екі саласының қызметі $n = 4$ жылға жоспарланады. Бастапқы қаражат $u_0 = 1000$ шартты бірлікті құрайды. Бірінші салаға салынған қаражат жылдың соңында $f_1(x) = 0{,}6x$ пайда әкеледі де $q_1(x) = 0{,}6x$ ($q_1(x) < x$) мөлшерінде қайтарады; осылайша екінші сала үшін пайда функциясы – $f_2(x) = 0{,}5x$, ал қайтару мәні – $q_2(x) = 0{,}8x$ ($q_2(x) < x$) шамасына тең. Жылдың соңында барлық қайтарылған қаражаттар бірінші және екінші салаларға бөлінеді, жаңа қаражат түспейді, пайда өндіріске салынбайды (осы шарт жағдай теңдеуінің түрін анықтайды).

Берілген есеп үшін динамикалық программалау моделін және есептеу сұлбасын құрып, есепті шығару керек.

Шығарылуы. Өндірістің екі саласының арасында қаражатты үлестіру үрдісі уақытқа байланысты орындалады. Шешім әрбір жылдың басында қабылданады, демек, үлестіру қадамдарға бөлінеді: қадам нөмірі – жылдың нөмірі. Басқарылатын жүйе – өндірістің екі саласы, ал басқару – ағымдағы жылы қаражатты әрбір салаға бөлу. k-жылдың басындағы жағдай параметрлері – u_{k-1} ($k = \overline{1, n}$) – үлестірілетін қаражат. Әрбір қадамда екі басқару айнымалылары бар: x_k – бірінші салаға; y_k – екінші салаға бөлінген қаражат мөлшері. Барлық u_{k-1} толығымен үлестірілетіндіктен $y_k = u_{k-1} - x_k$ және басқару k-қадамда тек қана x_n айнымалысынан тәуелді, яғни $W_k(x_k, u_{k-1} - x_k)$.

$$u_k = q_1(x_k) + q_2(u_{k-1} - x_k) \qquad (9.12)$$

жағдай теңдеуі k-жылдың соңында қайтарылған қаражаттың қалған мөлшерін өрнектейді.

k-қадамның тиімділік көрсеткіші – k-жылдың соңында екі саладан да алынған пайда:

$$f_1(x_k)+f_2(u_{k-1}-x_k). \tag{9.13}$$

Тиімділіктің жалпы көрсеткіші – есептің мақсат функциясы – n жылғы пайда болады:

$$Z=\sum_{k=1}^{4} f_1(x_k)+f_2(u_{k-1}-x_k).$$

$Z_k^*(u_{k-1})$ – k-жылдың басында бар қаражат әрі қарай тиімді үлестірілетіндей k-жылдан бастап n-жылға дейінгі $n-k+1$ жылғы шартты тиімді пайдасы болсын. Сонда n-жылғы тиімді пайда: $Z_{\max}=Z_1^*(u_0)$.

Беллман теңдеуін мына түрде жазуға болады:

$$Z_n^*(u_{n-1})=\max_{0\le x_k\le u_{k-1}}\{f_1(x_n)+f_2(u_{n-1}-x_n)\},$$

$$Z_k^*(u_{k-1})=\max_{0\le x_k\le u_{k-1}}\{f_1(x_k)+f_2(u_{k-1}-x_k)+Z_{k+1}^*(u_k)\},$$
$$\left(k=\overline{n-1,2}\right).$$

Енді алынған теңдеулерге берілген есептің мәліметтерін қойып қажетті нәтижелерді аламыз.

(9.12) теңдеу жағдайы:

$$u_k=0{,}7x_k+0{,}8(u_{k-1}-x_k) \text{ немесе } u_k=0{,}8u_{k-1}-x_k. \tag{9.14}$$

k-қадамдағы мақсат функция, (9.13) формула бойынша:

$$0{,}6x_k+0{,}5(u_{k-1}-x_k)=0{,}1x_k+0{,}5u_{k-1}.$$

Есептің мақсат функциясы:

$$Z=\sum_{k=1}^{4}0{,}5u_{k-1}+0{,}1x_k.$$

Функционалдық теңдеулер:

$$Z_4^*(u_3) = \max_{0 \le x_4 \le u_3} \{0,5u_3 + 0,1x_4\}, \tag{9.15}$$

және

$$Z_k^*(u_{k-1}) = \max_{0 \le x_k \le u_{k-1}} \{0,1x_k + 0,5u_{k-1} + Z_{k+1}^*(u_k)\}. \tag{9.16}$$

Шартты оңтайландыру жүргізейік.

IV-қадам. (9.15) теңдеуді пайдаланамыз. $Z_4 = 0,1x_k + 0,5u_{k-1}$ белгілеуін енгізейік. Z_4 функциясы сызықты, бұрыштық коэффициенті 0,1-ге тең (нөлден үлкен) болғандықтан өспелі. Сондықтан, $[0;\ u_3]$ интервалының соңында максимумды қабылдайды. Демек, $x_4^*(u_3) = u_3$ болған кезде $Z_4^*(u_3) = 0,6u_3$.

III-қадам. (9.16) теңдеуде $k = 3$ деп алып, және алынған $Z_4^*(u_3)$ функциясын пайдаланып

$$Z_3^*(u_2) = \max_{0 \le x_3 \le u_2} \{0,1x_3 + 0,5u_2 + 0,6u_3\}. \tag{9.17}$$

теңдеуін аламыз.

u_3 мәнін (9.14) жағдай теңдеуінен табамыз:

$$u_3 = 0,8u_2 - 0,1x_3. \tag{9.18}$$

(9.18) өрнегін (9.17) теңдеуінің оң жағына қоямыз:

$$Z_3^*(u_2) = \max_{0 \le x_3 \le u_2} \{0,1x_3 + 0,5u_2 + 0,6 \cdot (0,8u_2 - 0,1x_3)\}$$

немесе

$$Z_3^*(u_2) = \max_{0 \le x_3 \le u_2} \{0,04x_3 + 0,98u_2\}.$$

Алдыңғы жағдайдағы сияқты функция $x_3 = u_2$ шамасында максимум мәнді қабылдайды, яғни $x_3^*(u_2) = u_2$ болған кезде $Z_3^*(u_2) = 1,02u_2$.

II-қадам. Жағдай теңдеуінен:

$$u_2 = 0,8u_1 - 0,1x_2.$$

Сондықтан, $k = 2$ болған кезде (9.15) теңдеудің түрі:

$$Z_2^*(u_1) = \max_{0 \le x_2 \le u_1} \{1,32u_1 - 0,002x_2\}.$$

$Z_2^* = -0{,}002x_2 + 1{,}32u_1$ сызықтық функциясы кемімелі (бұрыштық коэффициенті -0,002-ге тең, нөлден кіші), сондықтан ол x_2 =0 мәнінде максимумға жетеді:

$$x_2^*(u_1) = 0 \text{ болған кезде } Z_2^*(u_1) = 1{,}32u_1 .$$

I-қадам. $u_1 = 0{,}8u_0 - 0{,}1x_1$. k = 1 болған кезде (9.15) теңдеудің түрі:

$$Z_1^*(u_0) = \max_{0 \le x_1 \le u_0} \{1{,}553u_0 - 0{,}032x_1\}.$$

Алдыңғы жағдайдағы сияқты функция кесіндінің басында максимумға жетеді, яғни $x_1^*(u_0) = 0$ болған кезде $Z_1^*(u_0) = 1{,}553u_0$.

Осы алынған шартты оңтайландырудың нәтижесін және бастапқы мәліметтерді пайдаланып келесі мәндерді аламыз:

$$Z_{\max} = Z_1^*(1000),\ Z_{\max} = 1553.$$

$x_1^* = 0$, $y_1^* = u_0 = 1000$ (барлық қаражат екінші салаға бөлінеді) $\rightarrow$ $u_1^* = 0{,}8 \cdot 1000 - 0{,}1 \cdot 0 = 800$ $\Rightarrow$ $x_2^* = 0$, $y_2^* = u_1 = 800$ (барлық қаражат екінші салаға бөлінеді) $\rightarrow$ $u_2^* = 0{,}8 \cdot 800 - 0{,}1 \cdot 0 = 640$ $\Rightarrow$ $x_3^* = 640$, $y_3^* = 0$ (барлық қаражат бірінші салаға бөлінеді) $\rightarrow$ $u_3^* = 0{,}8 \cdot 640 - 0{,}1 \cdot 640 = 448$ $\Rightarrow$ $x_4^* = 448$, $y_4^* = 0$ (барлық қаражат бірінші салаға бөлінеді).

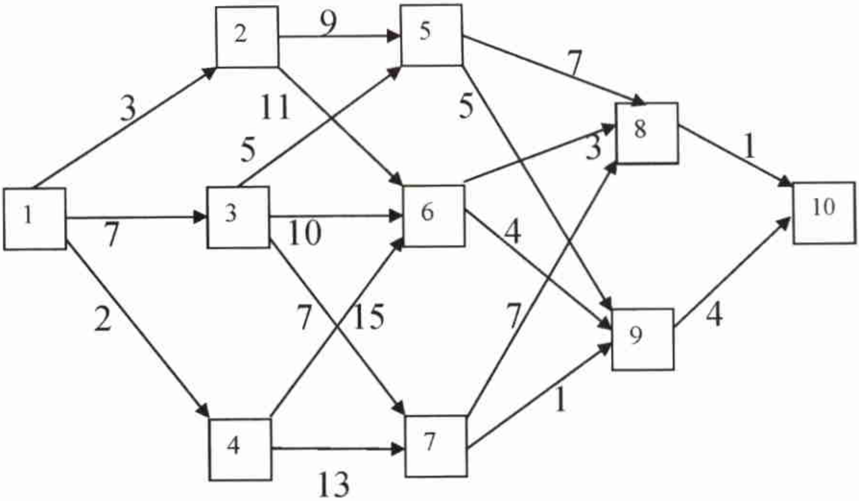
Жауабы. Бастапқы қаражат 1000 *ш.б.* болған кезде жылдар бойынша бірінші сала (0; 0; 640; 448), екінші сала сәйкес (1000; 800; 0; 0) алған жағдайда өндірістің екі саласынан алынған 4 жылдағы тиімді пайда 1553 *ш.б.* болады.

9.3-мысал.

9.4-суретте келтірілген 1-елді мекеннен 10-елді мекенге жетудің тиімді маршрутын анықтау керек. Сұлбада әрбір шаршыда ыңғайлы болу үшін нөмірленген елді мекеннің бірі бейнеленеді. *i*-ші елді мекеннен *j*-ші елді мекенге жету құнын c_{ij} арқылы белгілейік (бұл шамалардың мәні сұлбада келтірілген).

1-елді мекеннен 10-елді мекенге жету үшін аз шығын жұмсалатындай жолды анықтау керек.

Шығарылуы. Беллман қатынасының рекурентті формуласын пайдаланамыз:



9.4-сурет

$$f_n(i) = \min_j \{c_{ij} + f_{n-1}(j)\},\ n = \overline{1, N}$$

мұндағы N – есепті шығарудағы кезең саны; $f_n(i)$ – егер i-ші елді мекеннен соңғы елді мекенге дейін n қадам қалған кездегі шығынның минималды стратегиясына жауап беретін құн; $P_n(i)$ – $f_n(i)$-ді қабылдауға мүмкіндік беретін шешім.

Соңғы елді мекеннен бастап тиімді маршрутты іздейміз.

$n = 1$ деп ұсынамыз.

$$f_1(8) = c_{8,10} = 1,\ P_1(8) = 10;$$

$$f_1(9) = c_{9,10} = 4,\ P_1(9) = 10;$$

$n = 2$:

$$f_2(5) = \min\{c_{5,8} + f_1(8);\ c_{5,9} + f_1(9)\} = 8,\ P_2(5) = 8;$$

$$f_2(6) = \min\{c_{6,8} + f_1(8);\ c_{6,9} + f_1(9)\} = 4,\ P_2(6) = 8;$$

$$f_2(7) = \min\{c_{7,8} + f_1(8);\ c_{7,9} + f_1(9)\} = 5,\ P_2(7) = 9;$$

$n = 3$:

$$f_3(2) = \min\{c_{2,5} + f_2(5);\ c_{2,6} + f_2(6)\} = 15,\ P_3(2) = 6;$$

$$f_3(3) = \min\{c_{3,5} + f_2(5);\ c_{3,6} + f_2(6);\ c_{3,7} + f_2(7)\} = 12,\ P_3(3) = 7;$$

$$f_3(4)=\min\{c_{4,6}+f_2(6); c_{4,7}+f_2(7)\}=18,\ P_3(4)=7;$$

$n=4$:

$$f_4(1)=\min\{c_{1,2}+f_3(2); c_{1,3}+f_3(3); c_{1,4}+f_3(4)\}=18,\ P_4(1)=3;$$

Сонымен, тиімді жол табылды.

Жауабы. 1-2-6-8-10, жұмсалатын шығын: $f_4(1)=18$.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Динамикалық программалау есептерінің ерекшеліктері.
2. Жағдайлар теңдеуінің жазылуы.
3. Аддитивті функция деп қандай функцияны айтамыз?
4. Динамикалық программалау есебінің жалпы қойылуы.
5. Тиімділік принципі.
6. Беллман теңдеуі (рекуррентті формуласы).
7. Функцияның берілуінің, тәсілінің динамикалық программалау әдістеріне әсері.
8. Мақсат функцияның шартты максимумының анықтамасы.
9. Шартты тиімді басқару дегеніміз не?
10. Динамикалық программалау әдістерінің кемшілігі.

9.1-мысалда қарастырылған өнеркәсіп арасында инвестицияларды бөлу есебін **11-12** есептерде берілген мәліметтер үшін шығару керек.

11. $u_0=9$; $k=\overline{1,3}$; $\Delta x=1$ және $f_k(x)$ функцияларының мәндері 9.3-кестеде берілген.

9.3-кесте

x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$
1	5	7	6
2	9	9	10
3	12	11	13
4	14	13	15
5	15	16	16
6	18	19	18
7	20	21	21
8	24	22	22
9	27	25	25

12. $u_0=9$; $k=\overline{1,4}$; $\Delta x=1$ және $f_k(x)$ функциялары 9.4-кестеде берілген.

9.4-кесте

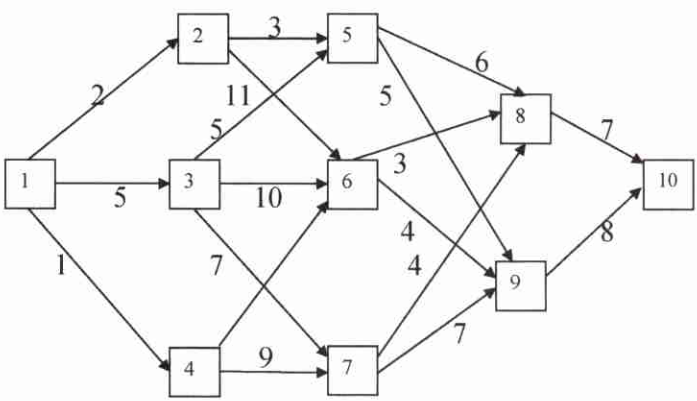
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f_4(x)$
1	5	7	6	3
2	9	9	10	5
3	12	11	13	7
4	14	13	15	11
5	15	16	16	13
6	18	19	18	15
7	20	21	21	20
8	24	22	22	22
9	27	25	25	24

Өндірістің екі саласының қызметі n жылға жоспарланады. Бастапқы қаражат u_0 шартты бірлікті құрайды. Бірінші салаға салынған қаражат жылдың соңында $f_1(x)$ пайда әкеледі де $q_1(x)$ ($q_1(x)< x$) мөлшерінде қайтарады; осылайша екінші сала үшін пайда функциясы – $f_2(x)$, ал қайтару мәні – $q_2(x)$ ($q_2(x)< x$) шамасына тең. Жылдың соңында барлық қайтарылған қаражаттар бірінші және екінші салаларға бөлінеді, жаңа қаражат түспейді, пайда өндіріске салынбайды. **13-14** есептерде төмендегі мәліметтерді пайдаланып қаражатты екі салаға (жылға) үлестірудің тиімді шешімін табу керек.

13. n=4; $u_0 = 40000$ *ш.б.*; $f_1(x)= 0,3x$; $f_2(x)= 0,6x$; $q_1(x)= 0,4x$; $q_2(x)= 0,7x$.

14. n=4; $u_0 = 5000$ *ш.б.*; $f_1(x)= 0,8x$; $f_2(x)= 0,1x$; $q_1(x)= 0,5x$; $q_2(x)= 0,3x$.

15. 9.5-суретте келтірілген маршрут бойынша 1-ші елді мекеннен 10-шы елді мекенге жетудің 14 әр түрлі маршрутын көрсетіңіз және тиімді жолын анықтаңыз.



9.5-сурет

III - бөлім

ОЙЫНДАР ТЕОРИЯСЫ

10 - тарау. АНТАГОНИСТИКАЛЫҚ ОЙЫНДАР

10.1. Ойындар теориясының негізгі ұғымдары. Ойындарды топтастыру

Шешімді таңдау туралы мәселелер қарастырылатын көптеген әлеуметтік-экономикалық жағдайлардың (әсіресе нарықтық экономика кезінде) әрқайсысы өзінің мақсатына жету үшін әр түрлі тәсілдермен әрекет ету мүмкіндігі бар, кейбір жағдайларда таңдаулары тайталас жақтардың әрекеттерінен тәуелді әр түрлі қызығушылықтарымен (кей жағдайда қарама-қарсы) кем дегенде екі жақ қатысатындай қасиетті қамтиды. Мұндай жағдайлар *дау-жанжал* деп аталады. Дау-жанжал жағдайы келесі белгілермен сипатталады:

1) қызығушы жақтардың жиыны (тұтынушылар, фирмалар, жеке елдер, әр түрлі кеден, сауда, қаржы және экономикалық одақтары, жеке адамдар және т.т.);

2) әрбір жақтың мүмкін болатын әрекеттері (тұтыну көлемін таңдау, дивиденттік саясатты таңдау, инвестициялық қоржынды іріктеудің әр түрлі тәсілдері, ұлттық нарыққа саяси немесе экономикалық түсінік бойынша кейбір тауарларды жібермеу және т.т.);

3) қарама-қарсы жақтардың мүддесі (әр түрлі саяси, қаржы, экономикалық сұраныстарды қанағаттандыру, монополиялық пайда, тауар өткізетін нарықтан бәсекелестерді ығыстыру, артық тауарды сыртқы нарықта сатып жіберу, қазынаның және өндірушілердің табысын арттыру және т.т.).

Нақты өмірлік дау-жанжалда әрбір жақтың жүрісін таңдау – күрделі есеп. Сондықтан оны талдау үшін берілген дау-жанжал жағдайындағы маңызды емес факторларды алып тастап және оның орындалуын белгілі тәртіппен шектей отырып математикалық модельдеуге жүгінуге тура келеді.

Дау-жанжал жағдайындағы математикалық модель *ойын* деп аталады. Дау-жанжал жағдайындағы тиімді шешімді қабылдайтын математикалық модельдеумен айналысатын амалдарды зерттеу теориясының бөлімі *ойындар теориясы* деп аталады.

Ойында мүдделі (қызығушылығы бар) жақтар *ойыншылар* деп аталады. Дау-жанжал қорытындысы *ұтыс* деп аталады. Көбінесе, әйтсе де барлық уақытта емес, ойыншылар тең құқылы болып есептеледі. Егер бірлескен әрекеттері бірлесу мақсатында болып табылса, онда осындай бірлесулер *әрекеттер коалициясы* деп аталады. Егер бірігу ойын нәтижесінің артықтығының сәйкестік белгісі бойынша құрылса, онда ол *мүдде коалициясы* деп аталады. Көрсетілген коалициялар барлық уақытта бірдей бола бермейді. Бірдей болған жағдайда олар жай ғана *коалициялар* деп аталады. Уақытша фактор тұрғысынан алғанда ойын барысында коалициялар *уақытша* немесе *тұрақты* бола алады. Жоғарыда айтып кеткеніміздей ойынды математикалық қалыптастыру мақсатында қарастырсақ, ойын шарттар жүйесін беретін белгілі *ережелер* бойынша жүргізілуі керек. Ол:

– әрбір ойыншының мүмкін болатын әрекеттерін;

– әрбір жақ басқа жақтардың әрекеттері туралы ала алатын ақпарат көлемін;

– қарсыласының жүрісінің әрбір жиынтығының нәтижесіндегі ойынның қорытындысын сипаттайды.

Ереже бойынша ұтыс (немесе ұтылыс) сандық берілуі мүмкін: мысалы, ұтылысты – нөлмен, ұтысты бір санымен, теңбе-теңді – 1/2 санымен бағалауға болады.

Қарастырылған ережелердің біреуін таңдау және жүзеге асыру ойыншының *жүрісі* деп аталады. Жүріс – дербес және кездейсоқ болуы мүмкін: *дербес жүріс* – мүмкін болатын әрекеттердің біреуін ойыншының әдейі таңдауы (мысалы, шахмат ойынындағы жүріс); *кездейсоқ жүріс* – кездейсоқ таңдалынған әрекет (мысалы, араластырылған карталар ішінен біреуін таңдау).

Көбінесе ойыншылар *тактика* ұғымын пайдаланады: ойыншы ойында нақты жүрісті сол жүріс барысында ғана таңдауға шешім қабылдайды.

Пайда болған жағдайға тәуелді ойыншының жүрісін таңдауды бірмәнді анықтайтын ережелер жүйесі *стратегия* деп аталады.

Кез келген жағдайға нақты таңдау сәйкес қойылған ойыншының әрбір бекітілген стратегиясы *таза стратегия* деп аталады. Басқаша айтқанда, ойында ойыншының кез келген мүмкін болатын әрекеті ойыншының *стратегиясы* немесе *таза стратегиясы* деп аталады.

Бір жүрісті ойында стратегия және тактика ұғымдары бір мағынаны білдіреді.

Айталық A ойыншының $m \geq 1$ таза стратегиясы бар болсын, және оларды $A_1, A_2, ..., A_m$ арқылы, ал осы стратегиялардың жиынын S_A^C («C» – *clean* ағылшын сөзінің бірінші әрібінен алынған, аудармасы – таза мағынасын білдіреді) арқылы белгілейік. Сонымен, $S_A^C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$. Дау-жанжал жағдайында әрбір ойыншы өзінің жүрісін жасайды, яғни өзінің қандай да бір стратегиясын таңдайды. Нәтижесінде дау-жанжалдың *қорытындысы* немесе *жағдайы* деп аталатын, барлық ойыншылардың x стратегиялар жиыны құрылады. Мысалы, егер ойынға A және B ойыншылар сәйкес $S_A^C = \{A_1, A_2, \dots, A_m\}$ және $S_B^C = \{B_1, B_2, ..., B_m\}$ стратегиялар жиынымен қатысып, кезекті жүрістің нәтижесінде ойыншылар сәйкес A_i және B_j стратегияларын таңдаса, онда $x = (A_i, B_j)$ реттелген жұбы осы жүрістен кейінгі жағдай болып табылады.

D және E екі жиынының барлық (d, e) реттелген жұбының $D \times E = \{(d, e): d \in D, e \in E\}$ жиыны $D \times E$ *декарттық көбейтіндісі* деп аталады.

Осы анықтаманы ескере отырып таза стратегияларда барлық жағдайлар жиыны $S_A^C \times S_B^C$ декарттық көбейтіндісін – A ойыншының S_A^C таза стратегиялар жиынының B ойыншының S_B^C таза стратегиялар жиынына декарттық көбейтіндісін береді, яғни $S_A^C \times S_B^C = \{(A_i, B_j): i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, 2, \dots, n\}$. Ойыншылар саны екіден артық, ақырлы болған кездегі ойын үшін де осылайша талдауға болады.

Кей кездерде кез келген жағдай мүмкін бола бермейтіндей ойын ережелері кездеседі. Мүмкін бола бермейтін жағдай *тиым салынған жағдай* деп аталады. Ойыншылар тиым салынған жағдайға әкелетін стратегияны таңдаған кездегі ойын ереже бойынша жүргізілмегендіктен *құрылмаған* деп есептеледі.

A ойыншының қызығушылығын қанағаттандыру деңгейі оның барлық жағдайлардың $X = S_A^C \times S_B^C$ жиынында анықталған және әрбір $x \in X$ жағдайын *A ойыншының x жағдайындағы ұтысы* деп аталатын қандай да бір $F_A(x) \in \mathbf{R}$ санына сәйкес қоятын $F_A : X \to \mathbf{R}$ *ұтыс функциясымен* анықталады.

Осылайша, B ойыншы үшін $y = (B_j, A_i)$ жағдайының және олардың әрқайсысын $Y = S_B^C \times S_A^C = \{(B_j, A_i): j = 1, 2, \ldots, n, i = 1, 2, \ldots, m\}$ жиынында анықталған *B ойыншының y жағдайындағы ұтысы* деп аталатын $F_B(y) \in \mathbf{R}$ санына сәйкес қоятын $F_B : Y \to \mathbf{R}$ ұтыс функциясы анықталады.

Ойын бірнеше рет қайталанғанда ойыншыға барынша көп (максимал) мүмкін болатын орташа ұтысқа (немесе барынша аз (минимал) мүмкін болатын орташа ұтылысқа пара-пар) кепілдік беретін стратегия *тиімді стратегия* деп аталады. Басқаша айтқанда, ойыншылардың біреуі (айталық, біріншісі) өзінің стратегиясын ұстаған кезде, екіншісі барынша көп ұтысты иемденуі керек, және осы мезгілде екінші ойыншы өзінің стратегиясын ұстаған кезде бірінші ойыншы барынша аз ұтылысты иемдену керек. Міне осындай стратегиялар *тиімді стратегиялар* деп аталады.

Ойындар теориясында ойындардың өздері ойынның әр түрлі сипаттамалары, атрибуттары бойынша жіктелуі мүмкін (ойынға қатысушылар, ойын барысындағы жүрісі). Бұл жіктеу, мысалы

1) ойынға қатысатын ойыншылар саны бойынша;

2) ойынның стратегиялар саны бойынша;

3) ойын нәтижесі (ұтыс, ұтылыс қосындысы) бойынша;

4) ойын барысындағы ойыншылардың өз ара қарым-қатынасы бойынша;

5) ұтыс функциясының түрі бойынша

және т.б. сипаттамалар бойынша жүзеге асырылуы мүмкін.

Ойынға қатысатын ойыншылар саны бойынша ойын *жұп ойын* және *көптік ойын* болып бөлінеді. Ойынға қатысатын жақтардың саны екіге тең болса, ойын *жұп ойын* деп, ал екіден артық болса, онда ойын *көптік ойын* деп аталады.

Стратегиялар санына қатысты ойын *ақырлы* және *ақырсыз* болып бөлінеді. Егер әрбір ойыншының стратегиялар жиыны ақырлы болса, онда ойын *ақырлы* деп аталады. Кері жағдайда, яғни кем дегенде бір ойыншының стратегиялар жиыны ақырсыз болса ойын *ақырсыз* деп аталады.

Ойын ұтысының (нәтижесінің) сипаты бойынша ойын *нөлдік қосындылы ойын* және *нөлдік емес қосындылы* ойын деп бөлінеді.

Егер жұп ойында ойыншылар қарама-қарсы мақсатты көздесе, онда мұндай ойын *антагонистикалық ойын* деп аталады. Осындай ойында ойыншылардың біреуі қанша ұтса, екіншісі тура сондай ұтылады. Сондықтан, A және B ойыншыларының $F_A :\ S_A^C \times S_B^C \to \mathbf{R}$ және $F_B :\ S_B^C \times S_A^C \to \mathbf{R}$ ұтыс функциялары өзара келесі қатынаспен байланысқан:

$$F_B\left(B_j, A_i\right) = -F_A\left(A_i, B_j\right),\ i = 1, 2, \ldots, m,\ \ j = 1, 2, \ldots, n,$$

мұндағы S_A^C – A ойыншының таза стратегиясы, S_B^C – B ойыншының таза стратегиясы.

Антагонистикалық ойындарда ойыншылардың ұтыстарының қосындысы барлық уақытта нөлге тең. Антагонистикалық ойынды нөлдік қосындылы ойынның дербес жағдайы ретінде қарастыруға болады.

Ойынның өзара қарым-қатынасы бойынша, нөлдік емес қосындылы көптік ойындар *коалициялы* және *коалициясыз* ойындар деп бөлінеді.

Коалициялы ойындарда ойыншылар коалицияға кіре алады және әрекеттер коалициясы мен қызығушылық коалициясы әр түрлі болады.

Коалициясыз ойындарда әрбір ойыншының мақсаты – барынша көп мүмкін болатын жеке ұтысты иемдену. Егер ойыншылар коалицияға біріксе, онда мұндай коалициялар коалицияға кіретін жеке ойыншылардың мүдделерін ғана анықтайды.

Коалициясыз ойындар өз алдына *кооперативті* және *кооперативті емес* ойындар болып бөлінеді. Кооперативті ойындарда ойыншыларға коалицияға (топтарға) бірігуге рұқсат етіледі және алдын ала анықталады. Коалиция мақсаты жалпы ұтысты соңынан келісім бойынша коалиция мүшелері арасында бөліп беретіндей максимизациялау. Қандай да бір коалиция құруға тиым салынған кооперативтік ойындар бар. Бұл кезде ойын бастапқы берілген коалициялық бөліну шарттарында жүргізіледі. Кооперативті емес ойындарда кооперативті ойындарға қарағанда ойыншылар өздерінің күштерімен жеке ұтыстарды максимизациялауға ұмтылады.

Кооперативті емес ойындарды көбінесе коалициясыз ойындар деп айтады.

Ұтыс функциясына қатысты ойын матрицалық, биматрицалық, үзіліссіз, дөңес, сепарабельді және т.б. бөлінеді.

10.2. Матрицалық ойындар

A ойыншының $(A_1, A_2, ..., A_m)$ – *m* стратегиясы бар, *B* ойыншының $(B_1, B_2, ..., B_n)$ – *n* стратегиясы бар ақырлы ойынды қарастырайық. Мұндай ойын *mxn – ойын* деп аталады. Жалпы жағдайда *m* және *n* сандары бір-бірінен тәуелсіз. Егер *A* және *B* ойыншылар тек қана жеке жүрістерін пайдаланса, онда *A* және *B* стратегияларын таңдау ойынның a_{ij} қорытындысын бірмәнді анықтайды, яғни *A* ойыншының ұтысын және *B* ойыншының ұтылысын сипаттайтын санды анықтайды. a_{ij} мәні оң да теріс те болуы мүмкін. $a_{ij}>0$ болғанда *A* ойыншы ұтады, ал *B* ойыншы a_{ij} шамасына ұтылады және керісінше, $a_{ij}<0$ болғанда *B* ойыншы ұтады, ал *A* ойыншы ұтылады. Бұл жағдайда көбінесе, ұтылыстың орнына *A* ойыншының теріс ұтысы айтылады.

Егер ойында кездейсоқ жүрістер қарастырылса, онда A_i және B_j стратегиялардағы ұтыс кездейсоқ болып табылады. Бұл жағдайда күтілетін ұтыс бағасының орнына оның математикалық күтімі алынады.

Айталық, бізге *mxn* ойынының барлық a_{ij} мәні белгілі болсын. Матрицаның жатық жолдарына *A* ойыншының A_i стратегияларын, тік жолдарына *B* ойыншының B_j стратегияларын сәйкес қоюға болады. Егер жатық жолмен тік жолдың қиылысуына *A* ойыншының (A_i, B_j) жағдайына сәйкес F_A ұтыс функциясының $F_A(A_i, B_j)=a_{ij}$ мәнін қойсақ, онда *A ойыншының ұтыс матрицасы* деп аталатын ***A*** матрицасын аламыз:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}. \qquad (10.1)$$

Осылайша, B ойыншының F_B ұтыс функциясының $F_B(B_j, A_i)=b_{ji}$ мәндерінен *B ойыншының **B** ұтыс матрицасын* аламыз.

(10.1) теңдіктен $\boldsymbol{B} = -\boldsymbol{A}^T$ (яғни $\boldsymbol{B}$ матрицасы $\boldsymbol{A}$ матрицасына қарама-қарсы транспонирленген матрица) аламыз. Демек, $\boldsymbol{B}$ матрицасы $\boldsymbol{A}$ матрицасымен анықталады. Сондықтан, ақырлы антагонистикалық ойын тек қана бір ұтыс матрицасымен сипатталады, осыған байланысты *матрицалық ойын* деп аталады.

Ойын матрицасы A және B ойыншылардың S_A^C және S_B^C реттелген жиынынан маңызды түрде тәуелді. Жалпы, кез келген ақырлы антагонистикалық ойынды матрицалық ойын түрінде жазуға болады.

Ойынның $\boldsymbol{A}$ матрицасы F_A ұтыс функциясының мәндеріне тәуелді құрылады. Ол кестелік, аналитикалық (формула түрінде) немесе сөздік-сипаттау тәсілімен берілуі мүмкін.

Сонымен, матрицалық ойын толығымен A ойыншының S_A^C стратегиялар жиынынан, B ойыншының S_B^C стратегиялар жиынынан және A ойыншының $\boldsymbol{A}$ ұтыс матрицасынан тұратын $\{S_A^C, S_B^C, A\}$ жиынтығымен анықталады.

10.1-мысал.

«*Теңгені ойлап табу*» ойыны.

Бірінші (A) ойыншы өзінің қалауы бойынша және екінші (B) ойыншыға көрсетпей бағасы 50 немесе 100 теңгенің біреуін жұдырығына жасырады, ал екінші ойыншы қандай теңгенің жасырылғанын табуға тырысады. Егер тапса, жасырылған теңгені алады, кері жағдайда бірінші ойыншыға 75 теңге береді.

Ұтыс матрицасын жазу керек.

Шығарылуы. A ойыншының екі стратегиясы бар: A_1 – 50 теңгені жасыру, A_2 – 100 теңгені жасыру; B ойыншының да екі стратегиясы бар: B_1 – 50 теңге деп болжау, B_2 – 100 теңге деп болжау. Сонда осы ойынның ұтыс матрицасы мына түрде жазылады (жатық жолдар – A ойыншының, тік жолдар – B ойыншының стратегиялары):

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & \quad B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Жауабы. $P=\begin{pmatrix}-50 & 75\\ 75 & -100\end{pmatrix}$.

10.3. Максимин принципі

Ойынның шешімін анықтаудың жалпы ережесін табу мақсатында ойынның таза стратегияда шешімі бар болатын (10.1) түріндегі ұтыс матрицасын қарастырайық.

Дау-жанжал жағдайын бірінші ойыншының тұрғысынан қарастырайық. Айталық, A ойыншы өзінің ең жақсы стратегиясын таңдасын, яғни $(A_1, A_2, ..., A_m)$ стратегияларының ішінен кез келген A_i-ші стратегияға A ойыншының ұтысы минималды болатындай B ойыншы B_j стратегиясымен жауап береді. Осы B_j стратегиясын табу үшін ұтыс матрицасындағы A_i стратегиясына сәйкес (i-ші нөмірлі жол) жолдағы a_{ij} сандарының ішіндегі ең кішісін табу керек. Оны α_i арқылы белгілейміз, яғни

$$\alpha_i = \min_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m \tag{10.2}$$

α_i мәні *A_i-ші стратегиясының тиімді көрсеткіші* деп аталады.

A ойыншының стратегиясы өзгерген кезде осы стратегияларға сәйкес әрбір α_i саны да өзгеріп отырады. Әрине, A ойыншыға α_i максимал мәнді қабылдайтындай A_i стратегиясына тоқтаған дұрыс. Егер ойыншы айтылғандарды ескеріп қауіп-қатерге тәуекел етпесе, келесі түрде әрекет ету керек: барлық жатық жолдардың ең кіші элементін таңдап, осы таңдалған элементтердің ең үлкенін таңдау керек, ал қауіп-қатерге тәуекел ету – тиімсіз ойнау болып табылады. Сол кезде ол өзінің ұтысына кепілдік береді, ұтыс – ең болмаса, барлық жолдардың ең кіші элементтерінің ішіндегі ең үлкеніне тең болады.

Бұл максимал мәнді $\underline{v}$ арқылы белгілейік, яғни

$$\underline{v} = \max_{i=1,2,\dots,m} \alpha_i \tag{10.3}$$

немесе, α_i үшін (10.2) өрнегін ескерсек,

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij}, \quad i=1, 2, \dots, m, \quad j=1, 2, \dots, n. \tag{10.3'}$$

$\underline{v}$ шамасы *ойынның төменгі құны (мәні)* немесе *максималды ұтысы (максимин)* деп аталады. Бұл B ойыншының кез келген стратегиясындағы A ойыншының кепілденген ұтысы.

Максиминге сәйкес келетін стратегия, яғни $\underline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның жатық жолы *A ойыншының максиминді стратегиясы* деп аталады.

A ойыншының (10.3) тиімді стратегиясын таңдау принципі *максимин принципі* деп аталады.

Осылайша, A ойыншы үшін жүргізілген талдауды B ойыншы үшін жүргізіп мына ұғымдарды аламыз:

$$\beta_j = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}, \;\; j = 1, 2, \dots, n. \tag{10.4}$$

β_j мәні *B_j-ші стратегиясының тиімді емес көрсеткіші* деп аталады.

B ойыншы тек қана,

$$\overline{v} = \min_{j=1,2,\dots,n} \beta_j, \tag{10.5}$$

немесе (10.4) формула бойынша

$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij}, \;\; i = 1, 2, \dots, m, \;\; j = 1, 2, \dots, n \qquad (10.5')$$

өрнегімен анықталатын β_j шамасынан кем емес ұтысқа жететініне сенімді бола алады.

$\overline{v}$ – *ойынның жоғарғы құны (мәні)* немесе *минималды ұтысы (минимакс)* деп аталады. Бұл A ойыншының кез келген стратегиясындағы B ойыншының кепілденген ұтысы болады.

Минимакске сәйкес келетін стратегия, яғни $\overline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның тік жолы *B ойыншының минимаксті стратегиясы* деп аталады.

B ойыншының тиімді стратегиясын таңдаудың (10.5) принципі *минимакс принципі* деп аталады.

Минимаксті немесе максиминді стратегиялар ойында бір немесе одан да көп болуы мүмкін.

Теорема 10.1 (*максимин принципі*). Кез келген матрицалық ойын үшін

$$\underline{v} \le \overline{v}.$$

Егер $\underline{v} = \overline{v}$ болса, яғни ойынның жоғарғы құны мен төменгі құны өзара беттессе, онда минимаксті және максиминді стратегиялар ойыншылардың *тиімді стратегиялары* деп, олардың жиынтығы *тиімді шешім* деп немесе *ойынның шешімі* деп аталады, $v = \underline{v} = \overline{v}$ шамасы *ойынның мәні* немесе *таза құны* деп аталады. Бұл жағдайда A ойыншы барынша көп кепілденген v ұтысын (B ойыншының жүрісінен тәуелсіз) алады, ал B ойыншы барынша аз кепілденген v ұтылысқа (A ойыншының жүрісінен тәуелсіз) жетеді. Егер ойыншылардың біріншісі өзінің стратегиясын ұстаған кезде, екінші ойыншы үшін өзінің тиімді стратегиясынан бас тарту қолайсыз болса, онда мұндай шешім *орнықты* болып табылады. Тиімді стратегиялар орнықтылық шартын қанағаттандыру керек.

Тиімді стратегияларды i^*, j^* арқылы белгілейік.

Егер

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*},\ i = 1, 2, \ldots, m \tag{10.6}$$

теңсіздігі орындалса, онда A және B ойыншылар, сәйкес A_{i^*} және B_{j^*}, $i^* \in \{1, 2, \ldots, m\}$, $j^* \in \{1, 2, \ldots, n\}$ стратегияларын таңдау нәтижесінде құрылған (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы *A ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдайы* деп аталады, және егер

$$a_{i^* j^*} \le a_{i^* j},\ \ j = 1, 2, \ldots, n \tag{10.7}$$

теңсіздігі орындалса онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы *B ойыншы үшін қанағаттанарлық* деп аталады.

Теорема 10.2. Егер A ойыншының $a_{i^* j^*}$ ұтысы B ойыншының B_{j^*} стратегиясының β_{j^*} тиімді емес көрсеткішімен бірдей болған кезде ғана

$$a_{i^* j^*} = \beta_{j^*}, \tag{10.8}$$

яғни ойын матрицасының j^* тік жолында ең көп болса, (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы A ойыншы үшін қанағаттанарлық болып табылады.

Осындай критерий B ойыншының қанағаттанарлық жағдайы үшін де орындалады.

Теорема 10.3. Егер B ойыншының ұтылысы A ойыншының A_{i^*} стратегиясының α_{i^*} тиімді көрсеткішімен бірдей болған кезде ғана

$$a_{i^* j^*} = \alpha_{i^*}, \qquad (10.9)$$

яғни ойын матрицасының i^* жатық жолында ең кіші болса, онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы B ойыншы үшін қанағаттанарлық болып табылады.

B ойыншы үшін қанағаттанарлық жағдайдың саны m мәнінен кем емес және mn мәнінен артық емес.

Тепе-теңдік жағдай

Егер A және B ойыншыларының әрқайсысы үшін (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы қанағаттанарлық жағдай болса, яғни егер (10.6) және (10.7) теңсіздіктер орындалса:

$$a_{ij^*} \le a_{i^* j^*} \le a_{i^* j}, \; i = 1, 2, \ldots, m, \;\; j = 1, 2, \ldots, n, \qquad (10.10)$$

немесе (10.2 және 10.3-теоремалар негізінде) (10.8) және (10.9) теңдіктер орындалса

$$\alpha_{i^*} = a_{i^* j^*} = \beta_{j^*}, \qquad (10.11)$$

онда (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайы ойынның *тепе-теңдік жағдайы*, немесе *орнықты*, немесе *ер нүктесі* деп аталады.

Сонымен, (10.10) қос теңсіздік пен (10.11) қос теңдік парапар. (A_{i^*}, B_{j^*}) жағдайына сәйкес келетін $a_{i^* j^*}$ ұтысы *ойын матрицасының ер нүктесі* деп аталады.

Тиімді стратегиялар жұбының және ойын құнының жиынтығы *ер нүктесі бар ойынның шешімі* деп аталады.

A және B ойыншыларының сәйкес таза тиімді стратегиялар жиынын S_A^{CO} және S_B^{CO} арқылы белгілейік (O әрібі ағылшынның *optimal* – «тиімді» сөзінің бірінші әрібі).

A және B ойыншыларының таза тиімді стратегиялар жиыны мен ойынның v құнынан тұратын $\{S_A^{CO}, S_B^{CO}, v\}$ жиынтығы *таза стратегиядағы ойынның толық шешімі* деп аталады. Ал қандай да бір A_i және B_j таза стратегиялар жұбы мен ойынның v құнының жиынтығы *таза стратегиядағы ойынның дербес шешімі* деп аталады.

Теорема 10.4 (*таза стратегиялардағы ойын құнының бар болу критерийі*). Таза стратегиялардағы ойын құны бар болу үшін, яғни ойынның $\underline{v}$ төменгі құны мен $\overline{v}$ жоғарғы құны тең болу үшін осы ойынның ұтыс матрицасының ер нүктесінің бар болуы қажетті және жеткілікті.

Теорема 10.5. Келесі тұжырымдар ақиқат.

1. A ойыншының әрбір тиімді стратегиясы оның максиминді стратегиясы болып табылады, ал B ойыншының әрбір тиімді стратегиясы оның минимаксті стратегиясы болып табылады.

2. Ер нүктесі жоқ ойында жалпы тиімді стратегия болмайтындықтан бұл ойында бірде бір максиминді және минимаксті стратегиялар тиімді болмайды.

3. Ер нүктесі бар ойында A және B ойыншыларының сәйкес әрбір максиминді және минимаксті стратегиялары тиімді болып табылады.

Басқаша айтқанда, ер нүктесі бар ойында A ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның максиминді стратегиялар жиынымен беттеседі: $S_A^{CO} = S_A^{C\max\min}$, ал B ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның минимаксті стратегиялар жиынымен беттеседі: $S_B^{CO} =$ $= S_B^{C\min\max}$. Ер нүктесі жоқ ойында A ойыншының максиминді стратегиясы $S_A^{C\max\min} = \varnothing$ және B ойыншының минимаксті стратегиясы $S_B^{C\min\max} = \varnothing$ барлық уақытта бар болса да, бірде бір ойыншының тиімді стратегиясы жоқ: $S_A^C = S_B^C = \varnothing$.

10.2-мысал.

Төмендегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның төменгі және жоғарғы құнын, ер нүктесін, тиімді стратегиясын анықтау керек.

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_2 & B_3 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Шығарылуы. Бірінші ойыншының ең жақсы стратегиясын табамыз. Егер ойыншы A_1 стратегиясын таңдаса, онда ол кем дегенде $\alpha_1 = \min(2; 0; -1) = -1$ ұтысты, A_2 стратегиясын таңдаса $\alpha_2 = \min(3; 4; 2) = 2$ ұтысты, A_3 стратегиясын таңдаса $\alpha_3 = \min(4; 6; 3) = 3$ ұтысты, A_4 стратегиясын таңдаса $\alpha_4 = \min(5; 7; 5) = 5$ ұтысты алады. Алынған мәндерді матрицаның оң жағына сәйкес әр жолдың тұсына жазамыз.

Осындай мүмкіндіктерді көре отырып, бірінші ойыншы өзінің ең аз ұтысын максимизациялау мақсатында келесі стратегияны таңдайды:

$$\underline{v} = \max \alpha_i = \max(-1; 2; 3; 5) = 5 .$$

Алынған $\underline{v}$ мәні ойыншының кепілденген ұтысы (ойынның төменгі құны). $\underline{v}$ ұтысын қамтитын A_4 стратегиясы – минимаксті стратегия. Бірінші ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_4, B_1), (A_4, B_2), (A_4, B_3).

Осылайша екінші ойыншының ең жақсы стратегиясын анықтаймыз. Екінші ойыншы B_1 стратегиясын таңдаса, ең кем дегенде $\beta_1 = \max(2;\ 3;\ 4;\ 5) = 5$ ұтылысын, B_2 стратегиясын таңдаса $\beta_2 = \max(0; 4; 6; 7) = 7$ ұтылысын, B_3 стратегиясын таңдаса $\beta_3 = \max(-1; 2; 3; 5) = 5$ ұтылысын алады. Ойыншы ұтылысы ең аз болатын стратегияны таңдайды:

$$\overline{v} = \min_j \beta_j = \min(5; 7; 5) = 5.$$

$\overline{v}$ мәні ойыншының кепілденген ұтылысы (ойынның жоғарғы құны). $\overline{v}$ ұтылысын қамтитын B_1 және B_3 стратегиялары – максиминді стратегия. Екінші ойыншы үшін қолайлы жағдайлар: (A_1, B_1), (A_2, B_1), (A_3, B_1), (A_4, B_1), (A_1, B_3), (A_2, B_3), (A_3, B_3), (A_4, B_3).

Алынған мәндерді матрицаның төменгі жағына сәйкес әр бағанның астына жазамыз:

$$\begin{array}{c|c} \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ 4 & 6 & 3 \\ 5 & 7 & 5 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} -1 \\ 2 \\ 3 \\ 5 \end{array} \\ \hline \begin{array}{ccc} 5 & 7 & 5 \end{array} & \end{array}$$

$$\underline{v} = \max_i \min_j a_{ij} = \max\{-1; 2; 3; 5\} = 5,$$
$$\overline{v} = \min_j \max_i a_{ij} = \min\{5; 7; 5\} = 5, \; i = \overline{1, 4}, \; j = \overline{1, 3}.$$

Бұл мысалда ойынның төменгі құны мен жоғарғы құны өзара тең: $\underline{v} = \overline{v} = v = 5$. Яғни ойынның таза стратегиялар жиынында шешімі бар, ол $v = 5$ мәніне тең. Қарастырылып отырған мысалда екі тиімді стратегия (ер нүктені анықтайды) бар: (A_4, B_1), (A_4, B_3).

Жауабы. Ойынның төменгі құны $\underline{v} = 5$, жоғарғы құны $\overline{v} = 5$, $\underline{v} = \overline{v} = 5$. Ойынның құны – $v = 5$. Тиімді стратегиялар: (A_4, B_1), (A_4, B_3). Екі ер нүкте бар: $a_{41} = a_{43} = 5$.

Қарастырылып отырған ойында екі ер нүкте бар. Жалпы практикада бір ер нүкте болатын немесе екі, үш, төрт және одан да көп ер нүкте болатын есептер кездеседі.

10.4. Аралас стратегиялар

Таза стратегиялардың бірін кездейсоқ таңдаудан тұратын ойыншының стратегиясы *аралас стратегия* деп аталады. Сонымен, ойыншының аралас стратегиясы – нөмірлері оның таза стратегиясының мәні болатын дискреттік кездейсоқ шама болып табылады.

A ойыншының аралас стратегиясын матрица түрінде жазуға болады:

$$S_A = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_i & \dots & A_m \\ p_1 & p_2 & \dots & p_i & \dots & p_m \end{pmatrix}$$

немесе

$$S_A = (p_1, p_2, \dots, p_i, \dots, p_m), \; \sum_{i=1}^{m} p_i = 1.$$

Осылайша *B* ойыншының аралас стратегиясы:

$$S_B = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & \dots & B_j & \dots & B_n \\ q_1 & q_2 & \dots & q_j & \dots & q_n \end{pmatrix}$$

немесе

$$S_B = (q_1, q_2, \dots, q_j, \dots, q_n), \; \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$$

Таза стратегияларды аралас стратегиялардың дербес жағдайы деп қарастыруға болады. Себебі, A ойыншының әрбір A_i, $i = \overline{1, m}$ таза стратегиясын

$$\begin{cases} A_1 = (1, 0, ..., 0, 0) \\ A_2 = (0, 1, ..., 0, 0) \\ \\ A_{m-1} = (0, 0, ..., 1, 0) \\ A_m = (0, 0, ..., 0, 1) \end{cases}$$

түріндегі аралас стратегия ретінде қарастыруға болады. Бұл жерде A_i таза стратегия $p_i = 1$ ықтималдықпен, ал қалған таза стратегиялар нөлге тең ықтималдықтармен таңдалынады.

Минимакс принципінің негізінде ойынның тиімді шешімі анықталады: егер ойыншылардың біреуі өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, онда екіншісіне өзінің стратегиясынан бас тарту тиімді болмайтындай S_A^*, S_B^* тиімді стратегиялар жұбы болады. Тиімді шешімге сәйкес ұтыс *ойынның құны* деп аталады. Ойынның v құны

$$\underline{v} \le v \le \overline{v}$$

теңсіздігін қанағаттандырады, мұндағы $\underline{v}$ және $\overline{v}$ сәйкес ойынның төменгі және жоғарғы құндары.

Теорема 10.6 (*ойындар теориясының негізгі теоремасы – Нейман теоремасы*). Кез келген ақырлы ойынның кем дегенде бір тиімді шешімі бар болады және ол аралас стратегияларда болуы мүмкін.

$S_A^* = (p_1^*, p_2^*, ..., p_i^* ..., p_m^*)$ және $S_B^* = (q_1^*, q_2^*, ..., q_j^* ..., q_n^*)$ – тиімді стратегиялар жұбы болсын. Егер таза стратегия нөлдік ықтималдықтан өзге тиімді аралас стратегияға енетін болса, онда ол *белсенді стратегия* деп аталады.

Теорема 10.7 (*белсенді стратегиялар туралы*). Егер ойыншылардың біреуі өзінің тиімді стратегиясын ұстаса, онда екіншісі өзінің белсенді стратегияларынан тыс кетпесе, онда ұтыс өзгеріссіз қалады және ойынның v құнына тең болады.

Ер нүктесі жоқ ойында ойындар теориясының негізгі теоремасына сәйкес тиімді шешімі бар және S_A^*, S_B^* аралас стратегияларының жұбымен анықталады.

10.5. Аралас стратегиялардағы ұтыстар

Ойын *nxm* – өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін. Ойыншылардың сәйкес *P* және *Q* аралас стратегиялары белгілі болсын. Көрсетілген жағдайлардағы ойыншылардың ұтысын немесе ұтылысын анықтау керек.

A ойыншының (P, Q) жағдайындағы ұтысы

$$H(P, Q) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} p_i a_{ij} q_j \,, (P, Q) \in S_A \times S_B \,,$$

$$P = (p_1, p_2, \ldots, p_m), \; Q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \qquad (10.12)$$

формуласы бойынша анықталады, $H(P, Q)$ мәнін

$$H(P, Q) = P\,\mathbf{A}\,Q^T \,, \qquad (10.12')$$

формуласымен де анықтауға болады.

Мұндағы, $P = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$ – $1 \times m$ өлшемді вектор-жол;

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ – $m \times n$ өлшемді ойын матрицасы

(таза стратегиядағы *A* ойыншының ұтыс матрицасы);

$$Q^T = \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$$ – $n \times 1$ өлшемді вектор-баған («*T*»-транспонирлеу белгісі).

A ойыншының (P, B_l) жағдайындағы ұтысы, яғни *A* ойыншы P^0 аралас стратегиясын, *B* ойыншы B_l таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы

$$H(P, B_l) = \sum_{i=1}^{m} p_i a_{il} = P(a_{1l}, a_{2l}, \ldots, a_{ml})^T = P\,\mathrm{A}\,B_l^{\,T} \quad (10.13)$$

формуласымен, B ойыншының (A_k, Q^0) жағдайындағы ұтылысы

$$H(A_k, Q) = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} q_j = (a_{k1}, a_{k2}, \ldots, a_{kn})Q^T = A_k\,\mathrm{A}\,Q^T \quad (10.14)$$

формуласымен есептеледі.

Теорема 10.8. (*A ойыншының P аралас стратегиясының тиімділік көрсеткіші туралы*). A ойыншының кез келген аралас (дербес жағдайда таза) $P \in S_A$ стратегиясының қарсыласының (B ойыншының) таза және аралас стратегияларының S_B^C және S_B жиындарына қатысты тиімділік көрсеткіштері тең болады, яғни

$$\underline{v}(P, S_B^C) = \underline{v}(P, S_B) = \min_{1 \le j \le n} H(P, B_j). \quad (10.15)$$

Теорема 10.9. (*B ойыншы үшін Q аралас стратегиясының тиімділік емес көрсеткіші туралы*) B ойыншының кез келген аралас (дербес жағдайда таза) $Q \in S_B$ стратегиясының қарсыласының (A ойыншының) таза және аралас стратегияларының S_A^C және S_A жиындарына қатысты тиімділік емес көрсеткішіне тең болады, яғни –

$$\bar{v}(Q, S_A) = \bar{v}(Q, S_A^C) = \max_{1 \le i \le m} H(A_i, Q). \quad (10.16)$$

Теорема 10.10. Кез келген ақырлы матрицалық ойын үшін аралас стратегияларда ойынның төменгі және жоғарғы құндары бар болады.

Теорема 10.11. таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құны мен $\bar{v}$ жоғарғы құны, аралас стратегиялардағы $\underline{V}$ төменгі құны мен $\bar{V}$ жоғарғы құны келесі теңсіздіктерді қанағаттандырады:

$$\underline{v} \le \underline{V} \le \bar{V} \le \bar{v}\,.$$

10.3-мысал.

2×4 – ойынның $A=\begin{array}{c|cccc} & B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \\ A_1 & & & & \\ A_2 & & & & \end{array}\!\!\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасы және A, B ойыншыларының сәйкес $P^0=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$; $Q^0=\left(\frac{1}{5},0,\frac{3}{5},\frac{1}{5}\right)$ аралас стратегиялары берілсін.

A ойыншының (P^0,Q^0), (P^0,B_1), (P^0,B_2), (P^0,B_3), (P^0,B_4) жағдайындағы ұтысын, A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін анықтау керек.

Шығарылуы. A ойыншының (P^0, Q^0) жағдайындағы ұтысы (10.12) формуласы бойынша анықталады. Бұл мысалда

$$n=2,\ m=4;\ a_{11}=4,\ a_{12}=5,\ a_{13}=3,\ a_{14}=8,$$

$$a_{21}=8,\ a_{22}=4,\ a_{23}=5,\ a_{24}=3,$$

$$p_1^0=\frac{1}{4},\ p_2^0=\frac{3}{4},\ q_1^0=\frac{1}{5},\ q_2^0=0,\ q_3^0=\frac{3}{5},\ q_4^0=\frac{1}{5}:$$

$$H(P^0,Q^0)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}p_i^0a_{ij}q_j^0=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{4}p_i^0a_{ij}q_j^0=\sum_{i=1}^{2}p_i^0\sum_{j=1}^{4}a_{ij}q_j^0=$$

$$=\sum_{i=1}^{2}p_i^0\left(a_{i1}q_1^0+a_{i2}q_2^0+a_{i3}q_3^0+a_{i4}q_4^0\right)=$$

$$=p_1^0\left(a_{11}q_1^0+a_{12}q_2^0+a_{13}q_3^0+a_{14}q_4^0\right)+$$

$$+p_2^0\left(a_{21}q_1^0+a_{22}q_2^0+a_{23}q_3^0+a_{24}q_4^0\right)=$$

$$=\frac{1}{4}\cdot\left(4\cdot\frac{1}{5}+5\cdot0+3\cdot\frac{3}{5}+8\cdot\frac{1}{5}\right)+\frac{3}{4}\cdot\left(8\cdot\frac{1}{5}+4\cdot0+5\cdot\frac{3}{5}+3\cdot\frac{1}{5}\right)=\frac{99}{20}$$

$H(P^0,Q^0)$ мәнін (10.12’) формуласымен де анықтауға болады.

$$H\left(P^0, Q^0\right) = P^0 A\left(Q^0\right)^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\left(\frac{1}{5}, 0, \frac{3}{5}, \frac{1}{5}\right)^T =$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 & 8 \\ 8 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{3}{4}\cdot 8, \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{3}{4}\cdot 4, \frac{1}{4}\cdot 3 + \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4}\cdot 5, \frac{1}{4}\cdot 8 + \frac{3}{4}\cdot 3\right)\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = \left(7, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{17}{4}\right)\begin{pmatrix} 1/5 \\ 0 \\ 3/5 \\ 1/5 \end{pmatrix} = 7\cdot\frac{1}{5} + \frac{17}{4}\cdot 0 + \frac{9}{2}\cdot$$

$$\cdot\frac{3}{5} + \frac{17}{4}\cdot\frac{1}{5} = \frac{7}{5} + 0 + \frac{27}{10} + \frac{17}{20} = \frac{28+54+17}{20} = \frac{99}{20}.$$

A ойыншының $\left(P^0, B_1\right)$ жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_1 = (1, 0, 0, 0)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы (10.13) формуласымен есептеледі. Сонда

$$H\left(P^0, B_1\right) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i1} = p_1^0 a_{11} + p_2^0 a_{21} = \frac{1}{4}\cdot 4 + \frac{3}{4}\cdot 8 = 7.$$

A ойыншының $\left(P^0, B_2\right)$ жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы $P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_2 = (0, 1, 0, 0)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы:

$$H\left(P^0, B_2\right) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i2} = p_1^0 a_{12} + p_2^0 a_{22} = \frac{1}{4}\cdot 5 + \frac{3}{4}\cdot 4 = \frac{17}{4}.$$

A ойыншының $\left(P^0, B_3\right)$ жағдайындағы ұтысы, яғни A ойыншы

$P^0 = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$ аралас стратегиясын, B ойыншы $B_4 = (0, 0, 0, 1)$ таза стратегиясын ұстаған жағдайдағы ұтысы:

$$H\left(P^0, B_4\right) = \sum_{i=1}^{2} p_i^0 a_{i4} = p_1^0 a_{14} + p_2^0 a_{24} = \frac{1}{4} \cdot 8 + \frac{3}{4} \cdot 3 = \frac{17}{4}.$$

A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткіші (10.15) формуланың көмегімен есептеледі.

$$\underline{v}\left(P^0\right) = \min\left\{H\left(P^0, B_1\right), H\left(P^0, B_2\right), H\left(P^0, B_3\right), H\left(P^0, B_4\right)\right\} =$$

$$= \min\left\{7, \frac{17}{4}, \frac{9}{2}, \frac{17}{4}\right\} = \frac{17}{4}.$$

Жауабы. $H\left(P^0, Q^0\right) = \frac{99}{20}$; $\underline{v}\left(P^0\right) = \frac{17}{4}$;

$$H\left(P^0, B_1\right) = 7;\ H\left(P^0, B_2\right) = \frac{17}{4};\ H\left(P^0, B_3\right) = \frac{9}{2};$$

$$H\left(P^0, B_4\right) = \frac{17}{4}.$$

10.4-мысал.

10.3-мысалдың шартында берілген ойын үшін B ойыншының $\left(A_1, Q^0\right)$, $\left(A_2, Q^0\right)$ жағдайындағы ұтылысын, B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткішін анықтау керек.

Шығарылуы. B ойыншының $\left(A_1, Q^0\right)$ жағдайындағы ұтылысы (10.14) формуласымен есептеледі:

$$H\left(A_1, Q^0\right) = \sum_{j=1}^{4} a_{1j} q_j^0 = a_{11} q_1^0 + a_{12} q_2^0 + a_{13} q_3^0 + a_{14} q_4^0 =$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{5} + 5 \cdot 0 + 3 \cdot \frac{3}{5} + 8 \cdot \frac{1}{5} = \frac{4}{5} + 0 + \frac{9}{5} + \frac{8}{5} = \frac{4+9+8}{5} = \frac{21}{5},$$

$$H(A_2, Q^0) = \sum_{j=1}^{4} a_{2j} q_j^0 = a_{21}q_1^0 + a_{22}q_2^0 + a_{23}q_3^0 + a_{24}q_4^0 =$$

$$= 8 \cdot \frac{1}{5} + 4 \cdot 0 + 5 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \frac{1}{5} = \frac{8}{5} + 0 + \frac{15}{5} + \frac{3}{5} = \frac{8+15+3}{5} = \frac{26}{5}.$$

B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткіші (10.16) формуланың көмегімен есептеледі.

Сонда

$$\bar{v}(Q^0) = \max_{1 \le i \le 2} H(A_i, Q^0) = \max\{H(A_1, Q^0), H(A_2, Q^0)\} =$$

$$= \max\left\{\frac{21}{5}, \frac{26}{5}\right\} = \frac{26}{5}.$$

Жауабы. $H(A_1, Q^0) = \dfrac{21}{5}$, $H(A_2, Q^0) = \dfrac{26}{5}$; $\bar{v}(Q^0) = \dfrac{26}{5}$.

10.6. Доминациялау принципі

Ұтыс матрицасының өлшемі үлкен болған жағдайда, ер нүктесі жоқ ойынның шешімін табу қиын болады. Кейбір жағдайларда осындай есептерді ойынды редуциялаудың, яғни күрделі матрицадан қарапайым матрицаға келтірудің көмегімен ықшамдауға болады. Редуциялаудың бір тәсілі *доминациялау принципін* қарастырайық.

Ойын *mxn* ұтыс матрицасымен берілсін:

$$\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \end{array}.$$

Егер A матрицасының жолдарының екі дөңес комбинациялары

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{in}\right), \; p_i' \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i' = 1 \tag{10.17}$$

және

$$\left(\sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{in}\right), \; p_i'' \geq 0, \; i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\sum_{i=1}^{m} p_i'' = 1 \tag{10.18}$$

үшін

$$\sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i1} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i1}, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{i2} \leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{i2}, \ldots, \sum_{i=1}^{m} p_i' a_{in} \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m} p_i'' a_{in} \tag{10.19}$$

теңсіздігі орындалса, онда (10.18) жол (10.17) жолды *доминациялайды*, ал (10.17) жол (10.18) жолмен *доминацияланады* деп айтады.

Егер (10.19) теңсіздіктің әрқайсысы теңдік болса, онда (10.17) жол мен (10.18) жол бірін бірі *дубльдейді* деп айтады. Екі дубльденетін жолдардың әрқайсысы бір мезгілде доминациялайтын, әрі доминацияланатын жол болып табылады.

Егер (10.19) теңсіздіктің әрқайсысы қатаң теңсіздік болса, онда (10.18) жол (10.17) жолды *қатаң доминациялайды*, ал (10.17) жол (10.18) жолмен *қатаң доминацияланады* деп айтады, немесе (10.18) жол (10.17) жолды қатаң доминациялайтын жол, ал (10.17) жол (10.18) жолмен қатаң доминацияланатын жол болып табылады.

Осындай терминология A ойыншының сәйкес стратегиялары үшін де пайдаланылады. Егер (10.18) жол (10.17) жолды сәйкес доминацияласа, дубльдесе, қатаң доминацияласа, онда $P'' = \left(p_1'', p_2'', \ldots, p_m''\right)$ стратегиясы $P' = \left(p_1', p_2', \ldots, p_m'\right)$ стратегиясын сәйкес доминациялайды, дубльдейді, қатаң доминациялайды. Егер A матрицасының бағандарының екі дөңес комбинациялары

$$\left(\sum_{j=1}^{n} q_j' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{mj}\right)^T, \; q_j' \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j' = 1 \qquad (10.20)$$

және

$$\left(\sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{mj}\right)^T, \; q_j'' \geq 0, \; j = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j'' = 1 \qquad (10.21)$$

үшін

$$\sum_{j=1}^{n} q_j' a_{1j} \leq \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{1j}, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{2j} \leq \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{2j}, \ldots, \sum_{j=1}^{n} q_j' a_{mj} \leq$$

$$\leq \sum_{j=1}^{n} q_j'' a_{mj} \qquad (10.22)$$

теңсіздігі орындалса, онда (10.20) баған ($Q' = \left(q_1', q_2', \ldots, q_n'\right)$ стратегия) (10.21) бағанды ($Q'' = \left(q_1'', q_2'', \ldots, q_n''\right)$ стратегияны) *доминациялайды*, ал (10.21) баған (Q'' стратегия) (10.20) бағанмен (Q' стратегиямен) *доминацияланады* деп айтады.

(10.22) теңсіздіктің әрқайсысы теңдік болса, онда (10.20) және (10.21) бағандар (Q' және Q'' стратегиялар) *дубльденетін* бағандар (стратегиялар) деп аталады.

(10.22) теңсіздіктің әрқайсысы қатаң теңсіздік болса, онда (10.20) баған (Q' стратегия) (10.21) бағанды (Q'' стратегияны) *қатаң доминациялайды*, ал (10.21) баған (Q'' стратегия) (10.20) бағанмен (Q' стратегиямен) *қатаң доминацияланады* деп айтады.

Егер ойын матрицасының k-шы жолы оның қалған жолдарының қандай да бір дөңес комбинациясымен қатаң емес доминациялан-са, онда k-шы жолды *жазбай тастап кетуге болатыны* алынады. Нәтижесінде матрица өлшемі кішірейтіледі. Осындай жағдай ойын матрицасының доминацияланатын бағандарына да қатысты.

Екі дубльденетін таза стратегиялардың біреуін (кез келгенін) жазбай тастап кетуге болады.

10.5-мысал.

Ойын 5×5 өлшемді ұтыс матрицасымен берілсін:

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ойын матрицасын редуциялау керек.

Шығарылуы.

$$P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \underset{(1)}{\rightarrow}$$

$$\underset{(1)}{\rightarrow} P = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 10 & 8 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 5 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 9 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \underset{(2)}{\rightarrow}$$

$$\xrightarrow[(2)]{} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 3 \\ 6 & 9 & 5 & 7 \\ 3 & 6 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[(3)]{} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_5 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[(4)]{}$$

$$\xrightarrow[(4)]{} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} B_1 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & 6 & 5 \\ 7 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[(5)]{}$$

$$\xrightarrow[(5)]{} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 4 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array} \xrightarrow[(6)]{} P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array},$$

мұндағы, (1) – A_1 стратегиямен A_4 стратегия дубдьденетіндіктен осы стратегиялардың кез келген біреуін жазбай тастап кетеміз (A_4 стратегияны жазған жоқпыз); (2) – B_2 стратегия B_3 стратегиямен қатаң емес доминацияланады, B_2 стратегиясын жазбаймыз; (3) – B_3 стратегия B_4 стратегиямен қатаң емес доминацияланады, B_3 стратегиясын жазбаймыз; (4) – A_3 стратегия A_5 стратегияны қатаң доминациялайды, A_5 стратегиясын жазбаймыз; (5) – B_1 стратегия B_4 стратегиямен қатаң доминацияланады, B_1 стратегиясын жазбаймыз; (6) – A_1 стратегия A_2 стратегияны қатаң доминациялайды, A_2 стратегиясын жазбаймыз.

Редуциялау нәтижесінде 2×2 матрицасын алдық.

Жауабы. $P = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_3 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 5 & 7 \end{pmatrix} \end{array}$

10.7. 2×2 матрицалық ойындарды шешудің элементарлық әдістері

2×2 *ойынының аналитикалық шығарылуы*

Ойын ұтыс матрицасымен берілсін: $P=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Егер ер нүкте жоқ болса, онда шешімді аралас стратегияда $(P=(p_1,\ p_2),\ Q=(q_1,\ q_2))$ іздейміз. Ойындар теориясының негізгі теоремасына сәйкес *A* ойыншының тиімді стратегиясын қолдану *B* ойыншының кез келген стратегиясында *V* ұтысты иемденетінін білдіреді. Осы айтылғандардың негізінде *B* ойыншының сәйкес B_1 және B_2 стратегияларын ұстағанда келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}p_1^* + a_{21}p_2^* = v, & (B_1\ \textit{стратегиясы}) \\ a_{12}p_1^* + a_{22}p_2^* = v, & (B_2\ \textit{стратегиясы}) \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \tag{10.23}$$

Осы жүйені шеше отырып, тиімді стратегияны және ойынның құнын аламыз:

$$p_1^* = \frac{a_{22}-a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}},\ p_2^* = \frac{a_{11}-a_{12}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \tag{10.24}$$

$$v = \frac{a_{22}\cdot a_{11} - a_{12}\cdot a_{21}}{a_{11}+a_{22}-a_{12}-a_{21}}. \tag{10.25}$$

Осылайша, белсенді стратегиялар туралы теореманы пайдалана отырып, *B* ойыншының орташа ұтылысының ойынның құнына тең екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}q_1^* + a_{12}q_2^* = v \\ a_{21}q_1^* + a_{22}q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Сонда $S_B^*\left(q_1^*, q_2^*\right)$ тиімді стратегиясы мына формулалармен анықталады:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}, \ q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}}. \quad (10.26)$$

10.6-мысал.

«Іздеу» ойыны.

A ойыншы I немесе II қорғанның біреуіне тығылуы мүмкін. *B* ойыншы *A* ойыншыны осы қорғандардың біреуінен іздейді. Егер *B* ойыншы *A* ойыншыны тапса, онда *A* ойыншы *B* ойыншыға бір бірлік, кері жағдайда *B* ойыншы *A* ойыншыға бір бірлік көлемінде айыппұл төлейді.

Ұтыс матрицасын жазу керек. Ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. *A* ойыншының екі стратегиясы бар: A_1 – I қорғанға жасырылады, A_2 – II қорғанға жасырылады; *B* ойыншының да екі стратегиясы бар: B_1 – I қорғаннан іздейді, B_2 – II қорғаннан іздейді.

Сонда осы ойынның ұтыс матрицасы мына түрде жазылады:

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ойынның сәйкес төменгі және жоғарғы құндары: $\underline{v} = -1$, $\overline{v} = 1$, $\underline{v} \neq \overline{v}$. Демек, ер нүкте жоқ. Ойынның шешімін аралас стратегияда іздейміз.

(10.23) формуладан мына теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -p_1^* + p_2^* = v, \\ p_1^* - p_2^* = v, \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases}$$

(10.24)-(10.25) формулаларды пайдаланып келесі тиімді стратегияны және ойынның құнын аламыз:

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,,$$

$$p_2^* = \frac{a_{11} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,,$$

$$v = \frac{a_{22} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{(-1)\cdot(-1)-1\cdot 1}{(-1)+(-1)-1-1} = \frac{0}{-4} = 0\,.$$

Жүйені жоғары математика курсынан белгілі әдістердің бірімен шығарып (10.24), (10.25) формулалардың көмегімен алынған нәтижелердің ақиқаттығына көз жеткізуге болады. Осылайша, *B* ойыншының орташа ұтылысының ойынның құнына тең екенін ескеріп, келесі теңдеулер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} -q_1^* + q_2^* = v \\ q_1^* - q_2^* = v \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases}$$

Сонда $S_B^*(q_1^*, q_2^*)$ тиімді стратегиясы:

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,,$$

$$q_2^* = \frac{a_{11} - a_{21}}{a_{11} + a_{22} - a_{12} - a_{21}} = \frac{-1-1}{-1+(-1)-1-1} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2} = 0{,}5\,.$$

Жауабы. $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $p_1^* = 0{,}5$, $p_2^* = 0{,}5$, $q_1^* = 0{,}5$,

$q_2^* = 0{,}5$, $v = 0$.

Алынған жауап – әрбір ойыншының тиімді стратегиясы өзінің таза стратегиясын кездейсоқ түрде кезектестіру үшін әрбір қорғанды 0,5 ықтималдықпен таңдайтынын және орташа ұтыс 0-ге тең болатынын білдіреді.

$P=(1-p, p),\ p\in[0,1]$ аралас стратегиясының

$$\underline{v}(P)=\min\{H(P, B_1), H(P, B_2)\}$$

тиімділік көрсеткіші $H(P, B_2)$ және $H(P, B_1)$ функцияларының *төменгі орайжанауышы* болып табылатын шамасына тәуелді функцияны береді.

2×2 ойынының геометриялық шешімі

A ойыншының тиімді стратегиясын, ойынның құнын, ойынның таза стратегиялардағы төменгі және жоғарғы құндарын, ойын матрицасының ер нүктелерін және ойыншылардың доминацияланатын стратегияларын *геометриялық (графикалық) анықтаудың жалпы алгоритмі*.

Алгоритм 1

1. Абсцисса осінде бірлік A_1A_2 кесіндісін тұрғызамыз. A_1 нүктесі A_1 стратегиясын бейнелейді. Осы кесіндідегі басқа аралық нүктелер бірінші ойыншының S_A аралас стратегияларын береді. S_A мәнінен кесіндінің оң жақ шетіне дейінгі ара қашықтық – A_1 стратегиясының p_1 ықтималдығын, сол жақ шетіне дейінгі ара қашықтық – A_2 стратегиясының p_2 ықтималдығын береді.

2. A_1A_2 кесіндісінің ұштарында оған екі перпендикуляр: A_1 стратегиясына сәйкес сол жақ перпендикуляр және A_2 стратегиясына сәйкес оң жақ перпендикуляр тұрғызамыз.

3. Сол жақ перпендикулярда *A* матрицасының бірінші жолдарының a_{11} және a_{12} элементтерін белгілейміз.

4. Оң жақ перпендикулярда *A* матрицасының екінші жолының a_{21} және a_{22} элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштабтар бірдей болу керек, бірақ, [0, 1] горизонталь кесіндісінің масштабымен бірдей болуы міндетті емес.

5. Екінші индекстері бірдей элементтерді: a_{11}-ді a_{21}-мен, a_{12}-ні a_{22}-мен кесінді арқылы қосамыз. Нәтижесінде $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерін аламыз.

5.1. Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділері кемімелі емес болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділері өспелі болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

5.2. Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен төмен орналаспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын доминациялайды. Егер $a_{11}a_{21}$ кесіндісі $a_{12}a_{22}$ кесіндісінен жоғары орналасса және онымен қиылыспаса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

6. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышын табамыз.

7. Төменгі орайжанауыштың жоғарғы нүктесін табамыз.

8. [0, 1] горизонталь кесіндісіне олардың ортогональды проекциясын түсіреміз.

9. Алынған p проекциясы A ойыншының $P = (1-p, p)$ аралас стратегиясын анықтайды.

10. Орайжанауыштың перпендикулярларда жататын ең жоғарғы нүктесінің ординатасы ойынның V құнын береді.

11. Төменгі орайжанауыштың екі шетінің жоғарғысы таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

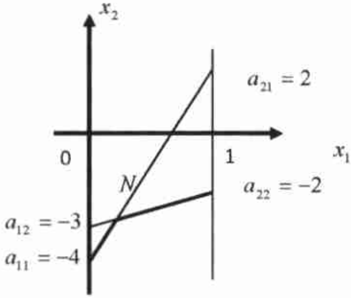
12. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің екі жоғарғы ұштарының төменгісі таза стратегиялардағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнын береді.

13. Егер элемент өзі орналасқан перпендикулярдағы кішісі және өзі орналасқан $a_{11}a_{21}$ немесе $a_{12}a_{22}$ кесіндісінің жоғарғы ұшы болса, онда бұл элемент ойынның ер нүктесі болып табылады. Бұл жағдайда, нөмірі ер нүктенің екінші индексімен бірдей болатын B ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

10.7-мысал.

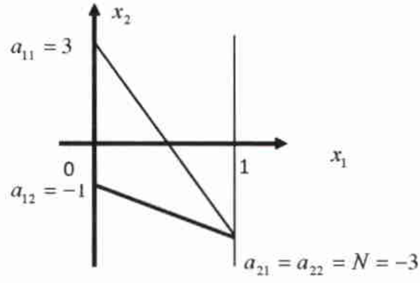
$P = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.1-суретте келтірілген. $a_{11}Na_{22}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктесі оң жақ перпендикулярда орналасқан a_{22} нүктесі. Сондықтан A ойыншының A_2=(0, 1) таза стратегиясы оның тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22} = -2$. a_{22} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады және ойынның таза стратегияда шешімі бар болады.



10.1-сурет.

$\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22} = -2$



10.2-сурет.

$\underline{v} = \overline{v} = V = a_{12} = -1$

Жауабы. $\underline{v} = \overline{v} = V = a_{22} = -2$, a_{22} элементі ойынның ер нүктесі.

10.8-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.2-суретте келтірілген. $a_{12}a_{22}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктесі – a_{12} сол жақ перпендикулярда, ал $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. A_1=(1, 0) таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. a_{12} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады. B_2 – B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $V = a_{12} = -1$.

Жауабы. $V = a_{12} = -1$, A ойыншының тиімді стратегиясы – A_1=(1, 0), B_2 – B ойыншының тиімді стратегиясы. a_{12} элементі ойынның ер нүктесі болып табылады.

10.9-мысал.

$P = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, A ойыншының тиімді стратегиясын табу керек.

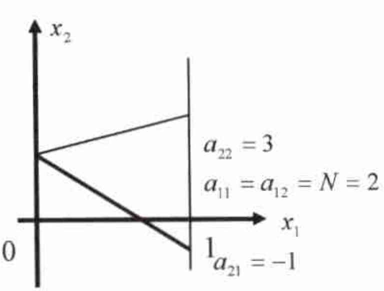
Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.3-суретте келтірілген. $a_{11}a_{21}$ төменгі орайжанауышының максимал a_{11} нүктесі де, $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің N қиылысу нүктесі де сол жақ перпендикулярда жатыр. Сондықтан A_1=(1, 0) таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. Ойынның құны $V = a_{12} = 2$. a_{11} және a_{12} нүктелері беттесетіндіктен және $a_{11} - a_{11}a_{21}$ кесіндісінің жоғарғы ұшы болғандықтан a_{11} элементі P матрицасының ер нүктесі болып табылады. a_{11} және a_{12} нүктелері беттессе де a_{12} нүктесі $a_{12}a_{22}$ элементі кесіндісінің жоғарғы ұшы болмайтындықтан, a_{12} элементін ойынның ер нүктесі деп айтуға болмайды.

Жауабы. A_1=(1, 0) таза стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. $V = a_{12} = 2$ – ойынның құны. a_{11} элементі ойынның ер нүктесі.

10.10-мысал.

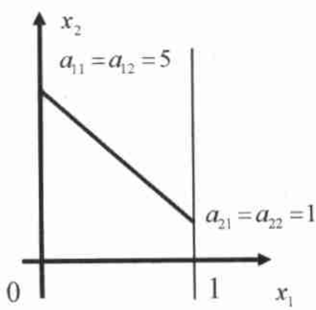
$P = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.4-суретте келтірілген. Беттесетін $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы осы кесінділермен беттеседі. Төменгі орайжанауыштың максимал нүктесі a_{11}=a_{12}, сондықтан A_1 – A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V = a_{11} = a_{12} = 5$. a_{11} және a_{12} элементтері ойынның ер нүктелері болып табылады. Бұл жағдай-



10.3-сурет.

$\underline{v} = \overline{v} = V = a_{12} = 2$



10.4-сурет.

$\underline{v} = \overline{v} = V = a_{11} = a_{12} = 5$

да B ойыншының әрбір $Q=(q_1, q_2)$ аралас стратегиясы тиімді болып табылады.

Жауабы. A_1 – A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V=a_{11}=a_{12}=5$. a_{11}, a_{12} элементтері ойынның ер нүктелері. B ойыншының әрбір $Q=(q_1, q_2)$ аралас стратегиясы тиімді.

10.11-мысал.

$P=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, A ойыншының тиімді стратегиясын табу керек.

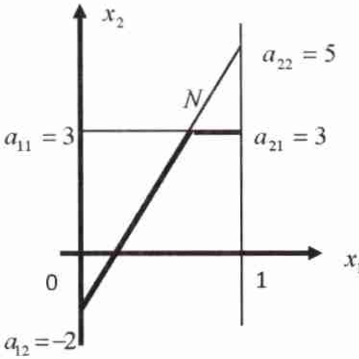
Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.5-суретте келтірілген. $a_{11}a_{21}$ кесіндісі [0, 1] горизонталь кесіндіге параллель, яғни a_{11}=a_{21}, және $a_{12}a_{22}$ кесіндісімен N нүктесінде қиылысады. [p, 1] кесіндісінің әрбір нүктесінде ең үлкен мәнді қабылдайтын $a_{12}Na_{21}$ сынығы $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы. Сондықтан, осы сынықтың максимал нүктелері [N, a_{21}] кесіндісін толтырады. a_{21} элементі берілген ойынның ер нүктесі болып табылады және A_2 стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V=a_{21}=3$. Әрбір P = (1–p, p), $p^0 \le p < 1$ аралас стратегия ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады. a_{21} элементі A матрицасының ер нүктесі болғандықтан, B_1 стратегиясы B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

Жауабы. a_{21} элементі ойынның ер нүктесі және A_2 стратегиясы A ойыншының тиімді стратегиясы. Ойынның құны $V=a_{21}=-2$. Әрбір P = (1–p, p), $p^0 \le p < 1$ аралас стратегия A ойыншының тиімді стратегиясы, B_1 стратегиясы B ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

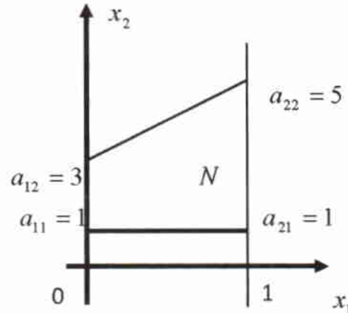
10.12-мысал.

$P=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін, ойыншылардың тиімді стратегиясын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.6-суретте келтірілген.



10.5-сурет. $\underline{v} = \bar{v} = V = a_{21} = 3$



10.6-сурет. $\underline{v} = \bar{v} = V = a_{11} = 1$

$a_{12}a_{22}$ кесіндісі $a_{11}a_{21}$ кесіндісінен жоғары орналасқан, және қиылыспайды. Ал бұл B_2 стратегиясы B_1 стратегиясымен қатаң доминацияланатынын B ойыншы үшін тиімді емес екенін білдіреді. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышы $a_{11}a_{21}$ кесіндісімен беттеседі. a_{11}=a_{21} теңдігіне байланысты [0,1] горизонталь кесіндісіне параллель, $a_{11}a_{21}$ төменгі орайжанауышының максимал нүктелер жиыны $a_{11}a_{21}$ кесіндісімен беттеседі, сондықтан A ойыншының әрбір $P = (p_1, p_2)$ стратегиясы тиімді стратегия болып табылады. $V = a_{11} = a_{21} = 1$. a_{11} және a_{21} элементтері ойынның ер нүктелері. A ойыншының тиімді стратегиясы [0,1] кесіндісімен бейнеленеді. B_1 – B ойыншының тиімді стратегиясы.

Жауабы. A ойыншының әрбір $P = (p_1, p_2)$ стратегиясы тиімді стратегия, $V = a_{11} = a_{21} = 1$. a_{11} және a_{21} элементтері ойынның ер нүктелері. B_1 – B ойыншының тиімді стратегиясы.

Жоғарыда қарастырылған алгоритм ойынның ер нүктесі болған жағдайдағы есептерді шешуге және A ойыншының ұтысын талдауға арналған. B ойыншы үшін де талдау осы бағытта жүргізіледі.

$Q = (1-q, q),\ q \in [0,1]$ аралас стратегиясының

$$\bar{v}(P) = \max\{H(A_1, Q), H(A_2, Q)\}$$

тиімді емес көрсеткіші $H(A_1, Q)$ және $H(A_2, Q)$ функцияларының *жоғаргы орайжанауышы* болып табылатын $p \in [0,1]$ ықтималдығының функциясын береді.

Ойынның ер нүктесі болмаған жағдайдағы, яғни аралас стратегиялардағы 2х2 ойынның шешімін геометриялық әдіспен шығаруды қарастырайық.

А матрицасымен берілген 2х2 ойынның *геометриялық шешімін табу алгоритмі.*

Алгоритм II

1. Абсцисса осінде A_1A_2 бірлік кесіндісін тұрғызамыз.

2. A_1A_2 кесіндісінің ұштарында оған сол жақ және оң жақ екі перпендикуляр тұрғызамыз.

3. 0 нүктесінде тұрғызылған вертикаль сандық осьтегі сол жақ перпендикулярдың бойында a_{22} элементінен басқа *А* матрицасының барлық элементтерін белгілейміз.

4. 1 нүктесінде тұрғызылған оң жақ перпендикулярдың бойында a_{11} элементінен басқа *А* матрицасының барлық элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштабтар бірдей болу керек, бірақ, [0,1] горизонталь кесіндісінің масштабымен бірдей болуы міндетті емес.

5. Сол жақ перпендикулярдағы әрбір элементті оң жақ перпендикулярдағы бір ғана индекспен айырмашылығы бар элементтермен қосып кесінді тұрғызамыз. Нәтижесінде $a_{11}a_{21}$, $a_{12}a_{22}$, $a_{11}a_{12}$, $a_{21}a_{22}$ кесінділерін аламыз.

6. $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің төменгі орайжанауышын табамыз.

7. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы *N* нүктесін табамыз.

8. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің *p* абсциссасын табамыз.

9. $P = (1-p, p)$ аралас стратегиясы *А* ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

10. $a_{11}a_{12}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділерінің жоғарғы орайжанауышын табамыз.

11. Жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі *М* нүктесін табамыз.

12. Жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі нүктесінің *q* абсциссасын табамыз.

13. $Q= (1-q, q)$ аралас стратегиясы *В* ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

14. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің ордината-

сы жоғарғы орайжанауыштың ең төменгі нүктесінің ординатасына тең және ойынның V құнын береді.

15. Осылайша геометриялық ортада ойынның $\{P, Q, V\}$ құны табылды.

16. Төменгі орайжанауыштың шеттерінің жоғарғысы таза стратегиялардағы ойынның $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

17. Жоғарғы орайжанауыштың шеттерінің (перпендикулярларда жатқан) төменгісі таза стратегиялардағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнын береді.

Егер $M = N$ болса, онда $a_{12}a_{22}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділерінің әрқайсысы a_{22} және $M = N$ екі нүктелері арқылы өтеді, демек, бұл кесінділер беттеседі, осыдан $a_{12}=a_{21}$. Егер $a_{12}=a_{21}$ болса, онда $a_{12}a_{22}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділері сияқты $a_{12}a_{22}$ және $a_{21}a_{22}$ кесінділері де беттеседі, сондықтан $M = N$.

Сонымен, жоғарыда қарастырылған талдаулардың нәтижесінде 2x2 ойында әрбір ойыншының тиімді стратегиялар жиыны не [0,1] кесіндісінің жалғыз нүктесінен, не бір шеті ғана [0,1] кесіндісінің шетімен беттесетін аралықтан, не [0,1] кесіндісімен толығымен беттесетін кесіндіден тұруы мүмкін екенін байқадық.

10.13-мысал.

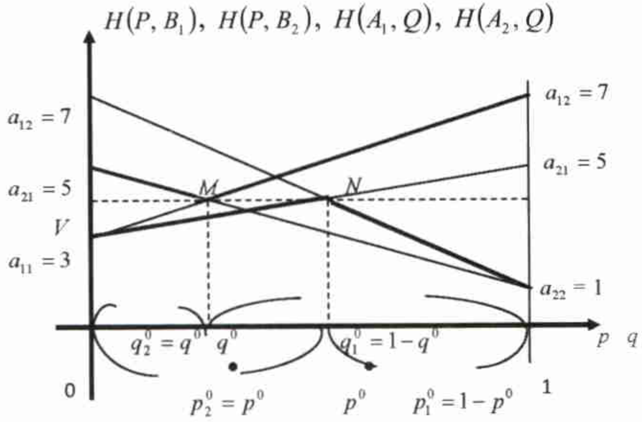
$P = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

Шығарылуы. Ойынның геометриялық интерпретациясы 10.7-суретте келтірілген.

A ойыншының тиімді стратегиясының геометриялық интерпретациясын қарастырайық.

Суреттен көріп отырғанымыздай, a_{11}, a_{21} нүктелерінің әрқайсысы сәйкес перпендикулярлармен $a_{11}a_{21}$ немесе $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің қиылысында жатыр. Егер P матрицасының a_{ij}, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$ элементін бейнелейтін нүкте өзі қиылысуында орналасқан кесіндінің төменгі ұшы және перпендикулярдың жоғарғы нүктесі болса, осы элемент ойынның ер нүктесі болады. Қарастырып отырған ойында ер нүкте жоқ.

Төменгі орайжанауыштың екі төменгі ұштарының жоғарғысы



10.7-сурет

болып табылатын нүктені бейнелейтін P матрицасының элементі таза стратегияларда ойынның төменгі құнын, жоғарғы орайжанауыштың екі жоғарғы ұштарының төменгісі болып табылатын нүктені бейнелейтін P матрицасының элементі таза стратегияларда ойынның жоғарғы құнын береді. Жоғарыда келтірілген ереже бойынша қарастырып отырған ойында ер нүкте жоқ және $\underline{v}=3$, $\overline{v}=5$.

Демек таза стратегияларда ойынның шешімі жоқ. Ойынның шешімін аралас стратегияда іздейміз.

Ойынның құнын табу үшін геометриялық әдісті қолданайық.

10.7-суреттегі N және M нүктелерінің ординаталары (өзара тең) ойынның құнын береді, ал абсциссалары сәйкес A және B ойыншылардың тиімді стратегияларын анықтайды.

N нүктесі $a_{11}a_{21}$ және $a_{12}a_{22}$ кесінділерінің қиылысында жатыр. Осы нүктенің координатасын анықтау үшін түзулердің теңдеулерін жүйенің теңдеулері ретінде қарастырып, жүйені шешеміз. Жоғарыда қарастырып кеткеніміздей бұл түзулердің теңдеулерін анықтау үшін екі нүкте арқылы өтетін түзудің теңдеуін пайдаланамыз: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$.

$a_{11}a_{21}$ түзуінің теңдеуі (a_{11} ұшының координатасы (0,3), a_{21} ұшының координатасы (1, 5)):

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-3}{5-3} \Rightarrow x=\frac{y-3}{2} \Rightarrow 2x=y-3;$$

$a_{12}a_{22}$ түзуінің теңдеуі (a_{12} ұшының координатасы (0, 7), a_{22} ұшының координатасы (1, 1)):

$$\frac{x-0}{1-0}=\frac{y-7}{1-7} \Rightarrow x=\frac{y-7}{-6} \Rightarrow -6x=y-7;$$

$$\begin{cases} 2x = y-3 \\ -6x = y-7 \end{cases} \Rightarrow x=0{,}5;\ y=4,$$

яғни $N(0{,}5;\ 4)$.

Сонымен, $p_1^0=0{,}5$, $p_2^0=1-p_1^0=1-0{,}5=0{,}5$.

$S_A^*=(0{,}5;\ 0{,}5)$ – тиімді стратегия; $V=4$ – ойынның құны.

Осылайша M нүктесінің координаталарын анықтай отырып B ойыншының тиімді стратегиясын анықтауға болады.

$$M(0{,}25;\ 4).\ q_2^0=0{,}25,\ q_1^0=1-0{,}25=0{,}75.$$

$S_B^*=(0{,}25;\ 0{,}75)$ – тиімді стратегия; $V=4$ – ойынның құны.

Жауабы. $S_A^*=(0{,}5;\ 0{,}5)$, $S_B^*=(0{,}25;\ 0{,}75)$ – сәйкес A және B ойыншылардың тиімді стратегиялары; $V=4$ – ойынның құны.

10.8. 2*xn* матрицалық ойындардың геометриялық шешімі

A ойыншының A_1, A_2 – 2 таза стратегиясы, B ойыншының $B_1, B_2, ..., B_n$ – n таза стратегиясы бар 2*xn* ойынды қарастырайық.

$$\begin{array}{ccc} & & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & \dots & B_n \end{array} \\ A= & \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \end{pmatrix}. \end{array}$$

$P=(p_1, p_2)$ стратегиясының тиімділік көрсеткіші мына формуламен есептеледі:

$$\underline{v}(P)=\min_{1\le j\le n} H(P, B_j)=\min_{1\le j\le n}(p_1a_{1j}+p_2a_{2j}).$$

Егер $p_2=p$ болса, онда $p_1+p_2=1$ болғандықтан $p_1=1-p$. Сонда, $\underline{v}(P)$ мына формуламен өрнектеледі:

$$\underline{v}(P)=\min_{1\le j\le n}\left((1-p)a_{1j}+pa_{2j}\right)=\min_{1\le j\le n}\left((a_{2j}-a_{1j})p+a_{1j}\right). \quad (10.27)$$

Сонымен, $\underline{v}(P)$ ықтималдығы $p\in[0,1]$ болатын n сызықтық $H(P,B_j)=(a_{2j}-a_{1j})p+a_{1j}$, $j=1,2,\ldots,n$ функцияның *төменгі орайжанауышын* береді, олардың әрқайсысының графигі осы сызықтық функцияның $k_j=a_{2j}-a_{1j}$ бұрыштық коэффициентінің оң, теріс немесе нөлге тең болуына тәуелді өспелі (оң көлбеу), кемімелі (теріс көлбеу) немесе горизонталь кесінді болады.

$$\max_{P\in S_A}\underline{v}(P)=\underline{v}(P^*)=\min_{1\le j\le n}\left((a_{2j}-a_{1j})p^*+a_{1j}\right), \quad (10.28)$$

теңдігін қанағаттандыратын $P^*=(1-p^*, p^*)$ стратегиясы тиімді (матрицалық ойындардың фон Нейманның негізгі теоремасы бойынша) болып табылады, яғни $\underline{v}(P)$ төменгі орайжанауыштың $p^0\in[0,1]$ максимал (ең жоғарғы) нүктесінің абсциссасы A ойыншы өзінің таза A_1 стратегиясын $1-p^*$ ықтималдықпен, A_1 стратегиясын p^* ықтималдықпен болатындай кездейсоқ таңдайтын $P^*=(1-p^*, p^*)$ тиімді стратегиясын анықтайды, мұндағы S_A – A ойыншының барлық аралас (олардың ішінде таза стратегия да бар) стратегиялар жиыны.

Матрицалық ойындардың негізгі фон Нейман теоремасы бойынша ойынның құны

$$V=\underline{v}(P^*), \quad (10.29)$$

яғни V ойынның құны төменгі орайжанауыштың максимал нүктесінің ординатасына тең.

Сонымен, A ойыншының тиімді стратегиясы мен ойын құнын табудың геометриялық (графикалық) алгоритмін жазайық.

Алгоритм «А»

1. [0,1] горизонталь кесіндісін қарастырамыз.

2. [0,1] кесінділерінің ұштары арқылы сол жақ және оң жақ екі перпендикуляр жүргіземіз.

3. 0 нүктесінен [0,1] кесіндісімен қиылысқандағы вертикаль сандық осьтің бойында жататын сол жақ перпендикулярдың бойынан A матрицасының бірінші жолының барлық элементтерін белгілейміз.

4. 1 нүктесінен [0,1] кесіндісімен қиылысқандағы (вертикаль сандық осьтегі сияқты) жүргізілген оң жақ перпендикулярдың бойынан A матрицасының екінші жолының барлық элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштаб бірдей болу керек, бірақ [0,1] горизонталь кесіндінің масштабымен бірдей болу міндетті емес.

5. A матрицасының j-ші, $j = 1, 2, \ldots, n$ бағанында орналасқан a_{1j} және a_{2j} элементтерін бейнелейтін нүктелердің әрбір жұбын $a_{1j}a_{2j}$ кесіндісімен қосамыз.

Осылайша, n сызықтық функцияның графигін беретін

$$H(P, B_j) = (a_{2j} - a_{1j})p + a_{1j},\ p \in [0, 1], \qquad (10.30)$$

кесінділер тұрғызылады.

6. Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ барлық кесінділер кемімелі емес (теріс емес көлбеуі бар) болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ барлық кесінділер өспелі (оң көлбеуі бар) болса, онда A_2 стратегиясы A_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

7. Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ барлық кесінділер өспелі емес (оң емес емес көлбеуі бар) болса, онда A_1 стратегиясы A_2 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ барлық кесінділер кемімелі (теріс көлбеуі бар) болса, онда A_1 стратегиясы A_2 стратегиясын қатаң доминациялайды.

8. Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ кесіндісінен төмен емес орналасса, онда B_{j_2} стратегиясы B_{j_1} стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ кесіндісінен жоғары орналасса, онда B_{j_2} стратегиясы B_{j_1} стратегиясын қатаң доминациялайды.

9. Дербес жағдайда кесінді болуы мүмкін, жалпы жағдайда жоғары дөңес қисықты беретін (10.30) кесінділер үйірінің (10.27) төменгі орайжанауышын табамыз.

10. Төменгі орайжанауыштың максимал (ең жоғарғы) нүктесін (немесе нүктелерін) табамыз.

11. Осы нүктенің p^* абсциссасы ((10.28) теңдікті қанағаттандыратын) A ойыншының $P^* = (1-p^*, p^*)$ тиімді аралас стратегиясындағы таза A_2 стратегиясын таңдау ықтималдығы болып табылады.

12. Төменгі орайжанауыштың ең жоғарғы нүктесінің ординатасы V ойынның құнын береді ((10.29) қараңыз).

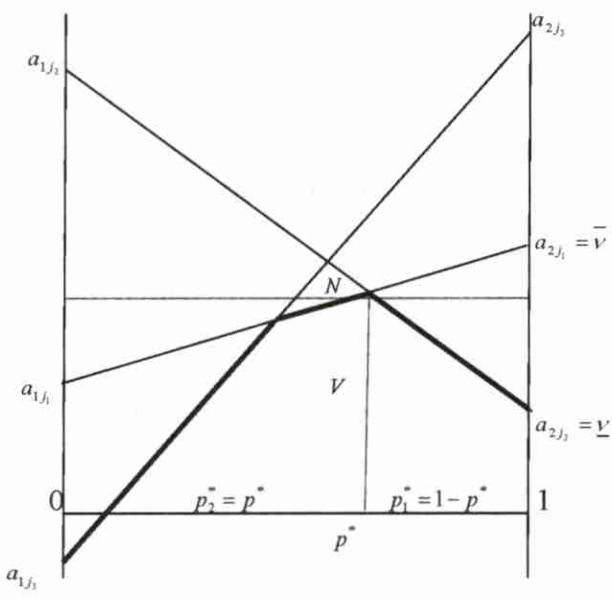
13. Төменгі орайжанауыштың перпендикулярларда жатқан екі шетінің жоғарғысы ойынның таза стратегиялардағы $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

14. $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің шеттерінің жоғарғыларының төменгісі ойынның таза стратегиялардағы $\bar{v}$ жоғарғы құнын береді.

15. Өзі орналасқан перпендикулярда төменгі нүкте болып табылатын және кесіндінің жоғарғы шеті болып табылатын A матрицасының элементі ойынның ер нүктесі болып табылады.

Бұл жағдайда нөмірі ер нүктенің екінші индексімен беттесетін B ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

10.8-суретте $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ – n кесінділерінен төменгі орайжанауышты анықтауға қатысты үшеуі көрсетілген; N – осы



10.8-сурет

орайжанауыштың максимал нүктесі; p^* – N нүктесінің абсциссасы; демек, $P^* = (1-p^*, p^*)$ – A ойыншының тиімді аралас стратегиясы; V ойын құны N нүктесінің ординатасына тең; таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны: $\underline{v} = a_{2j_2}$; таза стратегиялардағы ойынның жоғарғы құны: $\overline{v} = a_{2j_1}$; суреттен көрініп отырғандай $\underline{v} < V < \overline{v}$.

Теорема 10.12. Егер $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының B ойыншының B_j, $j = 1, 2, \ldots, n$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал N нүктесі арқылы қандай да бір $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, $j_1, j_2 \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ кесінділері өтсе, онда N нүктесінің абсциссасы

$$p_2^* = p^* = \frac{a_{1j_1} - a_{1j_2}}{\left(a_{1j_1} + a_{2j_2}\right) - \left(a_{1j_2} + a_{2j_1}\right)} \tag{10.31}$$

және демек,

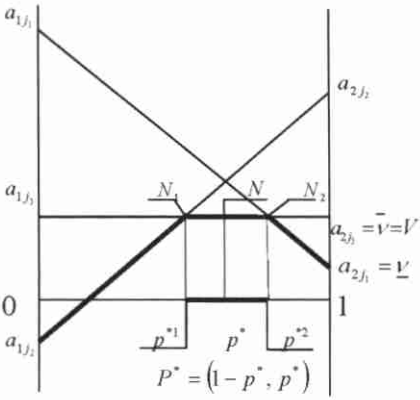
$$p_1^* = 1 - p_2^* = 1 - p^* = \frac{a_{2j_2} - a_{2j_1}}{\left(a_{1j_1} + a_{2j_2}\right) - \left(a_{1j_2} + a_{2j_1}\right)}, \tag{10.32}$$

ал ойынның құны

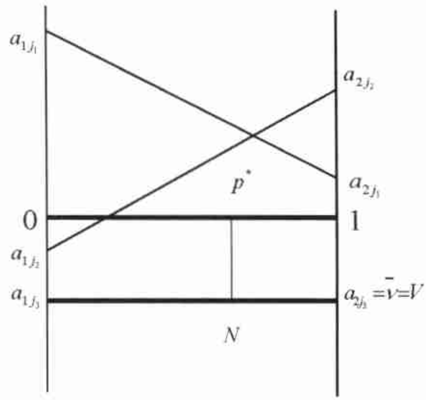
$$V = \frac{a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} - a_{1j_2} \cdot a_{2j_1}}{\left(a_{1j_1} + a_{2j_2}\right) - \left(a_{1j_2} + a_{2j_1}\right)}. \tag{10.33}$$

(10.31), (10.32) және (10.33) формулаларда $j_1 = 1$ және $j_2 = 2$ болған кезде сәйкес (10.24) қатынасының екінші формуласын, (10.24) қатынасының бірінші формуласын және (10.25) қатынасын аламыз.

Біз төменгі орайжанауыштың N максимал нүктесі арқылы бірден артық кесінді өтетінін қарастырдық (10.8-сурет). Практикада N нүктесі арқылы бір ғана кесінді өтетін жағдай да кездеседі. 10.9, 10.10, 10.11 және 10.12-суреттерде төменгі орайжанауыштың N максимал нүктесі арқылы жалғыз ғана $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі өтеді. Егер $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі $p^* \in [0, 1]$ кесіндісіне параллель болса, онда максимал нүктелері қандай да бір аралықты толықтырады. 10.9-суретте төменгі орайжанауыштың максимал нүктесі $[a_{1j_3}, a_{2j_3}]$ кесіндісінің бөлігін, атап айтқанда, $[N_1, N_2]$ аралығын, 10.10-суретте



10.9-сурет



10.10-сурет

[a_{1j_3}, a_{2j_3}] кесіндісін толығымен толықтырады. Сондықтан, 10.9-суретте A ойыншының тиімді стратегиялар жиыны

$$S_A^O = \left\{P^* = \left(1-p^*, p^*\right): p^{*1} \le p^* \le p^{*2}\right\}$$

мұндағы p^{*1} және p^{*2} төменгі орайжанауыштың сәйкес N_1 және N_2 шеттік максимал нүктелерінің абсциссалары. S_A^O жиыны $\left[p^{*1}, p^{*2}\right]$ кесіндісімен өрнектеледі.

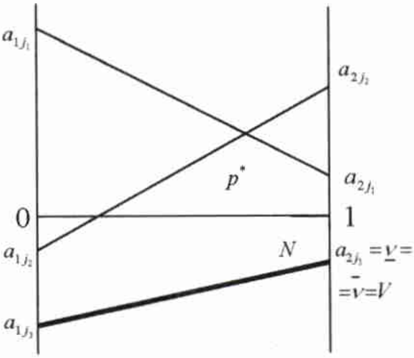
10.10-суретте A ойыншының тиімді стратегиялар жиыны оның барлық стратегиялар жиынымен беттеседі:

$$S_A^O = S_A$$

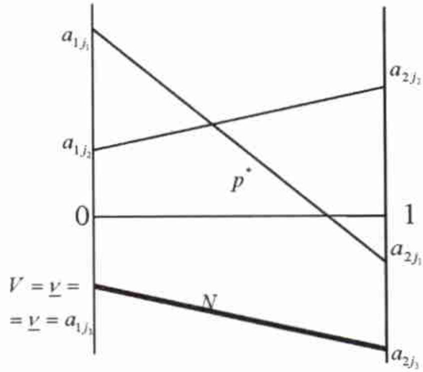
және [0,1] кесіндісімен өрнектеледі; дербес жағдайда, оның A_1 және A_2 таза стратегиялары да тиімді болып табылады.

10.11-суретте $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісі [0,1] кесіндісіне параллель емес және оң көлбеу болғандықтан, жалғыз N максимал нүкте оң жақ перпендикулярда жатады. Сондықтан, A ойыншының A_2 таза стратегиясы жалғыз тиімді стратегия болып табылады.

Егер $a_{1j_3}a_{2j_3}$ кесіндісінің теріс көлбеуі бар болса, онда жалғыз N максимал нүктесі сол жақ перпендикулярда жатады және A_1 таза стратегиясы A ойыншының жалғыз тиімді стратегиясы болып табылады. 10.9-суретте A ойыншының S_A^O тиімді стратегиялар жиынын бейнелейтін $\left[p^{*1}, p^{*2}\right]$ кесіндісі [0,1] кесіндісінің ішінде



10.11-сурет



10.12-сурет

жатқандықтан ер нүкте жоқ. Осы себеппен барлық тиімді стратегиялар аралас стратегиялар болып табылады. Ойынның V құны таза стратегиядағы ойынның $\overline{v}$ жоғарғы құнымен беттеседі.

10.10 және 10.11-суреттерде a_{2j_3} элементі, 10.12-суретте a_{1j_3} элементі ер нүкте болып табылады.

Теорема 10.13. $a_{1j}a_{2j}$, $j=1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының B ойыншының B_j, $j=1, 2, \ldots, n$ таза стратегияларымен жасақталатын максимал N нүктесі арқылы қандай да бір $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$, $j_1 \neq j_2$, j_1, $j_2 \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}$ кесінділері өтсін. B ойыншының $Q^*=\left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ аралас стратегиясы тиімді болу үшін $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулері әр түрлі болу керек, мұндағы

$$q_{j_1}^*=\frac{-\left(a_{2j_2}-a_{1j_2}\right)}{\left(a_{2j_1}-a_{1j_1}\right)-\left(a_{2j_2}-a_{1j_2}\right)}, \tag{10.34}$$

$$q_{j_2}^*=1-q_{j_1}^*=1-q_{j_1}^*=\frac{a_{2j_1}-a_{1j_1}}{\left(a_{2j_1}-a_{1j_1}\right)-\left(a_{2j_2}-a_{1j_2}\right)}, \tag{10.35}$$

$$q_j=0,\ j\in\{1, 2, \ldots, \mathrm{n}\}\setminus\{j_1, j_2\}. \tag{10.36}$$

$j_1=1$ және $j_2=2$ болған кезде (10.34) формула (10.26) қатынасының бірінші формуласына, ал (10.35) формула (10.26) қатынасының екінші формуласына айналады.

Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болса, онда B ойыншының B_{j_2} стратегиясы тиімді.

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің бұрыштық коэффициенттері

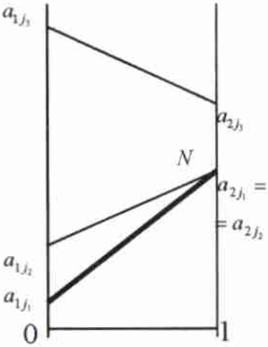
$$k_{j_1}=a_{2j_1}-a_{1j_1},\ k_{j_2}=a_{2j_2}-a_{1j_2}.$$

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулері бірдей болғандықтан олар не екеуі де оң, не екеуі де теріс, не екеуі де нөлге тең болады. Осы кездегі барлық мүмкін болатын жағдай 10.1-кестеде келтірілген.

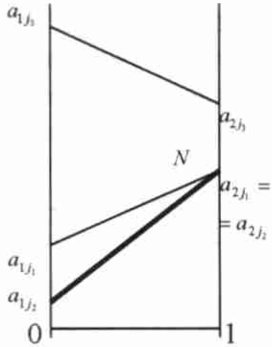
10.1-кесте

№	k_{j_1}	k_{j_2}	$-k_{j_2}$	$k_{j_1}-k_{j_2}$	$q^*_{j_1}$
1	>0	>0	<0	>0	<0
2	>0	>0	<0	<0	>1
3	>0	>0	<0	=0	=-∞
4	<0	<0	>0	<0	<0
5	<0	<0	>0	>0	>1
6	<0	<0	>0	=0	=+∞
7	=0	=0	=0	=0	=0/0

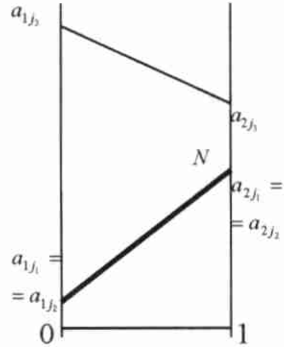
10.1-кестеде келтірілген 1-7 жағдайлардың геометриялық интерпретациясы сәйкес 10.13-10.19-суреттерде бейнеленген.



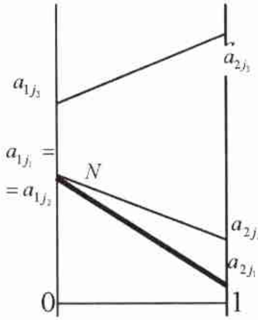
10.13-сурет



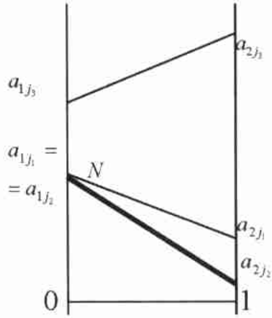
10.14-сурет



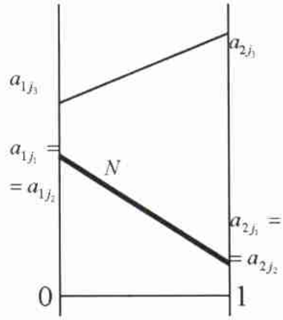
10.15-сурет



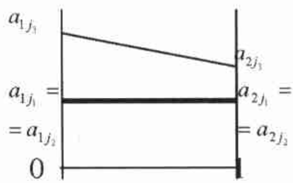
10.16-сурет



10.17-сурет



10.18-сурет



10.19-сурет

10.1-кестенің соңғы бағаны ($q^*{}_{j_1}$)

$$q^*{}_{j_1} = \frac{-k_{j_2}}{k_{j_1} - k_{j_2}}$$

формуласының көмегімен толтырылады, және кестеден көріп отырғанымыздай $q^*{}_{j_1}$ ықтималдық бола алмайды.

$a_{1j_1}a_{2j_1}$ және $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің көлбеулері әр түрлі болатын жағдайды қарастырайық. Бұл кездегі барлық мүмкін болатын жағдайдың саны 6-ға тең (10.2-кестеде келтірілген).

10.2-кесте

№	k_{j_1}	k_{j_2}	$-k_{j_2}$	$k_{j_1} - k_{j_2}$	$q^*{}_{j_1}$
1	>0	<0	>0	>0	>0
2	>0	=0	=0	$=k_{j_1}>0$	=0
3	<0	>0	<0	<0	>0
4	<0	=0	=0	$=k_{j_1}<0$	=0
5	=0	>0	<0	$=-k_{j_2}<0$	=1
6	=0	<0	>0	$=-k_{j_2}>0$	=1

(10.15), (10.16), (10.17) формулаларының көмегімен $a_{1j}a_{2j}$, $j=1, 2, \ldots, n$ кесіндісінің төменгі орайжанауышының максимал N нүктесі арқылы көлбеуі әр түрлі болатын олардың (кесіндінің) тек қана екеуі өтетін жағдайдағы B ойыншының тиімді стратегиясын табуға болады.

Максимал N нүктесі арқылы бірдей көлбеуі бар екі кесінді өтетін барлық мүмкін болатын жағдай 10.1-кестеде келтірілген және 10.13-10.19 суреттерде геометриялық бейнеленген. 10.1-кестедегі 1, 2, 3 жағдайларда және оларға сәйкес 10.13, 10.14, 10.15-суреттерде $a_{2j_1}=a_{2j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады; ал, 10.1-кестедегі 4, 5, 6 жағдайларда және оларға сәйкес 10.16, 10.17, 10.18-суреттерде $a_{1j_1}=a_{1j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады және 10.1-кестедегі 7-жағдайда, 10.19-суретте $a_{1j_1}=a_{1j_2}=a_{2j_1}=a_{2j_2}$ элементтері ер нүктелері болып табылады. Сондықтан, 10.1-кестедегі барлық жағдайда (1-7) B_{j_1} және B_{j_2} стратегиялары тиімді болып табылады.

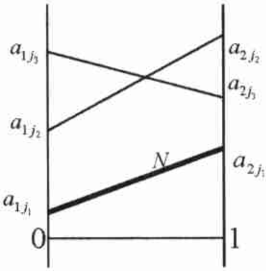
Енді $a_{1j}a_{2j}$, $j=1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының максимал N нүктесі арқылы олардың $a_{1j_1}a_{2j_1}$ біреуі өтетін жағдайды қарастырайық. Егер осы кесіндінің көлбеуі нөлден өзге болса (егер ол горизонталь болмаса), онда N нүктесі [0,1] кесіндісіне перпендикулярлардың біреуінде жатады. 10.20-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің оң көлбеуі бар және N нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. Бұл жағдайда a_{2j_1} элементі ер нүкте болып табылады. 10.21-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің көлбеуі теріс; N нүктесі сол жақ перпендикулярда жатыр; a_{1j_1} элементі ер нүкте. 10.22-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің әрбір нүктесі максимал және $a_{1j_1}=a_{2j_1}$ элементтері ер нүкте болып табылады.

Сондықтан, 10.20, 10.21, 10.22-суреттерде бейнеленген барлық үш жағдайда да стратегиясы тиімді болып табылады.

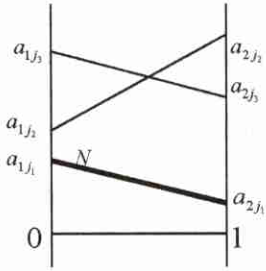
Салдар 10.1 (10.13-теоремадан алынады). Егер 10.13-теореманың шартындағы $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болмаса, яғни нөлдік емес көлбеуі бар болса, онда B ойыншының B_{j_1} таза стратегиясы белсенді болып табылады.

Осылайша, егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болмаса, онда ойыншының B_{j_2} таза стратегиясы белсенді болып табылады.

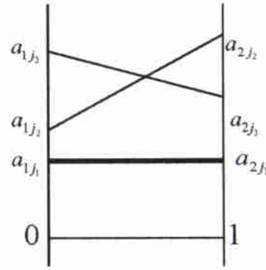
Сонымен, егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ мен $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесінділерінің біреуі де горизонталь болмаса, онда B_{j_1} мен B_{j_2} стратегиялары белсенді



10.20-сурет



10.21-сурет



10.22-сурет

болып табылады.

Салдар 10.2 (10.13-теоремадан алынады). Егер 10.13-теореманың шартындағы $a_{1j_2}a_{2j_2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда *B* ойыншының B_{j_1} стратегиясы тиімді.

Егер $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісі горизонталь болса, онда *B* ойыншының B_{j_2} стратегиясы тиімді.

(10.34), (10.35), (10.36) формулаларының көмегімен $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ кесіндісінің төменгі орайжанауышының *N* максимал нүктесі арқылы әр түрлі көлбеудегі олардың екеуі өтетін жағдайдағы *B* ойыншының тиімді стратегиясын табуға болады.

Енді $a_{1j}a_{2j}$, $j = 1, 2, \ldots, n$ кесінділерінің төменгі орайжанауышының *N* максимал нүктесі арқылы олардың $a_{1j_1}a_{2j_1}$ біреуі өтетін жағдайды қарастырайық. Егер осы кесіндінің көлбеуі нөлден өзге болса (егер ол горизонталь болмаса), онда *N* нүктесі [0,1] кесіндісіне перпендикулярлардың біреуінде жатады. 10.20-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің оң көлбеуі бар және *N* нүктесі оң жақ перпендикулярда жатыр. Бұл жағдайда a_{2j_1} элементі ер нүкте болып табылады. 10.21-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің көлбеуі теріс; *N* нүктесі сол жақ перпендикулярда жатыр; a_{1j_1} элементі ер нүкте. 10.22-суретте $a_{1j_1}a_{2j_1}$ кесіндісінің әрбір нүктесі максимал және $a_{1j_1} = a_{2j_1}$ элементтері ер нүкте болып табылады

Сондықтан, 10.20, 10.21, 10.22-суреттерде бейнеленген барлық үш жағдайда да B_{j_1} стратегиясы тиімді болып табылады.

Осы тақырыптағы 2*xn* ойынына жүргізілген талдаудан *A* және *B* ойыншыларының әрқайсысының екіден артық емес таза стратегиясы бар тиімді стратегиясының болатыны алынды.

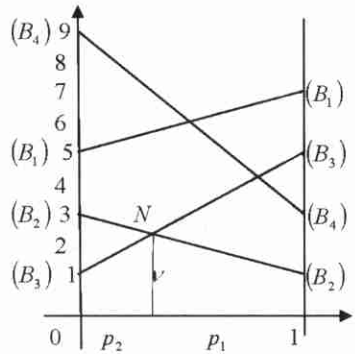
10.14-мысал.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ A = \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 & 9 \\ 7 & 1 & 5 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ұтыс матрицасымен берілген ойынның шешімін табу керек.

Шығарылуы. $\underline{v} = \max(1, 1) = 1$; $\overline{v} = \min(7, 3, 5, 9) = 3$; $\underline{v} \neq \overline{v}$; $1 < V < 3$.

Ойынның ер нүктесі жоқ. Сондықтан ойынның тиімді шешімін аралас стратегиялар облысынан іздейміз. Жазықтықта екінші ойыншының стратегияларына сәйкес кесінділерді тұрғызамыз.



A алгоритмін пайдаланып, есепті талдайық.

B_1B_1 кесіндісі B_3B_3 кесіндісінен (өспелі, оң көлбеуі бар) жоғары жатқандықтан B_3 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды.

B_4B_4 кесіндісі B_2B_2 кесіндісінен (кемімелі, теріс көлбеуі бар) жоғары жатқандықтан B_2 стратегиясы B_4 стратегиясын қатаң доминациялайды. Яғни екінші ойыншыға B_1 және B_4 стратегияларын ұстаған қолайлы емес, сондықтан оларды қолдану ықтималдығы нөлге тең: $q_1 = 0$, $q_4 = 0$.

Доминациялау принципін пайдалана отырып берілген ұтыс матрицасын редуциялау нәтижесінде 2×2 ұтыс матрицасын аламыз:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$$

Алынған 2×2 ойынды өзімізге белгілі тәсілдердің біреуімен шешіп мына шешімді аламыз:

$$p_1 = \frac{2}{3};\ p_2 = \frac{1}{3};\ q_2 = \frac{2}{3};\ q_3 = \frac{1}{3}.\ V = \frac{7}{3}.$$

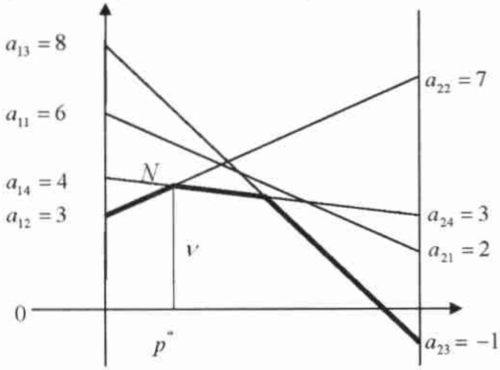
Жауабы. Ойыншылардың тиімді аралас стратегиялары:

$p\left(\frac{2}{3};\frac{1}{3}\right)$; $q\left(0;\frac{2}{3};\frac{1}{3};0\right)$. Ойынның құны: $V=\frac{7}{3}$.

10.15-мысал.

$$A=\begin{array}{c c} & \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & 4 \\ 2 & 7 & -1 & 3 \end{pmatrix} \end{array}$$

ұтыс матрицасымен берілген ойынның шешімін табу керек.



Шығарылуы. A алгоритмі бойынша берілген ойынның геометриялық бейнесін тұрғызамыз.

Кесінділердің төменгі орайжанауышы қалыңдатылып боялған. Оның максимал нүктесі – N. N нүктесінің абсциссасын табу үшін қиылысуында осы нүкте жатқан екі түзуді жүйе ретінде шешеміз.

Немесе (10.31) формулада $j_1=2$ және $j_2=4$ мәндерінде

$$p_2^*=p^*=\frac{a_{12}-a_{14}}{(a_{12}+a_{24})-(a_{14}+a_{22})}=\frac{3-4}{6-11}=\frac{1}{5}.$$

мәнін аламыз. Осыдан

$$p_1^*=1-p_2^*=\frac{4}{5}.$$

(10.33) формула бойынша ойынның құны

$$V=\frac{a_{12}\cdot a_{24}-a_{14}\cdot a_{22}}{(a_{12}+a_{24})-(a_{14}+a_{22})}=\frac{3\cdot 3-4\cdot 7}{6-11}=\frac{19}{5}.$$

Төменгі орайжанауыштың перпендикулярлардағы екі төменгі мәндердің (a_{12} = 3 және a_{23} = –1) жоғарғысы a_{12} = 3, сондықтан таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны $\underline{v}=a_{12}=3$.

Жоғарғы ұштардың ($a_{13} = 8$, $a_{11} = 6$, $a_{14} = 4$, $a_{22} = 7$) арасындағы ең төменгі нүкте $a_{14} = 4$. Сондықтан таза стратегиялардағы ойынның жоғарғы құны $\overline{v} = a_{14} = 4$.

Сонымен, $\underline{v} = 3 < V = \frac{19}{5} < \overline{v} = 4$. Ойында ер нүкте жоқ.

Жауабы. $P^* = \left(\frac{4}{5}, \frac{1}{5}\right)$, $V = \frac{19}{5}$.

10.9. *mx2* матрицалық ойындардың геометриялық шешімі

A ойыншының $A_1, A_2, ..., A_m$ – *m* таза стратегиясы, *B* ойыншының B_1, B_2 – екі таза стратегиясы бар *mx2* ойынды қарастырайық.

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ \cdots \\ A_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix} \end{array}$$

B ойыншының $Q = (q_1, q_2)$, $q_1 \geq 0$, $q_2 \geq 0$, $q_1 + q_2 = 1$ стратегиясының $\overline{v}(Q)$ тиімділік емес көрсеткіші мына формуламен өрнектеледі:

$$\overline{v}(Q) = \max_{1 \leq i \leq m} H(A_i, Q) = \max_{1 \leq i \leq m} (q_1 a_{i1} + q_2 a_{i2}).$$

Егер $q_2 = q$ белгілеуін енгізсек, онда $q_1 = 1 - q$ және

$$\overline{v}(Q) = \max_{1 \leq i \leq m} ((1 - q) a_{i1} + q a_{i2}) = \max_{1 \leq i \leq m} ((a_{i2} - a_{i1}) q + a_{i1}). \quad (10.37)$$

Сонымен, *Q* стратегиясының $\overline{v}(Q)$ тиімділік емес көрсеткіші $q \in [0, 1]$ ықтималдығына тәуелді, $H(A_i, Q) = ((a_{i2} - a_{i1}) q + a_{i1})$, $i = 1, 2, \ldots, \ldots m$ – *m* сызықтық функцияның *жоғарғы орайжанауышы* болып табылады, және әрқайсысының графигі осы функцияның $k_i = a_{i2} - a_{i1}$ бұрыштық коэффициентінен тәуелді белгілі бір көлбеудегі кесіндіні береді.

Егер $Q^* = (1-q^*, q^*)$ стратегиясы

$$\min_{Q \in S_B} \bar{v}(Q) = \bar{v}(Q^*) \leq \max_{1 \leq i \leq m}((a_{i2} - a_{i1})q^* + a_{i1}) \qquad (10.38)$$

теңсіздігін қанағаттандырса, онда негізгі фон Нейман теоремасы бойынша ол тиімді болып табылады, мұндағы, $S_B - B$ ойыншының барлық аралас стратегиялар жиыны. Сонымен, $q^* \in [0,1]$ абсциссасы $\bar{v}(Q)$ жоғарғы орайжанауыштың минимал (ең төменгі) нүктесі $Q^* = (1-q^*, q^*)$ тиімді стратегиясын анықтайды, бұл стратегия бойынша B ойыншы сәйкес $1-q^*$ және q^* ықтималдықтарымен өзінің B_1 мен B_2 таза стратегияларын кездейсоқ таңдайды.

Фон Нейман теоремасы бойынша

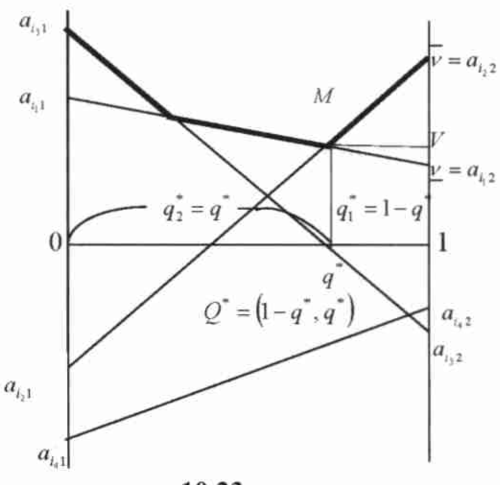
$$V = \bar{v}(Q^*),$$

яғни V ойынның құны жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесінің ординатасына тең.

Енді осыларды ескере отырып, B ойыншының тиімді стратегиялары мен ойынның V құнын (10.23-сурет) геометриялық табудың «B» алгоритмін қарастырайық.

Алгоритм «B»

1. [0,1] горизонталь кесіндісін қарастырамыз.
2. [0,1] кесінділерінің ұштары арқылы екі: сол жақ және оң жақ перпендикуляр жүргіземіз.
3. 0 нүктесінен [0,1] кесіндісімен қиылысқандағы вертикаль сандық остің бойында жататын сол жақ перпендикулярдың бойынан A матрицасының бірінші бағанының барлық элементтерін белгілейміз.
4. 1 нүктесінен [0,1] кесіндісімен қиылысқандағы (вертикаль сандық



10.23-сурет

осьтегі сияқты) жүргізілген оң жақ перпендикулярдың бойынан A матрицасының екінші бағанының барлық элементтерін белгілейміз.

Ескерту. Сол жақ және оң жақ перпендикулярлардағы масштаб бірдей болу керек, бірақ [0,1] горизонталь кесіндінің масштабымен бірдей болу міндетті емес.

5. A матрицасының i-ші, $i = 1, 2, \ldots, m$ жолында орналасқан a_{i1} және a_{i2} элементтерін бейнелейтін нүктелердің әрбір жұбын $a_{i1}a_{i2}$ кесіндісімен қосамыз, нәтижесінде келесі m-сызықтық функциялардың графигін беретін m кесіндіні аламыз:

$$H(A_i, Q) = (a_{i2} - a_{i1})q + a_{i1},\ q \in [0, 1],\ i = 1, 2, \ldots, m. \quad (10.39)$$

6. Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ барлық кесінділердің теріс емес, яғни оң немесе нөлдік көлбеуі (басқаша айтқанда, барлық $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділері – кемімелі емес) бар болса, онда B_1 стратегиясы B_2 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ барлық кесінділердің оң көлбеуі бар, яғни өспелі болса, онда B_1 стратегиясы B_2 стратегиясын қатаң доминациялайды

7. Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ барлық кесінділердің оң емес, яғни теріс немесе нөлдік көлбеуі (басқаша айтқанда, барлық $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділері – өспелі емес) бар болса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ барлық кесінділердің теріс көлбеуі бар, яғни кемімелі болса, онда B_2 стратегиясы B_1 стратегиясын қатаң доминациялайды

8. Егер $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ кесіндісінен төмен емес орналасса, онда A_{i_1} стратегиясы A_{i_2} стратегиясын доминациялайды.

Егер $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ кесіндісінен жоғары орналасса, онда A_{i_1} стратегиясы A_{i_2} стратегиясын қатаң доминациялайды.

9. Дербес жағдайда кесінді де болуы мүмкін, жалпы жағдайда төмен дөңес қисықты беретін (10.39) кесінділер үйірінің (10.37) жоғарғы орайжанауышын табамыз.

10. Жоғарғы орайжанауыштың минимал (ең төменгі) нүктесін (нүктелерін) табамыз.

11. Минимал нүктенің q^* абсциссасы ((10.38) теңдікті қанағаттандыратын) B ойыншының $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ тиімді аралас стратегиясындағы таза B_2 стратегиясын таңдау ықтималдығы болып табылады.

12. Жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесінің ординатасы V ойынның құнын береді.

13. $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділер шеттерінің төменгілерінің ішіндегі ең жоғарғысы ойынның таза стратегиялардағы $\underline{v}$ төменгі құнын береді.

14. Жоғарғы орайжанауыштың шеттерінің төменгісі (перпендикулярларда жатқан) ойынның таза стратегиялардағы $\overline{v}$ жоғарғы құны болып табылады.

15. Суретте өзі орналасқан перпендикулярда кесіндінің төменгі шеті болып табылатын және перпендикулярдағы жоғарғы нүктемен берілген A матрицасының элементі ойынның ер нүктесі болып табылады. Бұл жағдайда нөмірі ер нүктенің бірінші индексімен беттесетін A ойыншының таза стратегиясы тиімді болып табылады.

10.23-суретте $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ – m кесінділерінен $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$, $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $a_{i_3 1}a_{i_3 2}$, $a_{i_4 1}a_{i_4 2}$ төртеуі көрсетілген, олардың алғашқы үшеуі жоғарғы орайжанауышты анықтауға қатысты. M нүктесі – осы жоғарғы орайжанауыштың минимал нүктесі; q^* – M нүктесінің абсциссасы. Сондықтан, $Q^* = (1 - q^*, q^*)$ – B ойыншының тиімді аралас стратегиясы. M нүктесінің ординатасы V ойын құны. Таза стратегиялардағы ойынның төменгі құны $\underline{v} = a_{i_1 2}$, ал жоғарғы құны $\overline{v} = a_{i_2 2}$.

$a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділерінің арасында оң және теріс көлбеулері (мысалы, $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесіндісінің оң көлбеуі, ал $a_{i_3 1}a_{i_3 2}$ кесіндісінің теріс көлбеуі) бар кесінділер болғандықтан, B_2 стратегиясы доминацияламайды және B_1 стратегиясымен доминацияланбайды. $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ және $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, кесінділері $a_{i_4 1}a_{i_4 2}$ кесіндісінен жоғары орналасқандықтан, A_{i_1} және A_{i_2} стратегияларының әрқайсысы A_{i_4} стратегиясын қатаң доминациялайды.

Теорема 10.14 (*В ойыншының тиімді стратегиясы мен ойынның құны туралы*). Егер $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділерінің жоғарғы орайжанауышының A ойыншының A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ таза стратегияларымен жасақталатын минимал M нүктесі арқылы қандай да бір $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ кесінділері өтсе, онда M нүктесінің абсциссасы

$$q_2^* = q^* = \frac{a_{i_2 1} - a_{i_1 1}}{\left(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}\right) - \left(a_{i_1 1} + a_{i_2 2}\right)} \tag{10.40}$$

және, демек

$$q_1^* = 1 - q_2^* = 1 - q^* = \frac{a_{i_1 2} - a_{i_2 2}}{\left(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}\right) - \left(a_{i_1 1} + a_{i_2 2}\right)}, \tag{10.41}$$

ал ойынның құны

$$V = \frac{a_{i_1 2} \cdot a_{i_2 1} - a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2}}{\left(a_{i_1 2} + a_{i_2 1}\right) - \left(a_{i_1 1} + a_{i_2 2}\right)}. \tag{10.42}$$

Теорема 10.15 (*A ойыншының тиімді стратегиялары туралы*). $a_{i1}a_{i2}$, $i = 1, 2, \ldots, m$ кесінділерінің жоғарғы орайжанауышының A ойыншының A_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ таза стратегияларымен жасақталатын минимал M нүктесі арқылы қандай да бір $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$, $i_1 \neq i_2$, $i_1, i_2 \in \{1, 2, \ldots, m\}$ кесінділері өтсін.

A ойыншының $P^* = \left(p_1^*, p_2^*, \ldots, p_m^*\right)$ аралас стратегисы тиімді болу үшін $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ мен $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесінділерінің көлбеулері әр түрлі болуы қажетті және жеткілікті, мұндағы

$$p_{i_1}^* = \frac{a_{i_2 2} - a_{i_2 1}}{\left(a_{i_2 2} - a_{i_2 1}\right) - \left(a_{i_1 2} - a_{i_1 1}\right)} \tag{10.43}$$

және, демек,

$$p_{i_2}^* = 1 - p_{i_1}^* = \frac{-\left(a_{i_1 2} - a_{i_1 1}\right)}{\left(a_{i_2 2} - a_{i_2 1}\right) - \left(a_{i_1 2} - a_{i_1 1}\right)}, \tag{10.44}$$

$$p_i = 0,\ i \in \{1, 2, \ldots, \mathrm{m}\} \setminus \{i_1, i_2\}.$$

(10.31), (10.32), (10.33), (10.35) және (10.34) формулаларында j_1 индексін i_2 индексімен, j_2 индексін i_1 индексімен, p мәнін q мәнімен алмастыру нәтижесінде сәйкес (10.40), (10.41), (10.42), (10.43) және (10.44) формулаларын алуға болады.

$i_1 = 1$ және $i_2 = 2$ болған кезде (10.40), (10.41), (10.42), (10.43) және (10.44) формулалары (10.26) қатынастың екінші формуласына, (10.26) қатынасының бірінші формуласына, (10.25) формуласына, (10.24) қатынасының бірінші формуласына, (10.24) қатынастың екінші формуласына айналады.

Салдар 10.3. Егер 10.15-теореманың шартынан $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі горизонталь болмаса, яғни нөлдік емес көлбеуі болса, онда A ойыншының A_{i_2} стратегиясы белсенді болып табылады.

Егер 10.15-теореманың шартынан $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесіндісі горизонталь болса, яғни нөлдік көлбеуі болса, онда A ойыншының A_{i_1} стратегиясы белсенді болып табылады.

Егер 10.15-теореманың шартынан $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ және $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесінділерінің біреуі де горизонталь болмаса, онда A_{i_1} және A_{i_2} стратегиялары белсенді болып табылады.

Салдар 10.4. Егер 10.15-теореманың шарттарындағы $a_{i_1 1}a_{i_1 2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда A_{i_1} стратегиясы тиімді.

Егер 10.15-теореманың шарттарындағы $a_{i_2 1}a_{i_2 2}$ кесіндісі горизонталь болса, онда A_{i_2} стратегиясы тиімді.

10.16-мысал.

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ -3 & 5 \\ 6 & -5 \\ 3 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \end{array}$$

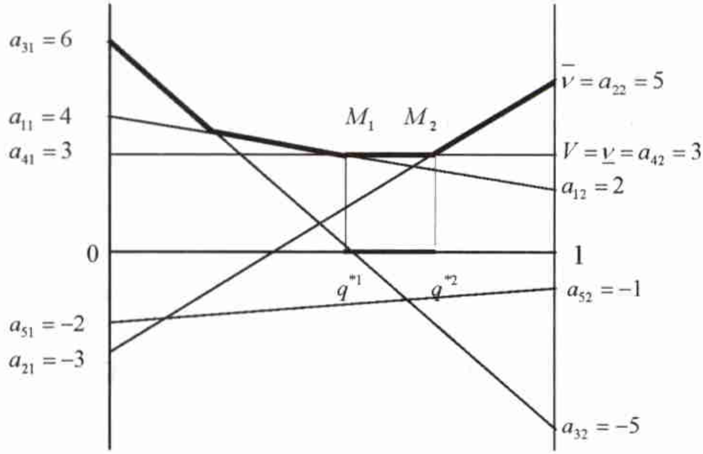
ұтыс матрицасымен берілген 5×2 ойынының шешімін табу керек.

Шығарылуы.

В алгоритмі бойынша осы ойынның геометриялық интерпретациясын берейік (10.24-сурет).

$[M_1, M_2]$ кесіндісінің барлық нүктелері жоғарғы орайжанауыштың минималды нүктелерін береді. Сондықтан B ойыншының тиімді аралас стратегиялар жиыны

$$S_B^O = \left\{ Q^* = \left(1 - q^*, q^*\right) : q^{*1} = \frac{1}{2} \le q^* \le \frac{3}{4} = q^{*2} \right\},$$



10.24-сурет

және геометриялық интерпретациясы $\left[q^{*1} = \frac{1}{2}; q^{*2} = \frac{3}{4}\right]$ кесіндісімен бейнеленеді. Бұл кесінді [0,1] кесіндісінің бірде бір ұшын қамтымайтындықтан B ойыншының таза стратегиялары тиімді болмайды.

$$Q^{*1} = \left(1-q^{*1}, q^{*1}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \quad \text{және} \quad Q^{*2} = \left(1-q^{*2}, q^{*2}\right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$$

стратегиялары шеткі тиімді стратегиялар болып табылады.

Ойынның V құны $M \in [M_1, M_2]$ нүктесінің ординатасына тең: $V = 3$.

Графикалық жолдармен алынған осы мәндердің ақиқаттығына (10.40), (10.41) және (10.42) формулалардың көмегімен есептеп көз жеткізуге болады.

Жоғарғы орайжанауыштың минималды M_1 нүктесі арқылы $a_{11}a_{12}$ және $a_{41}a_{42}$ екі кесінділері өтетіндіктен (10.40) формулада $i_1 = 1$ және $i_2 = 4$ мәндерінде:

$$q^{*1} = \frac{a_{41} - a_{11}}{(a_{12} + a_{41}) - (a_{11} + a_{42})} = \frac{3-4}{5-7} = \frac{1}{2}.$$

Жоғарғы орайжанауыштың минималды M_1 нүктесі арқылы $a_{21}a_{22}$ және $a_{41}a_{42}$ екі кесінділері өтетіндіктен (10.40) формулада $i_1 = 2$ және $i_2 = 4$ мәндерінде:

$$q^{*2}=\frac{a_{41}-a_{21}}{(a_{22}+a_{41})-(a_{21}+a_{42})}=\frac{3-(-3)}{8-0}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}.$$

(10.42) формула бойынша $i_1=1$ және $i_2=4$ мәндерінде:

$$V=\frac{a_{12}\cdot a_{41}-a_{11}\cdot a_{42}}{(a_{12}+a_{41})-(a_{11}+a_{42})}=\frac{6-12}{5-7}=3.$$

Жауабы. Ойынның құны $V=3$. $[M_1, M_2]$ кесіндісінің барлық нүктелері жоғарғы орайжанауыштың минималды нүктелерін беретіндіктен B ойыншының тиімді аралас стратегиялар жиыны

$$S_B^O=\left\{Q^*=(1-q^*,q^*):q^{*1}=\frac{1}{2}\le q^*\le\frac{3}{4}=q^{*2}\right\}.$$

$Q^{*1}=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ және $Q^{*2}=\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)$ стратегиялары шеткі тиімді стратегиялар.

10.10. Матрицалық ойын мен сызықтық программалау есептерінің арасындағы өзара байланыс

Матрицалық ойын мен сызықтық программалаудың арасында өзара байланыс бар – бір жағынан кез келген матрицалық ойынды бір-біріне қосжақты болатын сызықтық программалаудың есептер жұбына келтіруге болады, бір жағынан керісінше, кез келген шешімі бар сызықтық программалау есебін арнайы түрдегі матрицалық ойынға келтіруге болады. Сонымен, осы мағынада сызықтық программалау теориясы матрицалық ойындармен пара-пар.

$m\times n$ ойыны $p=(a_{ij})$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{1,n}$ ұтыс матрицасымен берілсін. A ойыншының $A_1,\dots, A_m$, B ойыншының $B_1,\dots, B_n$ стратегиялары бар болсын. $S_A^*=(p_1^*,\dots,p_m^*)$ және $S_B^*=(q_1^*,\dots,q_n^*)$ тиімді стратегияларын табу қажет, мұндағы p_i^*, q_j^* сәйкес A_i, B_j таза стратегияларын қолдану ықтималдықтары, $\sum_{i=1}^{m}p_i^*=1$, $\sum_{j=1}^{n}q_j^*=1$.

S_A^* тиімді стратегиясы келесі талаптарды қанағаттандырады.

Ол B ойыншының кез келген стратегиясында A ойыншыға ойынның ν құнынан кем емес орташа ұтыспен және B ойыншының тиімді стратегиясында ойынның ν құнына тең ұтыспен қамтамасыз етеді. $\nu > 0$ деп қабылдаймыз (ол үшін барлық $a_{ij} \geq 0$ келтіреміз). Егер A ойыншы B ойыншының кез келген B_j таза стратегиясына қарсы $S_A^* = (p_1^*, \ldots, p_m^*)$ аралас стратегиясын қолданса, онда ол орташа ұтысты немесе ұтыстың математикалық күтімін $a_j = a_{1j} p_1 + \ldots + + a_{mj} p_m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ иемденеді.

S_A^* тиімді стратегиясы үшін барлық орташа ұтыстар ойынның ν құнынан кем емес, яғни:

$$\begin{cases} a_{11} p_1 + a_{21} p_2 + \ldots + a_{m1} p_m \geq \nu \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} p_1 + a_{2n} p_2 + \ldots + a_{mn} p_m \geq \nu \end{cases} \tag{10.45}$$

Осы теңсіздіктердің әрқайсысын $\nu > 0$ санына бөліп, жаңа айнымалылар енгіземіз:

$$x_1 = \frac{p_1}{\nu}, \ldots, x_m = \frac{p_m}{\nu}. \tag{10.46}$$

Сонда (10.45) жүйе мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} a_{11} x_1 + a_{21} x_2 + \ldots + a_{m1} x_m \geq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n} x_1 + a_{2n} x_2 + \ldots + a_{mn} x_m \geq 1 \end{cases} \tag{10.47}$$

A ойыншының мақсаты – өзінің кепілденген ұтысын, яғни ойынның ν құнын максимизациялау.

$p_1 + p_2 + \ldots + p_m = 1$ теңдігін $\nu \neq 0$ шамасына бөліп x_i (i = 1, 2, ..., m) айнымалысына қатысты шарт аламыз: $x_1 + x_2 + \ldots + x_m = \frac{1}{\nu}$. Ойынның ν құнын максимизациялау $\frac{1}{\nu}$ шамасын минимизациялаумен пара-пар. Сондықтан есепті былайша құрастыруға болады:

(10.47) сызықтық шектеулерді қанағаттандыратын және

$$F = x_1 + x_2 + \ldots + x_m \tag{10.48}$$

сызықтық функция минимум мәнін қабылдайтындай $x_i \geq 0$, $i = 1, 2, ..., m$ айнымалыларының мәндерін анықтау керек. Бұл сызықтық программалау есебі. (10.47)-(10.48) есепті шешіп $p_1^*, p_2^*, \ldots, \quad p_m^*$ тиімді шешімді және S_A^* тиімді стратегияны аламыз.

$S_B^* = \left(q_1^*, \ldots, q_n^*\right)$ тиімді стратегияны анықтау үшін B ойыншы кепілденген ұтысты минимизациялау керек, яғни $\max \frac{1}{v}$ табу керек.

$$\begin{cases} a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + \ldots + a_{1n}q_n \leq v \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}q_1 + a_{m2}q_2 + \ldots + a_{mn}q_n \leq v \end{cases} \tag{10.49}$$

$q_1, q_2, \ldots, q_n$ айнымалылары A ойыншының кез келген таза стратегиясында B ойыншының орташа ұтысы ойынның құнынан артпайтындығынан алынатын (10.49) теңсіздіктер жүйесін қанағаттандырады.

$$y_1 = \frac{q_1}{v}, \; ..., \; y_n = \frac{q_n}{v} \tag{10.50}$$

белгілеулерін енгізіп келесі теңсіздіктер жүйесін аламыз:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n \leq 1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n \leq 1 \end{cases} \tag{10.51}$$

$y_j \left(j = \overline{1, n}\right)$ айнымалылары $y_1 + \ldots + y_n = \frac{1}{v}$ шартын қанағаттандырады.

Ойын келесі есепке келтірілді.

(10.51) теңсіздіктер жүйесін қанағаттандыратын және

$$F' = y_1 + y_2 + \ldots + y_n \tag{10.52}$$

сызықтық функция максимум мәнін қабылдайтындай $y_j \geq 0$, $j = 1, 2, ..., n$ айнымалыларының мәндерін анықтау керек.

(10.50), (10.51) сызықтық программалау есебінің шешімі $S_B^* = \left(q_1^*, q_2^*, \ldots, q_n^*\right)$ тиімді стратегияны анықтайды. Бұл жерде ойынның құны: $v = \dfrac{1}{\max F} = \dfrac{1}{\min F'}$.

(10.47), (10.48) және (10.51), (10.52) есептер үшін кеңейтілген матрицаларды құру барысында бір матрицаны транспонирлеу нәтижесінде екіншісін алуға болатынына көз жеткізуге болады. Сонымен, сызықтық программалаудың (10.47), (10.48) және (10.51), (10.52) есептері өзара қосжақты болып табылады.

Матрицалық ойынды сызықтық программалау есебіне келтіріп, шығару алгоритмі

1. егер ойынның ұтыс матрицасында теріс элемент кездессе, онда осы матрицаның барлық элементтері оң болатындай оң μ санын қосамыз;

2. сызықтық программалдаудың (10.47), (10.48) және (10.51), (10.52) қосжақты есептерін симплекс әдісімен шығарамыз. $v' = \dfrac{1}{\max F} = \dfrac{1}{\min F'}$ мәнін анықтаймыз;

3. A және B ойыншыларының сәйкес тиімді аралас стратегиясын құрамыз $p_i = \dfrac{x_i}{v}$, $i = 1, 2, ..., m$, $y_j = \dfrac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, ..., n$;

4. ойынның құнын есептейміз:

$$v = v' - \mu .$$

Практикада сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебін ойындар теориясының есебіне келтіруге қарағанда, ойындар теориясының есебін сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебіне келтіру жиі кездеседі.

Сызықтық программалау әдістерімен шығаруға болатын, $m \times n$ ойын модельдерімен сипатталған мысалды қарастырайық.

10.17-мысал.

Кредиттік оқыту жүйесінің талабы бойынша оқу жүктемесін бөлу барысында оқытушы 4 мамандыққа өзінің әр түрлі үш пәндерін таңдауға ұсынады және мамандықтың сұранысы бойынша қандай да бір мағынада пайда түсіреді. Әрбір мамандық өзіне ұсынылған пәндерді қажеттілігі бойынша бағалап, кестеге (ұтыс матрицасы) енгізеді. Кестедегі a_{ij} элементі i-ші пәнді j-ші мамандық таңдағандағы бір бірлік пайданы сипаттайды.

	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	37	85	64	82
A_2	91	34	46	28
A_3	73	52	55	46

Кез келген сұраныста пайданың кепілденген орташа ұтысына ие болатын өткізілетін пәннің тиімді пропорциясын анықтау керек.

Шығарылуы. Есепті шығармастан бұрын ұтыс матрицасына талдау жүргізе отырып доминацияланатын (қолайлы емес) немесе дубльденетін (қайталанатын) стратегияларды жазбай тастап кетіп ойын матрицасын редуциялауға болады. B ойыншының мақсаты – A ойыншының ұтысын азайту болғандықтан екінші стратегия (матрицаның екінші бағаны) төртінші стратегиямен салыстырғанда B ойыншы үшін қолайсыз (екінші бағанның элементтері төртінші бағанның элементтерінен үлкен). Сондықтан екінші бағанды жазбай тастап кетуге болады. 3×3 өлшемді матрица аламыз:

$$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 37 & 64 & 82 \\ 91 & 46 & 28 \\ 73 & 55 & 46 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Ойынның төменгі және жоғарғы құндарын анықтаймыз:

$$\underline{v} = \max\{37, 28, 46\} = 46; \ \overline{v} = \min\{91, 64, 82\} = 64 .$$

Ойынның төменгі және жоғарғы құндары өзара тең емес болғандықтан ер нүкте жоқ және тиімді шешімді аралас стратегияларда іздеу керек:

$$S_A^* = (p_1, p_2, p_3) \text{ және } S_B^* = (q_1, q_2, q_3).$$

I есеп

$$\begin{cases} 37p_1 + 91p_2 + 73p_3 \geq v \\ 64p_1 + 46p_2 + 55p_3 \geq v \\ 82p_1 + 28p_2 + 46p_3 \geq v \end{cases}$$

II есеп

$$\begin{cases} 37q_1 + 64q_2 + 82q_3 \leq v \\ 91q_1 + 46q_2 + 28q_3 \leq v \\ 73q_1 + 55q_2 + 46q_3 \leq v \end{cases}$$

I және II есептердегі барлық теңсіздіктердің екі жағын да v санына бөліп $x_i = \frac{p_i}{v}$, $i = 1, 2, 3$, $y_j = \frac{q_j}{v}$, $j = 1, 2, 3$ белгілеулерін енгіземіз. Нәтижесінде сызықтық программалаудың өзара қосжақты есебін аламыз:

$$\begin{cases} 37x_1 + 91x_2 + 73x_3 \geq 1 \\ 64x_1 + 46x_2 + 55x_3 \geq 1 \\ 82x_1 + 28x_2 + 46x_3 \geq 1 \end{cases}$$

$x_i \geq 0$, $i = 1, 2, 3$

$F = x_1 + x_2 + x_3 \to \min$

$$\begin{cases} 37y_1 + 64y_2 + 82y_3 \leq 1 \\ 91y_1 + 46y_2 + 28y_3 \leq 1 \\ 73y_1 + 55y_2 + 46y_3 \leq 1 \end{cases}$$

$y_j \geq 0$, $j = 1, 2, 3$

$Z = y_1 + y_2 + y_3 \to \max$

II-есепті симплекс кестенің көмегімен шығару нәтижесінде $Y_3 = \left(\frac{1}{293}, \frac{4}{293}, 0, 0, \frac{3393}{15728}, 0\right)$ базистік шешімінде мәні $Z_{\max} = \frac{5}{293}$ тиімді болып табылады.

Қосжақтылық теоремаларының (3-тарау) көмегімен өзара қосжақты есептердегі айнымалылардың арасында өзара байланысты орнатамыз және I есептің базистік шешімін анықтаймыз.

<table>
<tr><td rowspan="3">Айнымалылар арасындағы сәйкестік</td><td colspan="3">I есептің бастапқы айнымалылары</td><td colspan="3">I есептің қосымша айнымалылары</td></tr>
<tr><td>x_1
$\updownarrow$
y_4</td><td>x_2
$\updownarrow$
y_5</td><td>x_3
$\updownarrow$
y_6</td><td>x_4
$\updownarrow$
y_1</td><td>x_5
$\updownarrow$
y_2</td><td>x_6
$\updownarrow$
y_3</td></tr>
<tr><td colspan="3">II есептің қосымша айнымалылары</td><td colspan="3">II есептің бастапқы айнымалылары</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="6">II есептің айнымалыларының мәндері</td></tr>
<tr><td></td><td>$\frac{2}{293}$</td><td>0</td><td>$\frac{3}{293}$</td><td>0</td><td>0</td><td>$\frac{9}{293}$</td></tr>
</table>

Осыдан I есептің тиімді базистік шешімін аламыз:

$$X = \left(\frac{2}{293}, 0, \frac{3}{293}, 0, 0, \frac{9}{293} \right) \text{ және } F_{\min} = Z_{\max} = \frac{5}{293}.$$

$S_A^* = \left(p_1^*, p_2^*, p_3^*\right)$ тиімді стратегияны (10.46) формулалардың көмегімен табамыз:

$$p_1^* = x_1 \cdot v = \frac{2}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{2}{5} = 0{,}4; \; p_2^* = x_2 \cdot v = 0 \cdot \frac{293}{5} = 0;$$

$$p_3^* = x_3 \cdot v = \frac{3}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{3}{5} = 0{,}6;$$

$$S_A^* = (0{,}4; 0; 0{,}6).$$

Демек, оқытушының 40% – A_1 пәні, 60% – A_3 пәні оқытылған тиімді болады, ал A_2 пәнінің берілген мамандықтарға қажеттілігі жоқ болып табылды.

Сұраныстың S_B^* тиімді стратегиясы осыған ұқсас анықталады:

$$q_1^* = y_1 \cdot v = \frac{1}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2; \; q_2^* = 0;$$

$$q_3^* = q_3 \cdot v = \frac{4}{293} \cdot \frac{293}{5} = \frac{4}{5} = 0{,}8;$$

$$S_B^* = (0{,}2; 0; 0{,}8; 0).$$

Бұл жерде бастапқы матрицаның екінші бағанын қолайлы емес деп жазбай тастап кеткеніміз ескерілді.

Сонымен, тиімді сұраныс B_1 мамандығына 20%, B_3 мамандығына 80%.

Жауабы. Оқытушының 40% – A_1 пәні, 60% – A_3 пәні оқытылған тиімді болады, ал A_2 пәнінің берілген мамандықтарға қажеттілігі жоқ болып табылады. Тиімді сұраныс B_1 мамандығына 20%, B_3 мамандығына 80%.

Енді сызықтық программалау есебінің кез келген өзара қосжақты жұбын шығаруды симметриялы түрдегі матрицалық ойынды шығаруға келтіруді қарастырайық.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

квадраттық матрицасында

$$a_{ij}=a_{ji},\ i,\ j=1,2,\dots,n$$

болса, онда A матрицасы *симметриялы*. Егер

$$a_{ij}=-a_{ji},\ i,\ j=1,2,\dots,n$$

болса, яғни A матрицасы қарама-қарсы таңбамен өзінің транспонирленген матрицасына, $A=-A^T$ тең болса онда A матрицасы *қиғаш симметриялы* деп аталады.

Осы анықтамадан қиғаш симметриялы матрица квадраттық және оның бас диагоналының барлық элементтері нөлге тең $(i=j)$ болуы қажет.

Егер матрицалық ойынның ұтыс матрицасы қиғаш симметриялы болса, онда матрицалық ойын *симметриялы* деп аталады.

Симметриялы ойындардың қасиеттері

1^0. A ойыншының m таза стратегиялар саны B ойыншының n таза стратегиялар санымен беттеседі: $m=n$;

2^0. A ойыншы мен B ойыншының аралас стратегиялар векторының өлшемділігі бірдей;

3^0. A ойыншының S_A аралас стратегиялар жиыны B ойыншының S_B аралас стратегиялар жиынымен беттеседі;

4^0. Симметриялы ұтыс матрицасы ақиқат, яғни оның құны $V=0$;

5^0. A ойыншының $S_A^{\ 0}$ тиімді аралас стратегиялар жиыны B ойыншының $S_B^{\ 0}$ тиімді аралас стратегиялар жиынымен беттеседі: $S_A^{\ 0}=S_B^{\ 0}$.

Теорема 10.16. Сызықтық программалаудың

$$x_j\ge 0,\ j=1,2,\dots,m,\ \sum_{j=1}^{m}a_{ij}x_j\le b_i,\ i=1,2,\dots,n \qquad (10.53)$$

шектеулерінде $\max \sum_{j=1}^{m} c_j x_j$ мәнін табу керек;

$$y_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n,\ \sum_{i=1}^{n} a_{ij} y_i \geq c_j,\ j = 1, 2, ..., m \qquad (10.54)$$

шектеулерінде $\min \sum_{i=1}^{n} b_i y_i$ мәнін табу керек.

(10.53)-(10.54) өзара қосжақты есебінің жұбы

$$D = \begin{pmatrix} O_{m\times m} & \left(-A^T\right)_{m\times n} & \left(C^T\right)_{m\times 1} \\ A_{n\times m} & O_{n\times n} & \left(-B\right)_{n\times 1} \\ \left(-C\right)_{1\times m} & \left(B^T\right)_{1\times n} & O_{1\times 1} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & -a_{11} & \dots & -a_{n1} & c_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & -a_{1m} & \dots & -a_{nm} & c_m \\ a_{11} & \dots & a_{1m} & 0 & \dots & 0 & -b_1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} & 0 & \dots & 0 & -b_n \\ -c_1 & \dots & -c_m & b_1 & \dots & b_n & 0 \end{pmatrix}$$

матрицасымен берілген симметриялы матрицалық ойынның шешімімен пара-пар, мұндағы $O_{k\times k}$ – k-ретті нөлдік матрица (барлық элементтері 0-ге тең), $k = 1, n, m$;

$$A_{n\times m} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \text{ және } B_{n\times 1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – сәйкес (10.53)}$$

есебіндегі шектеулер жүйесінің белгісіздер коэффициенттерінің матрицасы мен бос мүшелердің вектор-бағаны. $C_{1\times m} = \left(c_1, \dots, c_m\right)$

– (10.53) есебіндегі мақсат функциясының белгісіздер коэффициенттерінің вектор-жолы, A^T, B^T, C^T – транспонирленген матрицалар.

Дәлірек айтқанда, егер

$$F^0 = \left(p_1^0, p_2^0, \ldots, p_m^0, q_1^0, q_2^0, \ldots, q_n^0, \lambda^0\right) \qquad (10.55)$$

– D матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы және $\lambda^0 > 0$ болса, онда

$$x^0 = \left(p_1^0 / \lambda^0, p_2^0 / \lambda^0, \ldots, p_m^0 / \lambda^0 \right)$$

– (10.53) есебінің тиімді шешімі, ал

$$y^0 = \left(q_1^0 / \lambda^0, q_2^0 / \lambda^0, \ldots, q_n^0 / \lambda^0 \right)$$

– (10.54) есебінің тиімді шешімі.

Керісінше, егер $x^0 = \left(x_1^0, x_2^0, \ldots, x_m^0\right)$ – (10.53) есебінің тиімді шешімі, ал $y^0 = \left(y_1^0, y_2^0, \ldots, y_n^0\right)$ – (10.54) есебінің тиімді шешімі болса, онда

$$F^0 = \left(\lambda^0 x_1^0, \lambda^0 x_2^0, \ldots, \lambda^0 x_m^0, \lambda^0 y_1^0, \lambda^0 y_2^0, \ldots, \lambda^0 y_n^0, \lambda^0\right), \quad (10.56)$$

D матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады, мұндағы

$$\lambda^0 = \left(1 + \sum_{j=1}^{m} x_j^0 + \sum_{i=1}^{n} y_i^0\right)^{-1}. \qquad (10.57)$$

Сонымен, сызықтық программалаудың өзара қосжақты (10.53) және (10.54) есептерінің жұбының тиімді шешімі болуы үшін D матрицасымен берілген ойында $\lambda^0 > 0$ болатын (10.55) тиімді стратегиясының бар болуы қажетті және жеткілікті.

10.18-мысал

Қандай да бір өнеркәсіп екі түрлі технологиялық тәсілмен үш түрлі өнім шығарады. i-ші технологиялық тәсілмен шығарылған j-ші түрлі өнімнің саны келесі мәндермен беріледі:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Өнімді өндіру тапсырмасы: $c = (1, 6, 9)$; бір өнімділікті технологиялық тәсілдермен шығаруға байланысты шығындар: $b = (10, 6)$.

Шығарылуы. Келесі сызықтық программалау есептерін аламыз:

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 + 3y_2 \geq 6 \\ 3y_1 + y_2 \geq 9 \end{cases} \qquad (10.58)$$

шектеулер жүйесінде, $y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$ теріс еместік шартында $Z = 10y_1 + 6y_2 \to \min$ мәнін табу керек.

(10.58) есебіне қосжақты есеп құрамыз:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \leq 10 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 6 \end{cases} \qquad (10.59)$$

шектеулер жүйесінде, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, $x_3 \geq 0$ теріс еместік шартында $F = x_1 + 6x_2 + 9x_3 \to \max$ мәнін табу керек.

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & -10 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 6 \\ -1 & -6 & -9 & 10 & 10 & 0 \end{pmatrix}. \qquad (10.60)$$

Өзара қосжақты (10.58) және (10.59) есептер жұбының шешімі D матрицасымен (10.60) берілген матрицалық ойынды шығарумен пара-пар.

Өзара қосжақты (10.58) және (10.59) есептерді шығара отырып олардың тиімді шешімдерін табамыз: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 3$ және $y_1 = \frac{21}{8}$, $y_2 = \frac{9}{8}$ немесе $X = (0, 1, 3)$, $Y = \left(\frac{21}{8}, \frac{9}{8}\right)$. Сонда (10.57) формула бойынша

$$\lambda = (1 + x_1 + x_2 + x_3 + y_1 + y_2)^{-1} = \left(1 + 0 + 1 + 3 + \frac{21}{8} + \frac{9}{8}\right)^{-1} =$$

$$= \left(\frac{35}{4}\right)^{-1} = \frac{4}{35}$$

және (10.56) формула бойынша

$$F = \left(\frac{4}{35} \cdot 0, \frac{4}{35} \cdot 1, \frac{4}{35} \cdot 3, \frac{4}{35} \cdot \frac{21}{8}, \frac{4}{35} \cdot \frac{9}{8}, \frac{4}{35}\right) = \left(0, \frac{4}{35}, \frac{12}{35}, \frac{3}{10}, \frac{9}{70}, \frac{4}{35}\right)$$

(10.60) матрицасымен берілген ойындағы кез келген ойыншының тиімді стратегиясы болып табылады.

Жауабы. Ойыншының тиімді стратегиясы:

$$F = \left(0, \frac{4}{35}, \frac{12}{35}, \frac{3}{10}, \frac{9}{70}, \frac{4}{35}\right).$$

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Ойындардың жіктелуі.

2. Тактика, стратегия, тиімді стратегиялар ұғымы.

3. Ойынның төменгі құны, жоғарғы құны.

4. Таза стратегиялардағы ойын құнының бар болу критерийі.

5. Ойындар теориясының негізгі теоремасы – Нейман теоремасы.

6. Белсенді стратегиялар туралы теорема.

7. Ойынды редуциялау тәсілдері.

8. 2×2, $2\times n$, $m\times2$ ойындарының аналитикалық, геометриялық шығарылуы.

9. Қиғаш симметриялы матрицаның, симметриялы ойынның анықтамасын беріңіз. Симметриялы матрицаның қасиеттері.

10. Сызықтық программалаудың қосжақты есептер жұбына парапар симметриялы ойынның матрицасының құрылымы.

11-15 Есептердегі ұтыс матрицаларымен берілген ойындардың таза стратегиялардағы

а) төменгі және жоғарғы құндарын анықтаңыздар;

ә) ер нүктесінің бар жоғын анықтаңыздар;

б) егер ойынның ер нүктесі бар болса, ойыншылардың тиімді стратегиясын анықтаңыздар;

в) егер ойынның ер нүктесі бар болса, онда ойынның құнын анықтаңыздар.

11. $$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 112 & 4 & 5 & 56 \\ 22 & 44 & 67 & 121 \\ 523 & 22 & 16 & 14 \\ 478 & 121 & 75 & 748 \end{pmatrix} \end{array}$$

12. $$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}$$

13. $$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

14. $$A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 14 & 17 & 20 & 23 & 26 & 29 \\ 19 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 \\ 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \\ 10 & 14 & 18 & 15 & 12 & 22 \\ 25 & 18 & 15 & 15 & 18 & 25 \end{pmatrix} \end{array}$$

15. $A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 12 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix} \end{array}.$

16-20 есептерде ойын *nxm* – өлшемді ұтыс матрицасымен берілген және ойыншылардың сәйкес P және Q аралас стратегиялары берілсін:

а) A ойыншының $\left(P^0, Q^0\right)$, $\left(P^0, B_j\right)$ (j-баған нөмірі) жағдайындағы ұтысын;

ә) A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін;

б) B ойыншының $\left(A_i, Q^0\right)$ (i-жол нөмірі) жағдайындағы ұтылысын;

в) B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткішін анықтау керек.

16. $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 0 & 1/6 \end{pmatrix}$, $P = (0;2;\ 0;3;\ 0;5)$, $Q = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2)$.

17. $P = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 1/5 & 0{,}8 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 \end{pmatrix}$,

$P = (0{,}9;\ 0{,}1;\ 0)$, $Q = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0)$.

18. $P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix}$,

$P = (0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$, $Q = (0{,}1;\ 0{,}7;\ 0{,}2;\ 0;\ 0)$.

19. $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$,

$P = (0{,}3,\ 0{,}7)$, $Q = (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$.

11-15 Есептердегі ұтыс матрицаларымен берілген ойындардың таза стратегиялардағы

а) төменгі және жоғарғы құндарын анықтаңыздар;

ә) ер нүктесінің бар жоғын анықтаңыздар;

б) егер ойынның ер нүктесі бар болса, ойыншылардың тиімді стратегиясын анықтаңыздар;

в) егер ойынның ер нүктесі бар болса, онда ойынның құнын анықтаңыздар.

$$
\textbf{11.}\quad A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 112 & 4 & 5 & 56 \\ 22 & 44 & 67 & 121 \\ 523 & 22 & 16 & 14 \\ 478 & 121 & 75 & 748 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
\textbf{12.}\quad A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 4 & 5 & 4 & 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 8 & 3 & 5 & 2 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & 9 & 3 & 6 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
\textbf{13.}\quad A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 6 & 5 \\ 2 & 0 & 2 & 1 \\ 6 & 0 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 7 & 4 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
\textbf{14.}\quad A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 & B_6 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 15 & 18 & 21 & 24 & 27 & 30 \\ 14 & 17 & 20 & 23 & 26 & 29 \\ 19 & 19 & 22 & 25 & 28 & 31 \\ 13 & 17 & 21 & 25 & 29 & 33 \\ 10 & 14 & 18 & 15 & 12 & 22 \\ 25 & 18 & 15 & 15 & 18 & 25 \end{pmatrix} \end{array}
$$

$$
\textbf{15.}\ A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 3 & 8 & 6 & 2 & 1 \\ 5 & 4 & 8 & 12 & 3 \\ 6 & 0 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 5 & 2 & 8 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 7 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}.
$$

16-20 есептерде ойын nxm – өлшемді ұтыс матрицасымен берілген және ойыншылардың сәйкес P және Q аралас стратегиялары берілсін:

а) A ойыншының (P^0, Q^0), (P^0, B_j) (j-баған нөмірі) жағдайындағы ұтысын;

ә) A ойыншының P^0 аралас стратегиясының тиімділік көрсеткішін;

б) B ойыншының (A_i, Q^0) (i-жол нөмірі) жағдайындағы ұтылысын;

в) B ойыншының Q^0 аралас стратегиясының тиімді емес көрсеткішін анықтау керек.

$$\textbf{16.}\ P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & 1/3 & 2/3 \\ 4 & 0 & 1/6 \end{pmatrix},\ P = (0;2;\ 0;3;\ 0;5),\ Q = (0{,}5;\ 0{,}3;\ 0{,}2).$$

$$\textbf{17.}\ P = \begin{pmatrix} 2 & 1/5 & 1/3 & 1 \\ 1 & 1/3 & 1/5 & 0{,}8 \\ 2 & 1/4 & 1/3 & 1/7 \end{pmatrix},$$

$$P = (0{,}9;\ 0{,}1;\ 0),\ \ Q = (0{,}4;\ 0{,}4;\ 0{,}2;\ 0).$$

$$\textbf{18.}\ P = \begin{pmatrix} 0{,}7 & 0{,}2 & 0 & 0{,}5 & 0{,}9 \\ 0{,}2 & 0{,}3 & 0{,}9 & 0{,}1 & 0{,}5 \\ 0{,}3 & 0 & 0{,}3 & 0{,}1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$P = (0{,}8;\ 0{,}1;\ 0{,}1),\ \ Q = (0{,}1;\ 0{,}7;\ 0{,}2;\ 0;\ 0).$$

$$\textbf{19.}\ P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} \\ \frac{2}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix},$$

$$P = (0{,}3,\ 0{,}7),\ \ Q = (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2).$$

20. $P=\begin{pmatrix}10 & 0 & 95 & 5\\ 20 & 20 & 85 & 15\\ 30 & 40 & 75 & 25\\ 40 & 60 & 65 & 35\\ 50 & 80 & 55 & 45\end{pmatrix}$,

$$P^0=\left(\frac{2}{5};0;\frac{1}{5};0;\frac{2}{5}\right),\quad Q^0=\left(\frac{1}{6};\frac{2}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{2}\right).$$

21-25 есептерде ойын *nxm* –өлшемді ұтыс матрицасымен берілген. Ойыншылардың доминацияланбайтын және дубльденетін стратегияларын жазбай тастап кетіп, ойын матрицасын редуцияланыз.

21. $A=\begin{array}{c c}& \begin{array}{ccc}B_1 & B_2 & B_3\end{array}\\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\end{array} & \begin{pmatrix}5 & 7 & 8\\ 3 & 2 & -10\\ 6 & 4 & 1\end{pmatrix}\end{array}$

22. $A=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}B_1 & B_2 & B_3 & B_4\end{array}\\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\end{array} & \begin{pmatrix}1 & -3 & -1 & 5\\ -1 & 1 & 7 & 3\\ 5 & -1 & 3 & 1\end{pmatrix}\end{array}$

23. $A=\begin{array}{c c}& \begin{array}{ccccc}B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5\end{array}\\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\end{array} & \begin{pmatrix}-4 & 5 & 11 & 2 & 5\\ -1 & -10 & 8 & -1 & -10\\ 8 & -13 & 20 & 11 & -13\end{pmatrix}\end{array}$

24. $A=\begin{array}{c c}& \begin{array}{cccc}B_1 & B_2 & B_3 & B_4\end{array}\\ \begin{array}{c}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{array} & \begin{pmatrix}-5 & -3 & 1 & -1\\ -7 & -3 & -1 & -3\\ 1 & -1 & -5 & -7\\ -5 & -3 & 1 & -1\end{pmatrix}\end{array}$

$$
\textbf{25.}\ A = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\
\begin{pmatrix} 5 & 8 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & 5 & 0 & 1 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \end{array}.
$$

Белсенді стратегиялар теормасын пайдаланып **26-30** есептерде берілген матрицалық ойындардың аралас стратегиялардағы құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын табу керек.

26. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **27.** $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **28.** $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **29.** $\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

30. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

31-35 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ер нүктесін геометриялық әдіспен табу керек.

31. $P = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$. **32.** $P = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -5 & -1 \end{pmatrix}$.

33. $P = \begin{pmatrix} 7 & 7 \\ -3 & -3 \end{pmatrix}$ **34.** $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$.

35. $P = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

36-40 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, ойыншылардың тиімді стратегияларын геометриялық әдіспен табу керек.

36. $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **37.** $\begin{pmatrix} 1{,}5 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. **38.** $\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. **39.** $\begin{pmatrix} -7 & 7 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

40. $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$.

41-45 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойындарды сызықтық программалау есептеріне келтіріп ойынның шешімін табу керек.

41. $\begin{pmatrix} 2 & 5 & 10 \\ 12 & 4 & 3 \\ 7 & 5 & 3 \end{pmatrix}$. **42.** $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 & 9 \\ 9 & 10 & 4 & 2 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **43.** $\begin{pmatrix} 5 & 10 & 7 \\ 17 & 4 & 9 \\ 14 & 11 & 10 \\ 9 & 2 & 15 \end{pmatrix}$.

44. $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 7 & 10 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 11 \\ 7 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 3 & 1 & 11 & 5 \end{pmatrix}$. **45.** $\begin{pmatrix} 6 & 3 & 1 & 12 & 4 \\ 10 & 5 & 2 & 7 & 13 \\ 8 & 1 & 7 & 10 & 4 \\ 5 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 6 & 9 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

46-50 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, *A* ойыншының тиімді стратегиясын геометриялық әдіспен, таза стратегиядағы ойынның төменгі және жоғарғы құндарын табу керек.

46. $\begin{pmatrix} 6 & 0 & 2 & -1 & 7 & 4 \\ 5 & 4 & 3 & 8 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

47. $\begin{pmatrix} 7 & -3 & 0 & -3 & 4 & 1 \\ 4 & 2 & 3 & 5 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

48. $\begin{pmatrix} 6 & 4 & 3 & 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 & 5 & 4 \end{pmatrix}$. **49**. $\begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 & 6 & 7 \\ 4 & 7 & 9 & 5 & 8 \end{pmatrix}$.

50. $\begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 3 & 5 \\ 6 & 3 & 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}$.

51-55 есептердегі ұтыс матрицасымен берілген ойынның құнын, *B* ойыншының тиімді стратегиясын геометриялық әдіспен, таза стратегиядағы ойынның төменгі және жоғарғы құндарын табу керек.

51. $\begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 4 \\ 0 & 5 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$. **52.** $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -2 & 6 \\ 7 & -4 \\ 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. **53.** $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 4 \\ 7 & -4 \\ -2 & 6 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

54. $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 3 & 6 \\ 1 & 8 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$. **55.** $\begin{pmatrix} 2 & 8 \\ 4 & 3 \\ 0 & 6 \\ 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

11.1. Ойындардың позициялық және қалыпты формалары

Кез келген ойынды зерттеу мақсатына тәуелді ойындарды *позициялық* немесе *қалыпты* формада қарастыруға болады. Қалыпты формадағы ойындарды біз қарастырдық, ол :

1) I ойыншылардың (k ойыншылар өздерінің нөмірлерімен берілді деп есептеуге болады, яғни $I = \{1, 2, ..., k\}$) жиынымен беріледі;

2) әрбір $i \in I$ ойыншы үшін мүмкін болатын $\{x_i\}$ стратегиясы беріледі;

3) әрбір жағдай (яғни ойыншылардың бірге таңдаған өздерінің стратегиялары: x_1 – бірінші ойыншы, x_2 – екінші ойыншы, ..., x_k – k-шы ойыншы) үшін $F_1(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – бірінші, $F_2(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – екінші, ..., $F_k(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ – k-шы ойыншылардың ұтыстары, яғни ұтыс функциялары беріледі.

Сонымен, әрбір i-ші ойыншы өзінің U_i стратегиялар жиынынан өзінің u_i стратегиясын таңдайды. Нәтижесінде ойынды анықтайтын $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ жағдайы алынады, яғни $J_i(u_1) = J_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$, $J_i(u_1) = J_i(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ $i = \{1, 2, ..., n\}$ ұтысы алынады.

Сонымен,

$$\Gamma = \langle U_1, U_2, \ldots, U_n; J_1, J_2, \ldots, J_n \rangle$$

$2n$ элементтің жиынтығы *ойынның қалыпты формасы* деп аталады.

Қалыпты формада берілген ойын партиясы – ойыншылардың бір мезгілде өздерінің стратегияларын таңдаудан тұрады. Соған қарамастан, көп жағдайда ойыншылар стратегияларын біртіндеп таңдайды. Осындай ойындар *позициялық ойындар* деп аталады. Позициялық формада оқиғалар тізбегі жақсырақ ашылады және ол көрнекті болып келеді.

Позициялық ойындар – бұл ойыншылар уақыт бойынша өзгеріп отыратын жағдайда шешімді біртіндеп қабылдау үрдісін модельдейтін коалициясыз ойын.

Ойынның өзінің үрдісі не ойынның ережелеріне сәйкес мүмкін болатын әрекеттерді таңдау жолымен, не кездейсоқ түрде (кездейсоқ жүріс) ойынның бір күйінен екінші күйіне біртіндеп өту жолымен жүзеге асырылады.

Позициялық ойындарға мысал ретінде крестик-нолик, шашка, шахмат, карта ойындары, домино және т.б. ойындарды жатқызуға болады. Бұл ойындарда бірінші жүрісті таңдау көбінесе кездейсоқ түрде анықталады.

Ойынның жағдайын *позиция* деп атау қабылданған (осыдан позициялық ойын деген атау алынды), ал әрбір позициядағы мүмкін болатын таңдаулар – *балама* деп аталады.

Ойыншы орналасқан және орналаса алатын позициялар жиыны *ақпараттық жиын* деп аталады.

Ақпараттық жиынның мағынасы мынада: ойыншы өзі қай ақпараттық жиында екенін біледі, бірақ қай позицияда (егер әрине ол бірнеше позициядан тұрса) екенін білмейді. Бұл ойыншылардың алдыңғы жүрістің нәтижесін білмейтініне сәйкес келеді.

Ойын бұтағының анықтамасын беру үшін графтар теориясының кейбір ұғымдарын есімізге түсірейік.

X қандай да бір ақырлы жиын болсын. Әрбір $x \in X$ элементін $g(x) \in X$ элементіне сәйкес қоятын g ережесі X-ті X-ке *бірмәнді бейнелеу* немесе *X-те анықталған* және *X-те мәнді қабылдайтын функция* деп аталады.

G – X-ті X-ке бейнелеу болсын.

Егер X қандай да бір ақырлы жиын (төбелердің ақырлы жиыны), ал G – X-ті X-ке бейнелеу болса, онда (X, G) жұбы *граф* деп аталады.

Цикл – бұл бір төбеден шығып сол төбеде аяқталатын ақырлы тізбек. Егер графтың кез келген екі төбесін тізбекпен байланыстыруға болса, онда граф *байланысқан* деп аталады.

Кем дегенде екі төбесі бар циклсыз байланысқан граф *бұтақ* немесе *бұтақ тәріздес граф* деп аталады.

Позициялар жиынын бұтақ тәріздес реттелген жиынмен беру мүмкіндігі позициялық ойынның сипаттық ерекшелігі болып табылады.

11.2. Позициялық ойынның құрылымы

а) 0 *бастапқы нүктесі*;

ә) бір төбеден шығатын қабырғалар, олар балама болып табылады және нөмірленеді;

б) кем дегенде бір баламасы бар төбелер, олар *аралық* позициялар деп аталады, ал қалған төбелері – *соңғы* деп аталады;

в) әрбір соңғы позицияға берілген позициядағы ойыншылардың ұтысы сәйкес қойылады;

г) барлық аралық төбелер (бұтақ басы да кіреді) жиыны *кезектілік жиындары* деп аталатын I_0, I_1, ..., I_n – n+1 (n – ойыншылар саны) жиынға бөлінеді; J_i жиынына i, i= 1, 2, ..., n ойыншы кіреді, I_0 – жағдайдың жүріс кезегі, әрбір позиция үшін I_0-ден баламаны таңдау ықтималдығы көрсетіледі;

д) I_1, ..., I_n жиынының әрқайсысы өз кезегінде I_i^k ішкі ақпараттық жиынға бөлінеді; бұл жерде бір ақпараттық жиындағы позициялардың бірдей баламасы болады;

е) бұтақ басынан кез келген соңғы позицияға дейінгі циклдық емес жол *партия* деп аталады; әрбір ақпараттық жиындағы әрбір партияда бірден артық емес төбесі бар болады.

Ақпараттық жиынның мағынасы мынада: ойыншы өзінің кандай ақпараттық жиында екенін біледі, бірақ қандай позицияда (егер, әрине ол бірнеше позициядан тұрса) екенін білмейді. Бұл – ойыншы алдыңғы жүрістің нәтижесін білмейтінін көрсетеді.

11.3. Толық ақпаратты позициялық ойын

Позициялық ойындар толық ақпаратты және толық емес ақпаратты деп екіге бөлінеді.

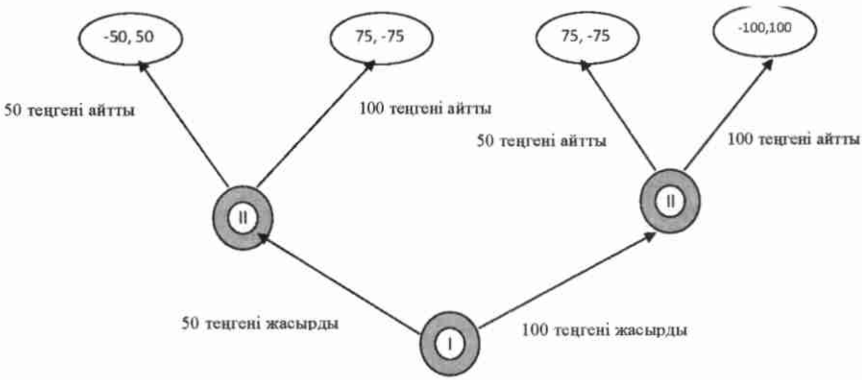
Егер ойыншының әрбір ақпараттық жиыны бұтақтың тек қана бір төбесін қамтыса, онда бұл *толық ақпаратты ойыншы* деп аталады. Егер ойында әрбір ойыншының толық ақпараты бар болса, онда ойынды *толық ақпаратты ойын* деп айтады. Сонымен толық ақпаратты ойында әрбір ойыншы өзінің жүрісінде бұтақтың қандай позициясында екенін біледі. Басқаша айтқанда, толық ақпаратты ойында әрбір ойыншы басқа ойыншылардың таңдаулары туралы біледі. Шахмат, шашка, «крестик-нолик» ойындары – толық ақпаратты ойындарға жатады.

11.1-мысал.

9.1-мысалдағы «*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қарастырайық.

Бұл жерде екінші ойыншы бірінші ойыншының жасырған теңгесін астыртын қарауға мүмкіндігі бар болсын. Ойын бұтағын тұрғызу керек. Ойынды талдап, құнын анықтау керек.

Шығарылуы. Осы ойынның бұтағы 11.1-суретте келтірілген.



11.1-сурет. Толық ақпаратты «Теңгені болжап анықтау» позициялық ойынының бұтағы

11.1-суретте сұр түспен ойыншылардың ақпараттық жиыны боялған.

Бірінші ойыншының стратегиясы:

x_1^1 =«50 теңгені жасыру», x_1^2 =«100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншының стратегиясын $[y_1, y_2]$ балама жұбы түрінде берген қолайлы, мұндағы

$y_1, y_2 \in \{ x_2^1$ =«50 теңгені айтады», x_2^2 =«100 теңгені айтады»$\}$.

Осы баламалардың y_1 біріншісі – бірінші ойыншы екінші ойыншының бірінші баламасын таңдаған жағдайдағы екінші ойыншының таңдауына, ал y_2 екінші балама – бірінші ойыншы екінші ойыншының екінші баламасын таңдаған жағдайдағы екінші ойыншының таңдауына сәйкес келеді.

Екінші ойыншының төрт таза стратегиясы бар:

$$\left[x_2^1, x_2^1\right] \left[x_2^1, x_2^2\right], \left[x_2^2, x_2^1\right], \left[x_2^2, x_2^2\right].$$

Ойыншылардың ұтыстарын матрицаға жазайық:

$$\begin{pmatrix} -50 & -50 & 75 & 75 \\ 75 & -100 & 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

Бұл матрицаның жолдары бірінші ойыншының өзінің x_1^1 және x_1^2 стратегияларын таңдауға, ал бағандары екінші ойыншының $\left[x_2^1, x_2^1\right]$ $\left[x_2^1, x_2^2\right]$, $\left[x_2^2, x_2^1\right]$, $\left[x_2^2, x_2^2\right]$ стратегияларын таңдауға сәйкес келеді. Матрицаның элементтері бірінші ойыншының сәйкес ұтыстарына (бұл ойында екінші ойыншының ұтысы бірінші ойыншының ұтысына қарама-қарсы) тең.

Мысалы, егер бірінші ойыншы $x_1^1 =$ «50 теңгені жасыру» стратегиясын, екінші ойыншы $\left[x_2^1, x_2^1\right]$ стратегиясын таңдаған жағдайда матрицаның сол жақ жоғарғы ұяшығында бірінші ойыншының ұтысы орналасады, яғни бірінші ойыншы қандай баламаны таңдаса да, екінші ойыншы 50 теңгені айтады. Сонымен, бірінші ойыншы 50 теңгені жасырды, екінші ойыншы 50 теңгені айтты, демек бірінші ойыншының ұтысы – 50 теңге. Қалған жағдайлардағы ұтыс та осылайша анықталады.

Берілген матрицалық ойынның ер нүктесі бар, ол – 50-ге тең және ұтыс матрицасының бірінші жолымен екінші бағанына сәйкес келеді, яғни бірінші ойыншы «50 теңгені жасыру», ал екінші ойыншы $\left[x_2^1, x_2^2\right]$ стратегиясын таңдайды, немесе, егер бірінші ойыншы 50 теңгені жасырған жағдайда 50 теңгені айтса, және бірінші ойыншы 100 теңгені жасырған жағдайда 100 теңгені айтқан жағдайда ойынның ер нүктесі бар.

Жауабы. Ойынның ер нүктесі бар, $\nu = 50$.

Теорема 11.1. Толық ақпаратты кез келген позициялық ойын таза стратегияларда ер нүктесі бар қандай да бір матрицалық ойынға пара-пар.

11.4. Толық емес ақпаратты позициялық ойын

Толық емес ақпаратты ойындарда жүретін ойыншы бұтақтың қандай позициясында екенін білмейді. Ойыншыға тек қана ақпараттық жиын – өзі тұрған позиция ғана емес, сонымен қатар өзі болуы мүмкін позицияларды қамтитын позициялардың кейбір жиындары белгілі болады.

Мұндай ойындарға домино ойыны, кейбір карта ойындары жатады.

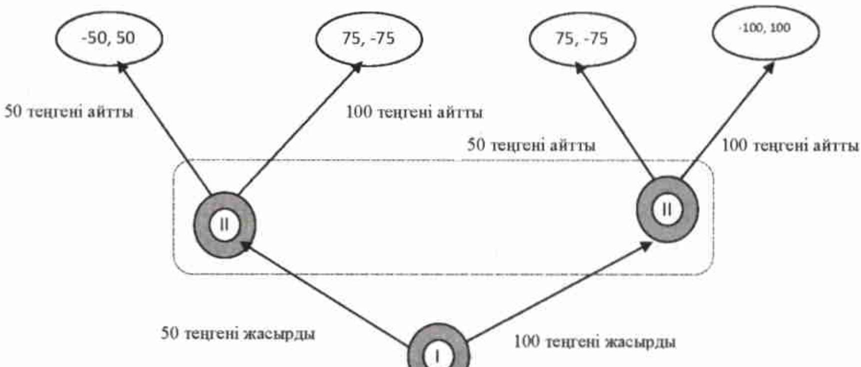
11.2-мысал.

9.1-мысалдағы «*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қарастырайық.

Бұл жерде екінші ойыншы бірінші ойыншының қандай теңгені жасырғанын білмейді. Ойын бұтағын тұрғызу керек. Ойынды талдап, құнын анықтау керек.

Шығарылуы. Осы ойынның бұтағы 11.2-суретте келтірілген.

Осындай жағдайдағы ойыншының ақпараттық жиыны пунктирмен белгіленген.



11.2-сурет. Толық емес ақпаратты «Теңгені болжап табу» позициялық ойынының бұтағы

Біз толық емес ақпаратты позициялық ойын алдық. Екінші ойыншыға өзінің жүрісінде ақпараттық жиын белгілі, бірақ, ақпараттық жиындардағы өзі орналасқан нақты позиция белгісіз (11.2-суретте сол жағы немесе оң жағы).

Бұл жағдайда бірінші ойыншының екі стратегиясы бар:
x_1^1 =«50 теңгені жасыру», x_1^2 =«100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншыға бірінші ойыншының таңдауы белгісіз болғандықтан, екінші ойыншыда да екі стратегия бар:
x_2^1 =«50 теңгені айтады», x_2^2 =«100 теңгені айтады».

Бұл жағдайдағы ойынның ұтыс матрицасы:

$$\begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

ойынның төменгі құны: $\underline{v} = \max_{i=1,2} \min_{j=1,2} a_{ij} = \max\{-50, -100\} = -50$,

ойынның жоғарғы құны: $\overline{v} = \min_{j=1,2} \max_{i=1,2} a_{ij} = \max\{75, 75\} = 75$,

яғни $\underline{v} \neq \overline{v}$, және берілген матрицаның таза стратегияларда ер нүктесі жоқ. Енді ойынның аралас стратегиядағы шешімін іздейік.

Бірінші ойыншы өзінің бірінші стратегиясын $p \in [0, 1]$ ықтималдығымен, екінші стратегиясын ($1-p$) ықтималдығымен таңдайды, яғни бірінші ойыншы $p = (p, 1-p)$ аралас стратегиясымен ойнайды.

Егер екінші ойыншы өзінің j-ші стратегиясын таңдағандағы оның күтілетін ұтысын, яғни ұтыстың математикалық күтуін $v_j(p)$ арқылы белгілесек, онда

$$v_1(p) = -50p + 75(1-p), \; v_2(p) = 75p - 100(1-p).$$

Екінші ойыншы бірінші ойыншының ұтысы минималды болатындай өзінің стратегияларын таңдайды:

$$v(p) = \min\{v_1(p), v_2(p)\}.$$

Басқаша айтқанда, екінші ойыншы кез келген жағдайда бірінші ойыншыны мүмкіндігінше аз ұтысқа жетуге мәжбүр етеді, яғни қарастырылып отырған ойында $p \leq p^*$ (p^* – $v(p)$ функциясының максимум мәні) болған кезде екінші ойыншы өзінің екінші стратегиясын таңдайды және бірінші ойыншы $v_2(p)$ ұтады, $p \geq p^*$ болған кезде екінші ойыншы бірінші стратегияны таңдайды және бірінші ойыншы $v_1(p)$ ұтады. Бірінші ойыншы үшін тиімді таңдау $v=\max\limits_{p\in[0,1]} v(p)$ шамасына сәйкес келеді, яғни $p=p^*$, бұл жерде ойынның құны v мәніне тең.

$v_1(p)=v_2(p)$:

$$-50p+75(1-p)=75p-100(1-p) \Rightarrow$$
$$-50p+75-75p=75p-100+100p$$
$$-125p+75=175p-100 \Rightarrow 300p=175 \Rightarrow p=\frac{175}{300}$$
$$p=\frac{7}{12} \text{ немесе } p^*=\frac{7}{12}.$$

Сонымен, $p^*=\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right)$ және ойынның құны $v=v_1\left(\frac{7}{12}\right)= =v_2\left(\frac{7}{12}\right)=\frac{25}{12}$, яғни екінші ойыншының қандай стратегия таңдағанына тәуелсіз бірінші ойыншы көп партияда бір партия үшін $25/12$ орташа ұтысқа жетеді.

Осылайша, екінші ойыншының тиімді аралас стратегиясын табамыз. Ол бірінші стратегиясын $q\in[0,1]$ ықтималдығымен, екінші стратегиясын $(1-q)$ ықтималдығымен таңдайды, яғни екінші ойыншы $q=(q, 1-q)$ аралас стратегиясымен ойнайды.

Егер бірінші ойыншы өзінің i-ші стратегиясын таңдағандағы күтілетін ұтысын, яғни ұтыстың математикалық күтілуін $\mu_i(q)$ арқылы белгілесек, онда

$$\mu_1(p)=-50q+75(1-q),\ \mu_2(p)=75q-100(1-q).$$
$$\mu_1(q)=\mu_2(q):\ q=\frac{7}{12},\ q^*=\frac{7}{12},\ q^*=\left(\frac{7}{12},\frac{5}{12}\right).$$
$$v=\mu_1\left(\frac{7}{12}\right)=\mu_2\left(\frac{7}{12}\right)=\frac{25}{12}.$$

Сондықтан екінші ойыншының тиімді аралас стратегиясы:

$$q^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right).$$

Жауабы: Берілген матрицаның ер нүктесі жоқ, ал тиімді аралас стратегиялары: $p^* = \left(\frac{7}{12}, \frac{5}{12}\right)$, және ойынның құны $v = \frac{25}{12}$.

11.5. Позициялық ойынды қалыптастыру

Позициялық ойынды ойынның қалыпты түрінде жазу *позициялық ойынды қалыптастыру* деп айтады.

Бұл тақырыпты нақты мысалда қарастырайық.

11.3-мысал.

9.1-мысалдағы «*Теңгені болжап анықтау*» ойынын қалыпты формада жазу керек.

Шығарылуы.

Бірінші ойыншының стратегиялары:

x_1^1 =«50 теңгені жасыру», x_1^2 =«100 теңгені жасыру».

Екінші ойыншының стратегиялары:

x_2^1 =«50 теңгені айтады», x_2^2 =«100 теңгені айтады».

Ойынның қалыпты формасының анықтамасынан:

$$\Gamma = \langle U_1 = \{x_1^1, x_1^2\}, U_2 = \{x_2^1, x_2^2\},$$

$$F_1(x_1^1, x_2^1) = -50, F_1(x_1^1, x_2^2) = F_1(x_1^2, x_2^1) = 75, F_1(x_1^2, x_2^2) = -100,$$

$$F_2(x_1^1, x_2^1) = 50, F_2(x_1^1, x_2^2) = F_2(x_1^2, x_2^1) = -75, F_2(x_1^2, x_2^2) = 100\rangle.$$

$F_1(u_1, u_2) = (-1)^{u_1+u_2+1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2)$ заңдылығын байқауға болады, мұндағы u_1, u_2 – сәйкес $(x_i^{u_1}, x_j^{u_2})$ стратегиялар жұбының жоғарғы индекстері.

Ойын антагонистикалық болғандықтан,

$$\Gamma = \langle \{1, 2\}, \{1, 2\}, (-1)^{u_1+u_2+1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2)\rangle.$$

Ойынның қалыпты формасын кесте түрінде де жазуға болады:

		II 1	2
I	1	(-50, 50)	(75, -75)
	2	(75, -75)	(-100, 100)

Осы кестеде артық нәрсе көп:

1) әрбір ұяшықта тек қана бірінші ойыншының ұтысын қалдыруға болады, себебі, екінші ойыншының ұтысы бірінші ойыншының ұтысына қарама-қарсы;

2) стратегиялардың атын жазудың қажеті жоқ: жолдар – бірінші ойыншының стратегиялары, бағандар – екінші ойыншының стратегиялары. Сонда ықшамдалған кестеден матрица аламыз:

$$\begin{pmatrix} -50 & 75 \\ 75 & -100 \end{pmatrix}.$$

Жауабы: $\Gamma = \left\langle \{1, 2\}, \{1, 2\}, (-1)^{u_1+u_2+1} \cdot 25 \cdot (u_1 + u_2) \right\rangle ..$

11.4-мысал.

«Крестик-нолик» ойынын 3х3 шаршыда қарастырайық. Үш белгіні (крестикті немесе ноликті) қатар қойған ойыншы ұтады. Ойыншылар кезектесіп жүреді. Ұтқан ойыншы +1 бірлік өлшемінде сыйақы алады, ұтылған ойыншы 1 бірлік бірлігінде айыппұл төлейді. Басқа жағдайда тепе-теңдік болады да, ойыншылар ештеңе алмайды (бермейді). Ойынның бұтағын тұрғызу керек.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

а)

x	0	x
0	x	x
•	•	0

ә)

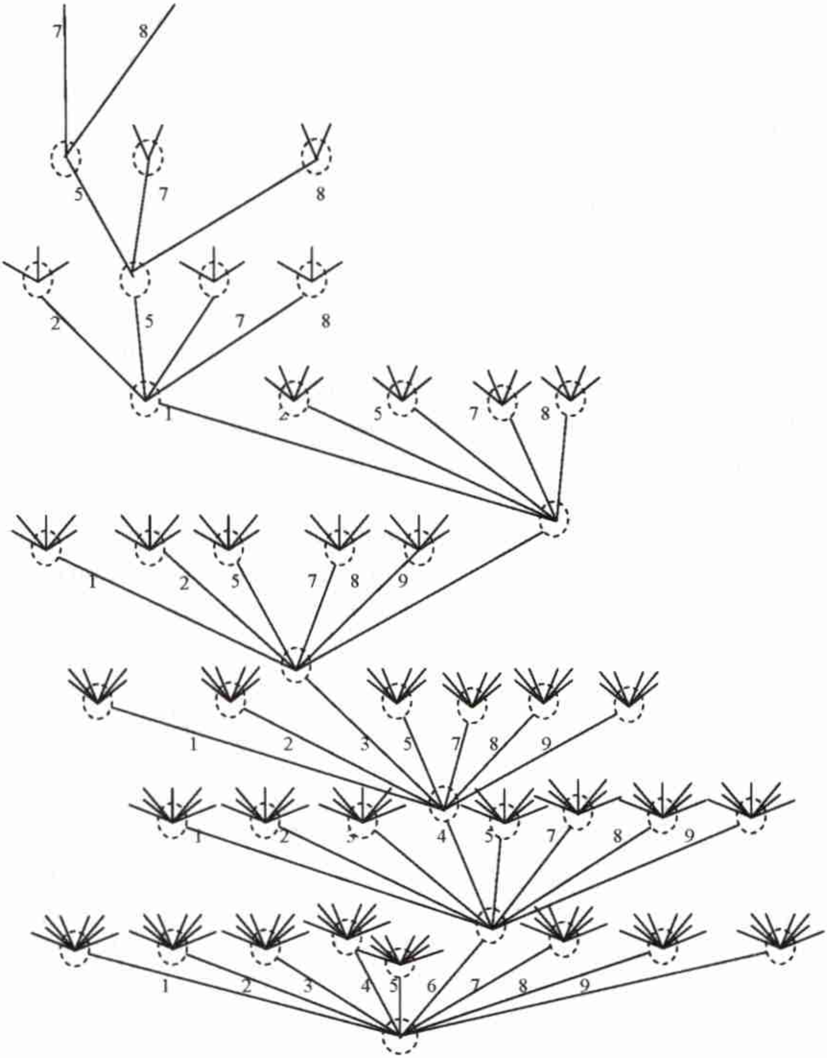
Шығарылуы.

Торларды нөмірлеу 11.3 а-суретте көрсетілген. 11.3 ә-суретте ойынның екі партиясы (жағдайы) келтірілген:

6 – 4 – 3 – 9 – 1 – 2 – 5 – 7,

6 – 4 – 3 – 9 – 1 – 2 – 5 – 8.

Осы ойынның сәйкес жүрістері (ойын бұтағы) 11.3 б-суретте көрсетілген.



11.3-сурет

11.4-мысалдан стратегиялар саны көп болған жағдайда ойын бұтағын құрудың күрделілігін (мүмкін еместігін) байқауға болады.

11.5-мысал.

Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. A ойыншы $\{1, 2\}$ сандар жиынынан x санын таңдайды.

2-жүріс. B ойыншы $\{1, 2\}$ сандар жиынынан A ойыншының таңдаған x санын біле отырып, y санын таңдайды.

B ойыншының есебінен *A* ойыншының ұтыс функциясы мына түрде берілсін: $F(1;1)=1$; $F(1;2)=-1$; $F(2;1)=-2$; $F(2;2)=2$.

Ойынның бұтағын тұрғызып, ақпараттық жиынды көрсету керек.

Шығарылуы. 11.4-суретте ойынның бұтағы тұрғызылып, үзілісті сызықтармен ойынның ақпараттық жиыны көрсетілді.

11.6-мысал.

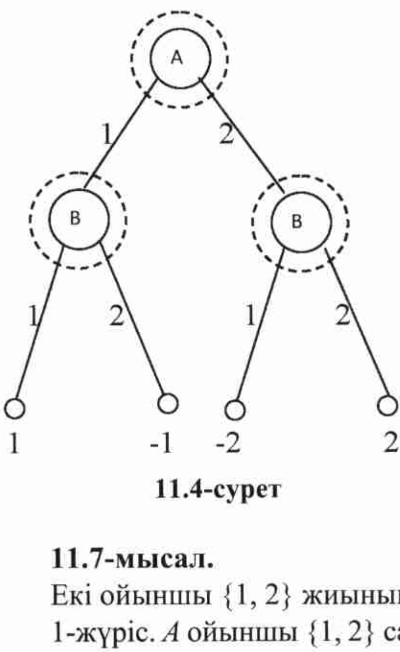
Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. *A* ойыншы $\{1, 2\}$ сандар жиынынан *x* санын таңдайды.

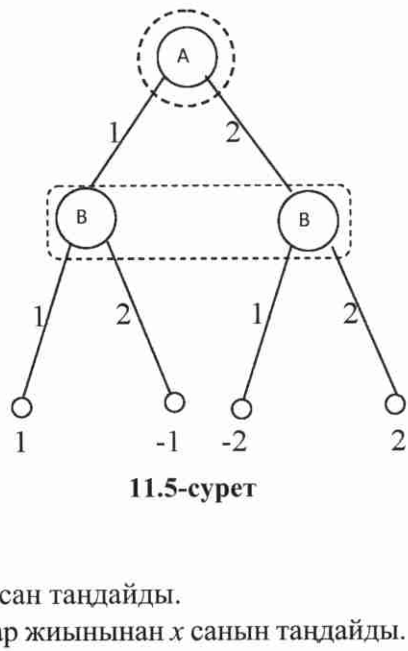
2-жүріс. *B* ойыншы *A* ойыншының қандай сан таңдағанын білмейді. Ол $\{1, 2\}$ екі сандар жиынынан *y* санын таңдайды.

B ойыншының есебінен *A* ойыншының ұтыс функциясы мына түрде берілсін: $F(1;1)=1$; $F(1;2)=-1$; $F(2;1)=-2$; $F(2;2)=2$. Ойынның бұтағын тұрғызып, ақпараттық жиынды көрсету керек.

Шығарылуы. 11.5-суретте ойынның бұтағы тұрғызылды және үзілісті сызықтармен ойынның ақпараттық жиыны көрсетілді.



11.4-сурет



11.5-сурет

11.7-мысал.

Екі ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан сан таңдайды.

1-жүріс. *A* ойыншы $\{1, 2\}$ сандар жиынынан *x* санын таңдайды.

2-жүріс. *B* ойыншы $\{1, 2\}$ сандар жиынынан *A* ойыншының таңдаған *x* санын біле отырып, *y* санын таңдайды.

A ойыншының ұтыс функциясы мына түрде берілсін:

$$F(1;1)=1;\ F(1;2)=-1;\ F(2;1)=-2;\ F(2;2)=2.$$

Берілген ойынды қалыпты формада жазу керек.

Шығарылуы. A ойыншыда екі стратегия бар:

A_1 стратегиясы $x = 1$, A_2 стратегиясы $x = 2$ сандарын таңдау.

A ойыншының 1-жүрісіндегі таңдауы B ойыншыға белгілі болғандықтан оның стратегиясын реттелген $[y_1, y_2]$ жұбы арқылы сипаттаған қолайлы.

Мұндағы y_1 ($y_1 = 1,2$) – A ойыншы $x = 1$ бірінші баламасын таңдаған жағдайдағы B ойыншының таңдайтын баламасы, ал y_2 ($y_2 = 1,2$) – A ойыншы $x = 2$ екінші баламасын таңдаған жағдайдағы B ойыншының таңдайтын баламасы.

Мысалы, B ойыншының [2, 1] стратегиясын таңдағаны егер 1-ші жүрісте A ойыншы $x = 1$ санын таңдаса, онда B ойыншы өзінің жүрісінде $y = 2$ санын таңдау керек екендігін білдіреді. Егер 1-жүрісте A ойыншы $x = 2$ санын таңдаса, онда осы стратегияға сәйкес B ойыншы өзінің жүрісінде $y = 1$ санын таңдау керек.

Сонымен, B ойыншыда 4 стратегия бар:

B_1 стратегиясы – [1, 1], кез келген x-ті таңдауында $y = 1$ санын таңдау;

B_2 стратегиясы – [1, 2], кез келген x-ті таңдауында $y = x$ санын таңдау;

B_3 стратегиясы – [2, 1], кез келген x-ті таңдауында $y \neq x$ санын таңдау;

B_4 стратегиясы – [2, 2], кез келген x-ті таңдауында $y = 2$ санын таңдау.

Енді A ойыншының ұтыстарын есептейік.

Айталық, A ойыншы A_1 стратегиясын ($x = 1$) таңдасын, ал B ойыншы B_2 стратегиясы – [1, 2] таңдасын. Сонда $x = 1$, ал [1, 2] стратегиясынан $y = 1$ саны таңдалынатыны шығады. Осыдан

$$F(x;y)=F(1;1)=1$$

Осылайша A ойыншының басқа ұтыстары есептелінеді.

Нәтижесінде төмендегі кестеде көрсетілген мәндерді аламыз:

		B_1	B_2	B_3	B_4
		$[1, 1]$	$[1, 2]$	$[2, 1]$	$[2, 2]$
A_1	$x = 1$	$F(1; 1)$	$F(1; 1)$	$F(1; 2)$	$F(1; 2)$
A_2	$x = 2$	$F(2; 1)$	$F(2; 2)$	$F(2; 1)$	$F(2; 2)$

немесе матрица түрінде:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix},$$

мұндағы жолдар A ойыншының стратегияларына, бағандар B ойыншының стратегияларына сәйкес келеді.

Алынған матрицаның ер нүктесі бар. Тиімді стратегия: $A_1 - x = 1$, $B_3 - [2, 1]$. Ойынның құны: $\nu = 1$.

Жауабы. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Қандай ойындар позициялық ойындар деп аталады?
2. Ақпараттық жиын ұғымы.
3. Ақпараттық жиынның мағынасы.
4. Позициялық ойынның құрылымы.
5. Толық ақпаратты ойыншы.
6. Толық емес ақпаратты ойындар.
7. Позициялық ойынды қалыптастыру ұғымы.
8. Ойынның қалыпты формасы деп қандай жиынтықты айтамыз?
9. Позиция, балама, цикл және т.б. ұғымдар.
10. Позициялық ойындарға мысалдар келтіріңіздер.
11-15 есептерде келтірілген ойындардың бұтағын тұрғызу керек. Ойынның таза стратегиялардағы (бар болса) немесе аралас стратегиялардағы шешімін табу керек. Ойынды қалыпты формада жазу керек.
11. Екі ойыншы кезектесіп тиынды тастайды. Тиынның екі жағы түсуі мүмкін: «Ц» – цифр, «Г» – герб. 1-ші және 3-ші қадамдарда бірінші ойыншы, 2-ші және 4-ші қадамдарда екінші ойыншы жүреді. әрбір гербке ойыншы 5 балдан ұпай жинайды, ал цифрға 10 балдан ұпай жинайды.

12. 1, 2, 3, 4 және 5 сандарының біреуі таңдалынады. Осы таңдалынған сан үшін ойыншылар жоғарғы шекарасын жорамалдап айту керек. Егер бір ойыншы ғана тапса, онда ол қарсыласынан бір бірлік алады. Егер екеуі де тапса, онда кімнің жоғарғы шекарасы қатаң кіші, сол ойыншы қарсыласынан бір бірлік алады. Басқа жағдайлардың бәрінде ойыншылардың бір де біреуі ештеңе алмайды.

13. Екі қыз өздерінің таңдаулары бойынша 0, 1 немесе 2 кәмпитті жасырады. Қыздардың әрқайсысы өздері жасырған кәмпиттердің жалпы санын табуға тырысады. Бірақ екінші табатын қыз бірінші қыздың айтқанынан басқа санды айтуы керек. Дұрыс тапқан қыз екіншісінен бір кәмпит алады, кері жағдайда ештеңе де алмайды.

14. *Антагонистикалық ойын.* Бірінші ойыншы бірінші жүре отырып $\{1, 2\}$ жиынынан бір санды таңдайды. Екінші ойыншы бірінші ойыншының таңдауын біле отырып, $\{1, 2\}$ жиынынан бір санды таңдайды. Бірінші ойыншы үшінші жүрісте екінші ойыншының таңдауын біле отырып және өзінің 1-ші қадамдағы таңдауын есінде сақтай отырып $\{1, 2\}$ жиынынан бір санды таңдайды. Осымен ойын тоқтатылады. Ал бірінші ойыншы F (екінші ойыншы $(-F)$) ұтысына ие болады, мұндағы F келесі түрде анықталады:

$F(1, 1, 1) = -3$, $\quad F(2, 1, 1) = 4$,

$F(1, 1, 2) = -2$, $\quad F(2, 1, 2) = 1$,

$F(1, 2, 1) = 2$, $\quad F(2, 2, 1) = 1$,

$F(1, 2, 2) = -5$, $\quad F(2, 2, 2) = 5$.

15. *Антагонистикалық емес ойын.* Ойын екі жүрістен тұрады.

Бірінші жүріс. Бірінші ойыншы $\{1, 2\}$ жиынынан бір санды таңдайды.

Екінші жүріс. Екінші ойыншы бірінші ойыншының таңдауын біле отырып $\{1, 2\}$ жиынынан бір санды таңдайды.

Ұтыс функциясының түрі:

а) $F_1(1, 1) = 1$, $\quad$ ә) $F_2(1, 1) = 2$,

$F_1(1, 2) = -1$, $\quad F_2(1, 2) = 1$,

$F_1(2, 1) = -2$, $\quad F_2(2, 1) = 1$,

$F_1(2, 2) = 2$. $\quad F_2(2, 2) = 2$.

12.1. Қалыпты формадағы коалициясыз ойын

$N=\{1, 2, ..., n\}$ – ойыншылар жиынынан, $\{X_i\}_{i\in N}$ – i-ші ойыншының таза стратегиялар жиынынан, $\{H_i\}_{i\in N}$ – ойыншылардың $X=\prod_{i=1}^{n} X_i$ таза стратегиялар жиынының декарттық көбейтіндісінде анықталған i-ші ойыншының ұтыс функциясынан тұратын $\Gamma=\left(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\right)$ жүйесі *коалициясыз ойын* деп аталады.

Егер ойыншылардың X_i таза стратегиялар жиыны ақырлы болса, онда ойын n ойыншылар қатысатын *ақырлы коалициясыз ойын* деп аталады.

Осындай ойында екі ойыншы қатысса, онда ол ойын *екі ойыншы қатысатын коалициясыз ойын* деп аталады. Екі ойыншы қатысатын коалициясыз ойын қалыпты түрде мына жүйемен анықталады:

$$\Gamma=\left(X_1, X_2, H_1, H_2\right),$$

мұндағы X_1, X_2 сәйкес бірінші және екінші ойыншылардың таза стратегиялар жиыны, $X_1\times X_2$ ойын жағдайларының жиыны, $H_1: X_1\times X_2\to R^1$, $H_2: X_1\times X_2\to R^1$ сәйкес бірінші және екінші ойыншылардың ұтыс функциялары.

12.2. Биматрицалық ойындар

Екі ойыншы қатысатын ақырлы коалициясыз ойын *биматрицалық ойын* деп аталады. Бұл сәйкес ұтыс матрицаларын екі матрица түрінде жазуға болатындығымен түсіндіріледі:

$$H_1=A=\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{n1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{1m} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix},\ H_2=B=\begin{pmatrix} \beta_{11} & \dots & \beta_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{m1} & \dots & \beta_{mn} \end{pmatrix},$$

A және B матрицасының сәйкес α_{ij} және β_{ij} элементтері – сәйкес бірінші және екінші ойыншылардың (i, j), $i \in \overline{M}$, $j \in \overline{N}$, $\overline{M} = \{\overline{1, \ldots, m}\}$, $\overline{N} = \{\overline{1, \ldots, n}\}$ жағдайындағы ұтыстары болып табылады.

Осы айтылғандарды ескеріп биматрицалық ойын былайша жүзеге асырылады: бірінші ойыншы матрицаның i-ші жолының нөмірін, екінші ойыншы (бір мезгілде және тәуелсіз) j-ші бағанның нөмірін таңдайды. Сонда бірінші ойыншы $\alpha_{ij} = H_1(x_i, y_j)$ ұтысына, екінші ойыншы $\beta_{ij} = H_2(x_i, y_j)$ ұтысына жетеді.

A және B матрицаларымен берілген биматрицалық ойынды әрбір элементі $(\alpha_{ij}, \beta_{ij})$, $i = 1, 2, \ldots, \overline{m}$, $j = 1, 2, \ldots, \overline{n}$ жұбы болып табылатын (A, B) матрицасымен беруге болады. A және B матрицаларымен анықталған ойынды $\Gamma(A, B)$ арқылы белгілейміз.

Егер екі ойыншы қатысатын коалициясыз ойында барлық $x \in X_1$, $y \in X_2$ үшін $H_1(x, y) = -H_2(x, y)$ теңдігі орындалса, онда Γ антагонистикалық ойын болып табылады.

12.2.1. Кооперативті емес биматрицалық ойындар

Кооперативті емес биматрицалық ойындар ойыншылардың максиминді стратегиясын іздеуге, яғни қарсыласының әрекеттерінен тәуелсіз максималды мүмкін болатын кепілденген ұтысты иемденуге әкеледі.

Ойыншылардың аралас стратегияларының мүмкін болатын жұбының жиынын $S = \{(p, q) \mid p \in S_1, q \in S_2\}$ түрінде белгілейік. Мұндағы

$$S_1 = \left\{ p = (p_1, p_2, \ldots, p_m) \,\middle|\, p_i \geq 0, i = 1, 2, ..., m, \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \right\},$$

$$S_2 = \left\{ q = (q_1, q_2, \ldots, q_n) \,\middle|\, q_j \geq 0, j = 1, 2, ..., n, \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \right\}.$$

Егер екі ойыншы сәйкес $p = (p_1, p_2, \ldots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$ аралас стратегияларын таңдаса, онда ойыншылардың ұтыстарының математикалық күтімі төмендегідей анықталады:

$$M_1(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_iq_j\ ,\ M_2(p,q)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}p_iq_j\ .$$

Бірінші және екінші ойыншылардың максиминді стратегиялары қарсыластарының жүрістерінен тәуелсіз оларды сәйкес кепілденген ұтыстармен қамтамасыз етеді:

$$\underline{v}=\max_{p\in S_1}\min_{q\in S_2}M_1(p,q),\ \bar{v}=\max_{q\in S_2}\min_{p\in S_1}M_2(p,q).$$

12.1-мысал.

«Жанұялық талас» ойыны.

Екі ойыншы (ерлі-зайыптылар) демалыс күні кешті қалай өткізетіндіктері туралы ақылдасады. Олардың әрқайсысының екі стратегиясы бар: боксты тамашалау (1-стратегия) немесе театрға барып дем алу (2-стратегия). Екеуі бірге театрға барғанды бірінші ойыншы бір бірлікке, 2-ойыншы екі бірлікке бағалайды; ал боксқа барғанды бірінші ойыншы екі бірлікке, 2-ойыншы бір бірлікке бағалайды. Егер ойыншылар екі жақта өткізетін болса, демалыс күні ойдағыдай өткен жоқ деп есептейді де, екі ойыншы үшін де пайдалылығы нөлмен бағаланады.

Максиминді стратегияларды тауып, алынған жауапты талдау керек.

Шығарылуы.

		B ойыншы	
		бокс	театр
A ойыншы	бокс	(2, 1)	(0, 0)
	театр	(0, 0)	(1, 2)

Ойыншылардың ұтыс матрицаларын жазамыз:

$$A=\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\text{ немесе }\begin{pmatrix}(2,1)&(0,0)\\(0,0)&(1,2)\end{pmatrix}.$$

$p=(p,1-p)$ және $q=(q,1-q)$ болсын, мұндағы $p,q\in[0,1]$ – ойыншылардың аралас стратегиялары. Ойыншылардың ұтыстарының математикалық күтімі:

$$M_1(p,q)=2pq+(1-p)(1-q)=(3p-1)q-p+1,$$

$$M_2(p,q) = pq + 2\cdot(1-p)(1-q) = (3q-2)p - 2q + 2\,.$$

Ойыншылардың ең жақсы кепілденген ұтыстары:

$$\underline{v} = \max_{p\in[0,1]}\min_{q\in[0,1]}((3p-1)q - p + 1) = \max\left\{\max_{p\in[0,1/3]}(2p),\ \max_{p\in[1/3,1]}(1-p)\right\} = \frac{2}{3}\,,$$

$$\bar{v} = \max_{q\in[0,1]}\min_{p\in[0,1]}((3q-2)p - 2q + 2) = \max\left\{\max_{q\in[0,2/3]} q,\ \max_{p\in[2/3,1]}(2-2q)\right\} = \frac{2}{3}\,.$$

Жауабы. Сәйкес максиминді стратегиялар: $p = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$ және $q = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$. Ал бұл A ойыншы демалыс күнгі кештің $\frac{1}{3}$-ін боксты тамашаласа және $\frac{2}{3}$-ін театрда өткізсе, ал B ойыншы кештің $\frac{1}{3}$-ін театрда өткізсе және $\frac{2}{3}$-ін боксты тамашаласа ойыншылар бір партия үшін $\frac{2}{3}$ ұтысқа жететінін білдіреді.

12.3. Коалициясыз ойындардағы тиімділік принциптері

H_i ұтыс функциясы i-ші ойыншының стратегиясымен қатар басқа ойыншылардың да таңдайтын стратегияларынан тәуелді.

Антагонистикалық ойындағы сияқты ойыншылардың ең үлкен ұтысты алуы дау-жанжал сипатында болады және қандай жүріс «жақсы» немесе тиімді болатыны шешілмеген болып келеді. Бұл жерде бірнеше тәсіл бар. Солардың бірі Нэш бойынша тепе-теңдік және оның әр түрлі жалпыламалары. Г ойыны антагонистикалық болған жағдайда Нэш бойынша тепе-теңдік антагонистикалық ойындардағы тиімділіктің негізгі принципін беретін тепе-теңдік ұғымымен бірдей болады.

$x = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ – Г ойынындағы еркін алынған жағдай, x_i – i-ші ойыншының қандай да бір стратегиясы болсын. x жағдайынан айырмашылығы i-ші ойыншының x_i стратегиясы x_i стратегиясымен алмастырылған жағдайды құрайық. Нәтижесінде $\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i', x_{i+1}, \ldots, x_n\right)$ жағдайын аламыз, және оны $\left(x \| x_i''\right)$

арқылы белгілейік. Егер x_i және x_i' өзара тең болса, беттессе, онда $\left(x\middle\|x_i''\right) = x$.

Егер барлық $x_i \in X_i$ және $i = 1, 2, ..., n$ үшін

$$H_i\left(x^*\right) \geq H_i\left(x^* \| x_i\right)$$

теңсіздігі ақиқат болса, онда $x^* = \left(x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*\right)$ жағдайы *Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайы* деп аталады.

Егер $x_i^* \in X_i$ стратегиясы Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайдың кем дегенде біреуіне енсе, онда x_i^* стратегиясы *тепе-теңдік стратегия* деп аталады.

Барлық $x \in X_1$, $y \in X_2$ үшін

$$H_1\left(x, y^*\right) \leq H_1\left(x^*, y^*\right),\ H_2\left(x^*, y\right) \leq H_2\left(x^*, y^*\right)$$

теңсіздігі орындалса, онда екі ойыншы қатысатын $\Gamma = \left(X_1, X_2, H_1, H_2\right)$ коалициясыз ойын үшін $\left(x^*, y^*\right)$ жағдайы тепе-теңдік жағдай болып табылады.

$S \subset N$ – ойыншылар жиынының ішкі жиыны (коалиция) және $x = \left(x_1, \ldots, x_n\right)$ – Г ойындағы жағдай болсын. $\left(x \| x_S'\right)$ арқылы x жағдайындағы x_i, $i \in S$ стратегиясын осы жағдайдағы $x_i' \in X_i$, $i \in S$ стратегиясымен алмастырғанда алынатын жағдайды белгілейміз.

Егер кез келген $S \subset N$ коалициясы және $x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ үшін

$$\sum_{i \in S} H_i\left(x^*\right) \geq \sum_{i \in S} H_i\left(x^* \| x_S\right)$$

теңсіздігі орындалса, онда x^* жағдайы *әлді тепе-теңдік* деп аталады.

Егер барлық $i \in N$ үшін

$$H_i(x) \geq H_i\left(\bar{x}\right)$$

және кем дегенде бір $i_0 \in N$ үшін

$$H_{i_0}(x) > H_{i_0}\left(\bar{x}\right)$$

теңсіздігі орындалатындай $x \in X$ жағдайы болмаса, онда коалициясыз Г ойынындағы $\overline{x}$ жағдай *Парето бойынша тиімді* деп аталады.

Парето бойынша тиімді жағдай тепе-теңдік жағдайға қарағанда, екі ойыншы үшін де қолайлы жағдайға әкелетін тиімді принцип болып табылады.

Тепе-теңдік жағдай мен Парето бойынша тиімді жағдайлардағы маңызды айырмашылықтар:

а) тепе-теңдік жағдайда бірде-бір ойыншы жалғыз өзі әрекет жасай отырып өзінің ұтысын арттыра алмайды;

ә) Парето бойынша тиімді жағдайда барлық ойыншылар бірлесіп әрекет жасай отырып әрқайсысының ұтысын арттыра алмайды.

Сонымен қатар, тепе-теңдік жағдайдағы бекітілген таңдау туралы келісім әрбір жеке ойыншының ауытқуын тоқтатады. Парето бойынша тиіміді жағдайда бас тартқан ойыншы кейбір жағдайларда елеулі үлкен ұтысқа жетуі мүмкін.

1-ші және 2-ші ойыншылардың сәйкес ең жақсы жауаптарының жиынын Z^1 және Z^2 арқылы белгілейміз, мұндағы

$$Z^1 = \left\{(x_1, x_2) \middle| H_1(x_1, x_2) = \sup_{y_1} H_1(y_1, x_2)\right\},$$

$$Z^2 = \left\{(x_1, x_2) \middle| H_2(x_1, x_2) = \sup_{y_2} H_2(x_1, y_2)\right\}.$$

Егер $(x_1, x_2) \in Z'$ және

$$\overline{H}_i = H_i(x_1, x_2) = \sup_{(y_1, y_2) \in Z^j} H_i(y_1, y_2) \qquad (12.1)$$

теңдігі орындалса, онда $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ жағдайын екі қатысушысы бар Г ойынында *Штакельберг бойынша і-ші тепе-теңдік* деп аталады, мұндағы $i = 1, 2$, $i \neq j$.

і-ші тепе-теңдікті былайша түсінуге болады: 1-ші ойыншы екі ойыншының да H_1, H_2 ұтыс функцияларын білетінін, ал бұл өз алдына 1-ші ойыншының кез келген x_1 стратегиясына 2-ші ойыншының ең жақсы Z^2 жауаптар жиынын білетінін көрсетеді.. Сонда ол осы ақпаратты біле отырып және (12.1) шартқа сәйкес x_i стратегиясын таңдай отырып өзінің ұтысын максимизациялайды. Осылайша H_i – бұл i-ші ойыншының ұтысы.

Лемма 12.1. $Z(\Gamma)$ – екі ойыншы қатысатын Г ойындағы Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайларының жиыны болсын. Сонда

$$Z(\Gamma) = Z^1 \cap Z^2.$$

Егер

$$\overline{H}_i \le H_i(x_1, x_2),\ i = 1, 2$$

теңсіздігі орындалатындай $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ жағдайы болмаса, онда екі ойыншы қатысатын $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ ойынында *көшбасшылық үшін күрес* орын алады деп айтады.

Теорема 12.1. Егер екі ойыншы қатысатын $\Gamma = (X_1, X_2, H_1, H_2)$ ойынында әр түрлі

$$(H_1(x_1, x_2), H_2(x_1, x_2)) \ne (H_1(y_1, y_2), H_2(y_1, y_2))$$

ұтыс векторлары бар, Парето бойынша тиімді және Нэш бойынша бірқалыпты кем дегенде екі $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$ жағдайлары бар болса, онда Г ойынында көшбасшылық үшін күрес орын алады.

12.4. Коалициясыз ойындардың аралас кеңейтілуі

Коалициясыз ойындарда Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайын аралас стратегиялар класында қарастырған дұрыс. Антагонистикалық ойындардағы сияқты ойыншының аралас стратегиясын таза стратегиялар жиынында ықтималдық үлестіруімен теңестіреміз.

$$\Gamma = (N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$$

еркін алынған ақырлы коалициясыз ойын болсын. Анықтылық үшін Г ойында 1-ші ойыншының m_i стратегиясы бар болсын.

μ_i арқылы i ойыншының еркін алынған аралас стратегиясын, яғни X_i стратегиялар жиынындағы таза стратегиялар деп аталатын қандай да бір ықтималдық үлестіруін белгілейік. $\mu_i(x_i)$ арқылы μ_i стратегиясы $x_i \in X_i$ таза стратегиясына тіркелетін ықтималдықты белгілейміз. i-ойыншының барлық аралас стратегиялар жиынын $\overline{X}_i$ арқылы белгілейміз.

$i \in N$ ойыншылардың әрқайсысы өзінің μ_i аралас стратегиясын, яғни $\mu_i(x_i)$ ықтималдықпен таза стратегияларды таңдасын. $x = (x_1, \ldots, x_n)$ жағдайының пайда болу ықтималдығы оны құрайтын стратегияларды таңдау ықтималдықтарының көбейтіндісіне тең болсын деп ұсынамыз, яғни

$$\mu(x) = \mu_1(x_1) \times \ldots \times \mu_n(x_n). \qquad (12.2)$$

(12.2) формула $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ аралас стратегиялармен анықталатын $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ барлық жағдайлардың жиынында ықтималдық үлестіруді анықтайды. $\mu = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ жиынтығы *аралас стратегиялардағы жағдай* деп аталады. μ аралас стратегиялардағы жағдай қандай да бір ықтималдықтармен таза стратегиялардағы әр түрлі жағдайларды жүзеге асырады, сондықтан әрбір ойыншының ұтыс функциясының мәні кездейсоқ шама болып табылады. i-ші ойыншының μ жағдайында ұтыс функциясының мәні ретінде осы кездейсоқ шаманың математикалық күтімі алынады:

$$K_i(\mu) = \sum_{x \in X} H_i(x)\mu(x) = \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_n \in X_n} H_i(x_1, \ldots x_n) \times \mu_1(x_1) \times$$

$$\times \mu_2(x_2) \times \ldots \times \mu_n(x_n),\ i \in N,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in X \qquad (12.3)$$

$$K_i\left(\mu \| x_j'\right) = \sum_{x_1 \in X_1} \cdots \sum_{x_{j-1} \in X_{j-1}} \sum_{x_{j+1} \in X_{j+1}} \sum_{x_n \in X_n} H_i\left(x \| x_j'\right) \prod_{k \neq j} \mu_k(x_k) \qquad (12.4)$$

белгілеуін енгіземіз.

μ_j' – Г ойынындағы j-ші ойыншының еркін алынған аралас стратегиясы болсын. (12.4) қатынасты $\mu_j'\left(x_j'\right)$ шамасына көбейтіп және барлық $x_j' \in X_j$ бойынша қосындысын есептесек

$$\sum_{x_j'} K_i\left(\mu \| x_j'\right) \mu \| x_j' = K_i\left(\mu \| x_j'\right).$$

N – ойыншылар жиыны, $\overline{X}_i$ – әрбір i-ші ойыншының аралас стратегиялар жиыны, ал ұтыс функциясы (12.3) теңдікпен анықталатын $\overline{\Gamma} = \left(N, \left\{\overline{X}_i\right\}_{i\in N}, \left\{K_i\right\}_{i\in N}\right)$ ойыны ойынының *аралас кеңейтілуі* деп аталады.

(mxn) биматрицалық $\Gamma(A, B)$ ойындар үшін сәйкес 1-ші, 2-ші ойыншылардың X_1, X_2 аралас стратегиялар жиынын анықтауға болады:

$$X_1 = \left\{x \,\middle|\, xu = 1, x \geq 0, x \in R^m\right\},$$

$$X_2 = \left\{y \,\middle|\, yw = 1, y \geq 0, y \in R^n\right\},$$

мұндағы $u = (1, ..., 1) \in R^m$, $w = (1, ..., 1) \in R^n$ және аралас стратегияларындағы (x, y) жағдайларындағы ойыншылардың сәйкес K_1, K_2 ұтыстарын математикалық күту ретінде анықтауға болады:

$$K_1(x, y) = xAy,\ K_2(x, y) = xBy,\ x \in X_1,\ y \in X_2.$$

Демек, $\Gamma(A, B)$ ойынының $\overline{\Gamma}(A, B)$ аралас кеңейтілуі құрылды, яғни екі ойыншысы бар коалициясыз ойын алынды:

$$\overline{\Gamma}(A, B) = (X_1, X_2, K_1, K_2).$$

Биматрицалық ойындар үшін $M_x = \{i | \xi_i > 0\}$ жиыны 1-ші ойыншының $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m)$ *аралас стратегиясының спектрі* деп аталады, ал $M_x = M$, $M = (1, 2, ..., m)$ үшін x стратегиясын *жете аралас стратегиясы* деп атайды.

Осылайша, $N_y = \{j | \eta_j > 0\}$ жиыны 2-ші ойыншының $y = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n)$ *аралас стратегиясының спектрі*, ал $N_y = N$, $N = (1, 2, ..., n)$ үшін y стратегиясының *жете аралас стратегиясы* анықталады.

Егер кез келген i-ші ойыншы үшін және оның кез келген μ_i аралас стратегиясы үшін

$$\sum_{x_j} K_i\left(\mu^* \| \mu_j\right) \leq K_i\left(\mu^*\right),\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

теңсіздігі орындалса, онда μ^* жағдайы Γ ойынындағы аралас стратегияларда *Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайы* деп аталады.

12.5. Тиімді шешімдердің қасиеттері

1^0. **Теорема 12.2**. $\Gamma=(X_1, X_2, H_1, H_2)$ ойынындағы аралас стратегияларда (μ^*, ν^*) жағдайы тепе-теңдік жағдай болу үшін ойыншылардың барлық $x\in X_1$ және $y\in X_2$ таза стратегиялар үшін

$$K_1(x, \nu^*)\le K_1(\mu^*, \nu^*),$$

$$K_2(x, j) = K_2(x, y)$$

теңсіздіктерінің орындалуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

2^0. **Теорема 12.3**. $\Gamma=(A, B)$ – $(m\times n)$ биматрицалық ойын және $(x, y\in Z[\Gamma])$ – аралас стратегиялардағы Нэш бойынша тепе-теңдік жағдай болсын. Сонда барлық $i\in M_x$, $j\in N_y$ үшін

$$K_1(i, y)=K_1(x, y),$$

$$K_2(x, j) = K_2(x, y)$$

теңдіктері орындалады, мұндағы $M_x(N_y)$ – $x(y)$ аралас стратегиясының спектрі.

3^0. **Теорема 12.4**. $\Gamma=(A, B)$ – $(m\times n)$ биматрицалық ойын және A, B өзгеше емес матрицалар болсын. Егер Γ ойынының тепе-теңдіктің жете аралас жағдайы болса, онда ол жалғыз болады және келесі формула бойынша есептеледі:

$$x=\upsilon_2 uB^{-1}, \tag{12.5}$$

$$x=\upsilon_1 A^{-1}u, \tag{12.6}$$

мұндағы

$$\upsilon_1=\frac{1}{uA^{-1}u},\ \upsilon_2=\frac{1}{uB^{-1}u}. \tag{12.7}$$

Керісінше, (12.5)-(12.6) теңдіктермен анықталған $x, y\in R^m$ векторлары үшін $x\ge 0$, $y\ge 0$ болса, онда (x, y) жұбы $\Gamma=(A, B)$ ойынында аралас стратегиялардағы (υ_1, υ_2) тепе-теңдік ұтыс векторыман берілген тепе-теңдік жағдайын құрайды.

12.6. 2×2 биматрицалық ойындар. Тепе-теңдік жағдайды іздеу

2×2 биматрицалық ойында ойыншылардың ұтыс матрицалары

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \tag{12.8}$$

түрінде,

$$p_1=p,\ p_2=1-p,\ q_1=q,\ q_2=1-q,$$

ықтималдықтарымен беріледі.

Орташа ұтыстары

$$H_A(p,q)=a_{11}pq+a_{12}p(1-q)+a_{21}(1-p)q+ \\ +a_{22}(1-p)(1-q), \tag{12.9}$$

$$H_B(p,q)=b_{11}pq+b_{12}p(1-q)+b_{21}(1-p)q+ \\ +b_{22}(1-p)(1-q) \tag{12.10}$$

формулаларымен есептеледі, мұндағы

$$0\le p\le 1,\ 0\le q\le 1.$$

Егер $0\le p\le 1$, $0\le q\le 1$ шарттарын қанағаттандыратын, кез келген p және q сандары үшін бір мезгілде

$$H_A(p,q^*)\le H_A(p^*,q^*),\ H_B(p^*,q)\le H_A(p^*,q^*)$$

теңсіздіктері орындалса, онда

$$(p^*,q^*),\ 0\le p^*\le 1,\ 0\le q^*\le 1$$

сандар жұбы *тепе-теңдік жағдайды* анықтайды.

Теорема 12.5 (*Дж.Нэш*). Кез келген биматрицалық ойынның аралас стратегияда кем дегенде бір тепе-теңдік жағдайы болады.

Теорема 12.6

$$H_A(p,q^*)\le H_A(p^*,q^*),\ H_B(p^*,q)\le H_A(p^*,q^*)$$

теңсіздігінің орындалуы

$$H_A(0, q^*) \le H_A(p^*, q^*),\ H_B(p^*, 0) \le H_A(p^*, q^*)$$
$$H_A(1, q^*) \le H_A(p^*, q^*),\ H_B(p^*, 1) \le H_A(p^*, q^*)$$

теңсіздіктерінің орындалуымен пара-пар.

(12.9), (12.10) орташа ұтыстарды ықшамдап жазсақ

$$H_A(p, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})pq + (a_{12} - a_{22})p +$$
$$+ (a_{21} - a_{22})q + a_{22},$$
$$H_B(p, q) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})pq + (b_{12} - b_{22})p +$$
$$+ (b_{21} - b_{22})q + b_{22}$$

қатынасын аламыз.

$p = 1$ болғанда

$$H_A(1, q) = (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})q + a_{12} + (a_{21} - a_{22})q,$$

$p = 0$ болғанда

$$H_A(0, q) = (a_{21} - a_{22})q + a_{22}.$$
$$H_A(p, q) - H_A(1, q) = Cpq - \alpha p - Cq + \alpha = Cq(p-1) - \alpha(p-1) =$$
$$= (p-1)(Cq - \alpha),$$
$$H_A(p, q) - H_A(0, q) = Cpq - \alpha p = p(Cq - \alpha),$$

мұндағы

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22},\ \alpha = a_{21} - a_{22}.$$

Егер $(p,\ q)$ сандар жұбы тепе-теңдік нүктесін анықтаса, онда осы айырымдар теріс емес болады:

$$H_A(p, q) - H_A(1, q) \ge 0,\ H_A(p, q) - H_A(0, q) \ge 0$$

немесе

$$(p-1)(Cq - \alpha) \ge 0, \qquad (12.11)$$
$$p(Cq - \alpha) \ge 0. \qquad (12.12)$$

Сәйкес осы есептеулерді $H_B(p, q)$ функциялары үшін жүргіземіз:

$q = 1$ болғанда

$$H_B(p,1) = (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})p + (b_{12} - b_{22})p + b_{21},$$

$q = 0$ болғанда

$$H_B(p,0) = (b_{12} - b_{22})p + b_{22}.$$

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) = (q-1)(Dp - \beta),$$

$$H_B(p,q) - H_B(p,0) = q(Dp - \beta),$$

мұндағы $D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$, $\beta = b_{22} - b_{21}$.

Егер (p, q) сандар жұбы тепе-теңдік нүктесін анықтаса, онда осы айырымдар теріс емес болады:

$$H_B(p,q) - H_B(p,1) \geq 0,$$

$$H_B(p,q) - H_B(p,0) \geq 0$$

немесе

$$(q-1)(Dp - \beta) \geq 0, \tag{12.13}$$

$$q(Dp - \beta) \geq 0. \tag{12.14}$$

Сонымен (12.8) ұтыс матрицаларымен берілген биматрицалық ойындарында жұбы тепе-теңдік жағдайды анықтау үшін (12.11), (12.12), (12.13), (12.14) теңсіздіктерінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

12.2-мысал.

«Жанұялық талас» ойыны.

Екі ойыншы (ерлі-зайыптылар) демалыс күні кешті қалай өткізетіндіктері туралы ақылдасады. Олардың әрқайсысының екі стратегиясы бар: боксты тамашалау (1-стратегия) немесе театрға барып дем алу (2-стратегия). Екеуінің бірге театрға барғаны бірінші ойыншы үшін бір бірлікке, екінші ойыншы үшін екі бірлікке бағаланады; ал боксқа барғаны бірінші ойыншы үшін екі бірлікке, екінші ойыншы бір бірлікке бағаланады. Егер ойыншылар екі жақта өткізетін болса, демалыс күні ойдағыдай өткен жоқ деп есептейді де, екі ойыншы үшін де пайдалылығын нөлмен бағалайды.

Ойынның тепе-теңдік нүктесін, ойыншылардың аралас стратегияларын және орташа ұтыстарын табу керек. Биматрицалық ойынды нөлдік қосындылы екі матрицалық ойынға бөліп, нәтижелерін талдау керек.

Шығарылуы.

$$A = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} б & m \end{array} \\ \begin{array}{c} б \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}, \quad B = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cc} б & m \end{array} \\ \begin{array}{c} б \\ m \end{array} & \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \end{array}$$

C, α, D және β шамаларын табамыз.

$$C = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22} = 2 - 0 - 0 + 1 = 3,$$

$$\alpha = a_{22} - a_{12} = 1 - 0 = 1;$$

$$D = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22} = 1 - 0 - 0 + 2 = 3,$$

$$\beta = b_{22} - b_{21} = 2 - 0 = 2.$$

Сонда

(12.11) және (12.12) формулаларды пайдаланып

$$(p-1)(3q-1) \geq 0, \tag{12.15}$$

$$p(3q-1) \geq 0 \tag{12.16}$$

теңсіздіктерін, (12.13) және (12.14) формулаларды пайдаланып

$$(q-1)(3p-2) \geq 0, \tag{12.17}$$

$$q(3p-2) \geq 0 \tag{12.18}$$

теңсіздіктерін аламыз.

Алдымен (12.15), (12.16) теңсіздіктерінің сол жағын қарастырайық. Үш жағдай болуы мүмкін:

1) $p = 1$; 2) $p = 0$; 3) $0 < p < 1$.

Осы жағдайлардың әр қайсысына жеке-жеке тоқталайық:

1. $p = 1$.

$$(p-1)(3q-1) \geq 0 \;\Rightarrow\; 0 \geq 0$$

$$p(3q-1) \geq 0 \;\Rightarrow\; 3q - 1 \geq 0 \;\Rightarrow\; q \geq \frac{1}{3}.$$

2. $p = 0$.

$$(p-1)(3q-1) \geq 0 \Rightarrow -(3q-1) \geq 0 \Rightarrow 3q-1 \leq 0 \Rightarrow q \leq \frac{1}{3},$$

$$p(3q-1) \geq 0 \Rightarrow 0 \geq 0.$$

3. $0 < p < 1$

$$(p-1)(3q-1) \geq 0 \Rightarrow 3q-1 \leq 0 \Rightarrow q \leq \frac{1}{3},$$

$$p(3q-1) \geq 0 \Rightarrow 3q-1 \geq 0 \Rightarrow q \geq \frac{1}{3}.$$

Бұл $q = \frac{1}{3}$ жағдайында ғана мүмкін.

Яғни: 1. $p = 1,\ q \geq \frac{1}{3}$;

2. $p = 0,\ q \leq \frac{1}{3}$;

3. $0 < p < 1,\ q = \frac{1}{3}$.

Үш жағдайда алынған нәтижелердің графигін сызайық. Тік бұрышты координаталар жүйесінде бірлік квадрат ($0 \leq p \leq 1$, $0 \leq q \leq 1$) тұрғызамыз (12.1-сурет). Суреттен көріп (ерекше қара сызықпен сызылған) отырғанымыздай сынық аламыз.

Енді (12.17), (12.18) формулалардың сол жағын қарастырайық. Бұл жерде де үш жағдай болуы мүмкін:

1) $q = 1$; 2) $q = 0$; 3) $0 < q < 1$.

(12.11) және (12.12) формулалардың сол жағын қарастырған жағдайдағы амалдарды орындай отырып мына нәтижелерді аламыз:

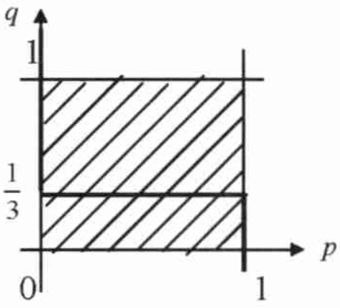
1. $q = 1,\ p \geq \frac{2}{3}$;

2. $q = 0,\ p \leq \frac{2}{3}$;

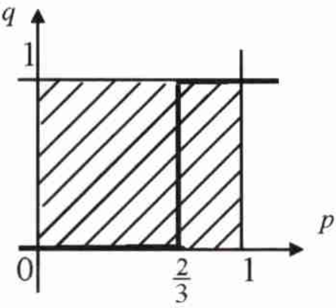
3. $0 < q < 1,\ p = \frac{2}{3}$.

Осы үш жағдайдың графигін тұрғызамыз (12.2-сурет).

Алынған нәтижелерді біріктіреміз (12.3-сурет).



12.1-сурет

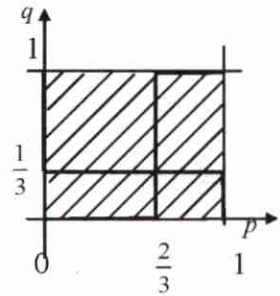


12.2-сурет

Алынған сынықтардың ортақ нүктесі – тепе-теңдік нүктесі – $\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$ координатасымен берілген нүкте.

Ойыншылардың сәйкес аралас стратегиялары:

$$P = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\},\ Q = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}.$$



12.3-сурет

Ал ойыншылардың орташа ұтысы:

$$H_A(p, q) = Cpq - \alpha p - (a_{21} - a_{22})q + a_{22} =$$

$$= 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} - \frac{2}{3} - (0-1)\cdot\frac{1}{3} + 1 = \frac{4}{3},$$

$$H_B(p, q) = Dpq + (b_{12} - b_{22})p + Dq + b_{22} = 3\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} +$$

$$+ (0-2)\cdot\frac{2}{3} + 3\cdot\frac{1}{3} + 2 = \frac{7}{3};$$

$$H_A(p, q) = \frac{4}{3},\ H_B(p, q) = \frac{7}{3}.$$

Қарастырылып отырған биматрицалық ойынды нөлдік қосындылы екі матрицалық ойынға бөліп көрейік.

1. A матрицасымен берілген ойын: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Бұл ойынды өзімізге таныс әдістердің кез келген біреуімен шығара отырып, A ойыншы үшін $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$; B ойыншы үшін $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ тиімді аралас стратегияларын табамыз, $v = \frac{2}{3}$.

2. B матрицасымен берілген ойын: $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Бұл ойынды да өзімізге таныс әдістердің кез келген біреуімен шығара отырып, B ойыншы үшін $\left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; A ойыншы үшін $\left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$ тиімді аралас стратегияларын табамыз, $v = \frac{2}{3}$.

Жауабы: A ойыншының аралас стратегиясы $P = \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right\}$; B ойыншының аралас стратегиясы $Q = \left\{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right\}$.

Алынған нәтижелерді салыстыру барысында, келесі ескертулерді аламыз.

Ескерту. Егер әрбір ойыншы осы ойында (өзінің ұтыс матрицасы үшін) өзінің стратегиясын ұстаса, онда оның тиімді орташа ұтысы оның тепе-теңдік жағдайындағы ұтысымен беттеседі. Ойыншы өзінің ұтыс матрицасымен екінші ойыншының (өзінікін емес!) тиімді аралас стратегиясын таба алады.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Қандай ойын коалициясыз ойын деп аталады?
2. Биматрицалық ойын ұғымы.
3. Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайы.
4. Тепе-теңдік стратегия деген не?
5. Парето бойынша тиімді стратегия.
6. Тепе-теңдік жағдай мен Парето бойынша тиімді жағдайлардағы маңызды айырмашылықтарды атаңыз.
7. Штакельберг бойынша i-ші тепе-теңдік.
8. Аралас стратегиялардағы жағдай ұғымы.
9. Аралас стратегиясының спектрі.

10. Тиімді шешімдердің қасиеттері.

11-15 есептерде берілген ойынның тепе-теңдік нүктесін, ойыншылардың аралас стратегияларын және орташа ұтыстарын табу керек. Биматрицалық ойынды нөлдік қосындылы екі матрицалық ойынға бөліп, нәтижелерін талдау керек.

11. $A=\begin{pmatrix} -10 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$

12. $A=\begin{pmatrix} -1 & -9 \\ 0 & -6 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ -9 & -6 \end{pmatrix}.$

13. $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}.$

14. $A=\begin{pmatrix} -5 & 10 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} -5 & 0 \\ 10 & 3 \end{pmatrix}.$

15. $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$

13.1. Көптік ойын. Кіріспе

n адам қатысатын ойынның қалыпты формасы мына түрде беріледі:

$$\Gamma = \left(X_i, H_i, i \in N\right)$$

мұндағы N – n ойыншыдан тұратын жиын, X_i – i-ші ойыншының таза стратегиялар жиыны, H_i – i-ші ойыншының ұтыс функциясы. $(x_1, x_2, ..., x_n)$ жағдайында i-ші ойыншы $H_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ шамасын алады. Антагонистикалық ойындардағы сияқты, әрбір ойыншының мақсаты – өзінің ұтысын максимизациялау.

N жиынының кез келген S ішкі жиыны коалицияны береді. Коалиция бір ғана ойыншыдан тұруы мүмкін немесе бос та болуы мүмкін. Барлық коалициялар жиынын 2^N арқылы белгілейміз. N жиынындағы барлық коалициялар саны 2^n мәніне тең, мұндағы n – N-дегі ойыншылар саны.

Көптік ойын мен антагонистикалық ойындардың арасындағы маңызды айырмашылығы ойыншылар арасында келісімге келуге, хабар алмасуға мүмкіндік болуында, яғни коалиция құру мүмкіндігінде. Осы мағынада көптік ойындарды коалиция құруда ойын ережесіне қойылатын шектеулер бойынша жіктеуге болады. Келісімдердегі шектеулер есебінің үш тәсілін қарастырайық.

1. Ойыншылар өз ара хабарласа алмайды немесе хабарласқылары келмейді, ешқандай келісім жасаспайды. Мұндай жағдайда коалициясыз ойындар сияқты қалыптастырылады

2. Келісімге қандай да бір шектеулер қойылады. Осындай нақты жағдай қиылыспайтын коалицияларға әкеледі, және коалицияның ішінде толық қарым-қатынас жасауға болады, ал олардың арасында талғаусыздық, не бәсекелестік, не антагонизм орын алады. Ойыншыларды осылайша коалицияға бөлу *коалициялық құрылым* деп аталады. Бұл жағдайда біз коалиция бойынша ойыншыларды қандай да бір бастапқы бөлу жағдайындағы ойынды қарастырамыз.

3. Барлық ойыншылар арасында кез келген логикалық мүмкін

болатын келісім болуы мүмкін. Мұндай еркін қарым-қатынас жасау көп жағдайда, егер, әрине, ойыншы максималды коалицияда кез келген басқа коалицияға қарағанда табысқа ие болса, барлық ойыншыларды үлкен бір коалицияға біріктіруге әкеледі.

Келісім бар жағдайдағы көптік ойында *бөлінгіштік* (трансферабельділік) немесе *бөлінгіштік емес* (трансферабельді емес) маңызды болып табылады. Бірінші жағдайда ойыншылар өздерінің ұтыстарын салыстыра алады, жалпы пайданы бөлуге және қажет болса өзінің ұтысының бөлігін басқа ойыншыларға беруге мүмкіндігі болады, яғни *жанама төлемдер* жүзеге асырылады. Бөлінетін ұтыстармен берілген ойын *классикалық кооперативті ойындар* немесе *трансферабельді ұтыстармен берілген кооперативті ойындар* деп аталады.

Бөлінбейтін ұтыстармен берілген ойындарда жанама төлемдер болмайды. Ойыншылардың бірлескен әрекеттер нәтижесі жалпы табыспен емес, компоненттері осы коалицияның кепілденген мүшелері бола алатын, қандай да бір ұтыс векторларының жиынымен өрнектеледі. Мұндай ойындар *жанама төлемдері жоқ кооперативті ойындар* немесе *трансферабельді емес ұтыстармен берілген кооперативті ойындар* деп аталады.

13.2. Трансферабельді ұтыстармен берілген кооперативті ойындар

Қарама-қарсы емес қызығушылығы бар ойыншылардың ұтыстары трансферабельді $\Gamma = (Y_i, M_i, i \in N)$ көптік ойынды қарастырайық. Айталық, кез келген ойыншылардың және ойыншылар тобының арасында келісім жасасу ойын ережесінде рұқсат етілсін. Сонда Г ойынын трансферабельді ұтыстармен берілген кооперативті ойындар ретінде қарастыруға болады.

Ойыншылар жалпы пайда максималды болатындай стратегияны таңдайды. Бұл жердегі маңызды мәселе жалпы пайданы ойыншыларға қалай бөліп беру керектігінде. Сондықтан кооперативті ойындар стратегия емес, бөліс ойыны болып табылады.

13.1-мысал.

A, B, C үш жұмысшылардың ойынын қарастырайық. Бір сменада A ойыншы – 10 бірлік, B – 9 бірлік, C – 3 бірлік табыс таба алады. 2 немесе 3 адамнан тұратын кез келген бригада құруға рұқсат етіледі. Бригадалардың табатын табыстары мынандай болсын: AB – 20, BC – 15, AC – 16, ABC – 27. Ең көп табыс табу үшін жұмысшылар қалай әрекет етулері керек, және осы табыстың көлемі қандай?

Шығарылуы. Табыс векторын $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ арқылы белгілейік. Егер ойыншылар келісімге келіссе және ABC коалициясын құрса, онда олар ең көп табысқа – 27 бірлікке ие болады. Оны жұмысшыларға әр түрлі тәсілдермен бөлуге болады. Мысалы, ξ_1=12, ξ_2=11, ξ_3=5. Осындай түрде бөлген кезде не жеке ойыншылардан, не бригадалардан ешқандай қарсылық болмайды, себебі, A ойыншы үшін 12>10, B үшін 11>9, C үшін 5>3; AB бригадасы үшін 12+11>20, BC үшін 11+5>15, AC үшін 12+5>16, ABC үшін 12+11+5>27. Бұл жағдайда ξ векторы орнықты болып табылады.

Жауабы. Табыс көлемі: ξ_1=12, ξ_2=11, ξ_3=5.

13.3. Ойынның характеристикалық функциясы

13.1-мысалда ξ=(12, 11, 5) векторы барлық ойыншыларды қанағаттандыратынын анықтау үшін коалиция мүмкіндіктерін бағалайтын шамаларды пайдаландық. Ойындар теориясында мұндай шама *коалицияның характеристикалық функциясы* деп аталады.

Характеристикалық функция коалициядан басқа барлық ойыншылардың әрекеттерінен тәуелсіз кепілдік беретін ұтыстың максималды шамасын көрсетеді. K коалициясының характеристикалық функциясын $u(K)$ арқылы белгілейміз.

$$u(\varnothing)=0 \tag{13.1}$$

деп есептеу қабылданған, мұндағы $\varnothing$ – бос коалиция. Характеристикалық функция аргументтен тәуелді сияқты, жиыннан тәуелді функция болып табылады.

Егер u функциялар жиыны келесі қасиетті

$$u(K \cup R) \geq u(K) + u(R) \tag{13.2}$$

қанағаттандырса, онда ол *супераддитивті* деп аталады.

u функциясының супераддитивті қасиетінен кез келген қиылыспайтын $K_1, ..., K_l$ коалициялары үшін

$$\sum_{i=1}^{l} u(S_i) \leq u(N)$$

теңсіздігі алынады.

Осыдан, дербес жағдайда, осы коалициялардың жалпы кепілденген ұтысы барлық ойыншылардың $u(N)$ максималды ұтысынан артық болатындай N жиынын коалицияларға бөлу мүмкіндігі жоқ екені алынады.

2^N жиынында анықталған, кез келген $K \in 2^N$ коалицияны оның ең үлкеніне сәйкестікке қоятын, осы ойында сенімді түрде ұтысқа жететін және (13.1) және (13.2) қасиеттерді қанағаттандыратын нақты мәнді u функциясы трансферабельді ұтыстармен берілген кооперативті ойындардың *характеристикалық функциясы* деп аталады.

Келтірілген анықтама жалпы анықтама болып табылады. Берілген ойынның шарттарына қарай характеристикалық функция әр түрлі берілуі мүмкін.

Егер u характеристикалық функциясы 0 және 1 екі мәнін қабылдаса, онда *қарапайым характеристикалық функция* деп аталады. Егер u характеристикалық функциясы қарапайым болса, онда $u(K)=1$ мәнін қабылдайтын коалиция *ұтушы коалиция*, ал $u(K)=0$ мәнін қабылдайтын коалиция *ұтылушы коалиция* деп аталады.

Егер қарапайым u характеристикалық функциясында тек қана бекітілген бос емес R коалициялары ғана ұтушы болып табылса, онда осы жағдайда характеристикалық функция uR арқылы белгіленеді де, *өте қарапайым* деп аталады.

Кеңінен таратылған характеристикалық функцияны қарастырайық. Г ойынында $K \subset N$ коалициясы құрылсын. K коалициясындағы ойыншылардың бірлесіп әрекеттесуі ойыншылар енетін барлық мүмкін болатын стратегиялар комбинациясы, яғни $Y_K = \prod_{i \in K} Y_i$ жиынының элементтері осы коалицияның стратегиялары болып табылатынын білдіреді.

K коалициясының мақсаты – өзінің $\mu_K \in Y_K$ стратегиясын таңдай отырып $Y_K(\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n) = \sum_{i \in K}(x_1, x_2, ..., x_n)$ мүмкін болатын ең үлкен ұтысты иемдену.

Бұл ұтыс $N\backslash K$ жиынындағы басқа да ойыншылардың жүрістерінен тәуелді болғандықтан, K коалициясының характеристикалық функциясын анықтаған кезде K коалициясына қарсы осы ойыншылар жалпы $N\backslash S$ коалициясын құру нұсқасын ескеру қажет. Сонда біз

$$u(K) = v\,\Gamma_{K/N\backslash K} \tag{13.3}$$

деп қабылдауымыз керек, мұндағы $v\,\Gamma_{K/N\backslash K}$ $- M_K$ максимизациялаушы ойыншы ретінде қатысатын бірінші K ойыншының ұтыс функциясы болып табылатын; $-M_K$ минимизациялаушы ойыншы ретінде қатысатын екінші $N\backslash K$ ойыншының ұтыс функциясы болып табылатын $\Gamma_{K/N\backslash K}$ антагонистикалық ойынының мәні. Сонымен,

$$v\,\Gamma_{K/N\backslash K} = \max_{\mu_K} \min_{\mu_{N\backslash K}} M_K(\mu_K, \mu_{N\backslash K}) = \min_{\mu_{N\backslash K}} \max_{\mu_K} M_K(\mu_K, \mu_{N\backslash K}).$$

Кез келген S коалициясы үшін $v\,\Gamma_{K/N\backslash K}$ бар болсын деп ұсынамыз. (13.3) функцияны характеристикалық функция ретінде пайдалану үшін ол супераддитивтілік қасиетті қанағаттандыру керек.

Лемма 13.1. (13.3) теңсіздікпен анықталған u функциясы супераддитивті.

Ойынның характеристикалық формасын анықтағаннан кейін оның қалыпты формасын қарастырудың қажеттілігі жоқ. Себебі, бұл функцияны есептеген кезде коалициялар тиімді стратегияны пайдаланды деп ұсынылды. Сондықтан Γ кооперативті ойынды оның характеристикалық функциясымен байланыстырамыз. Ал бұл өз алдына ойынның тағы бір жаңа формасын береді.

$\Gamma = (N, u)$ жұбы *характеристикалық функция формасындағы ойын* деп аталады, мұндағы N – ойыншылар жиыны, u – характеристикалық функция.

uG арқылы коалициясыз ойынның характеристикалық функциясын белгілейік. Бұл функция келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

1) *дербестілік*

$$uG(\varnothing) = 0,$$

яғни бірде бір ойыншысы жоқ коалиция ештеңе ұтпайды;

2) супераддитивтілік

$$uG(K \cup L) \geq uG(K) + uG(L),\ K, L \subset N,\ K \cap L \neq \varnothing,$$

яғни коалицияның жалпы ұтысы коалицияға қатысушылардың барлығының жалпы ұтысынан кем емес;

3) қосымшалылық

$$UG(K) + u(N \setminus K) = u(N),$$

яғни тұрақты қосындылы коалициясыз ойын үшін коалиция ұтыстары мен қалған ойыншылардың ұтыстарының қосындысы барлық ойыншылардың ұтыстарының жалпы қосындысына тең.

Ойыншылардың ұтыстарын бөлу (бөліс) келесі шарттарды қанағаттандыру керек: егер α_i арқылы i-ші ойыншының ұтысын белгілесек, онда, *біріншіден, дербес ұтымдылық шарты:*

$$\alpha_i \geq u(i),\ i \in N \tag{13.4}$$

орындалуы керек, яғни кез келген ойыншы коалицияда оған қатыспағандағы (кері жағдайда, коалицияға қатыспайды) ұтысынан кем емес ұтысқа жетуі керек; *екіншіден, ұжымдық (немесе топтық) ұтымдылық шарты:*

$$\sum_{i \in N} \alpha_i = u(N) \tag{13.5}$$

орындалуы керек, яғни ойыншылардың ұтыстары мүмкіндіктеріне сәйкес келуі керек (егер барлық ойыншылардың жалпы ұтыстары $u(N)$ мәнінен кем болса, онда ойыншыларға коалицияға кірудің қажеті жоқ; егер жалпы ұтыс $u(N)$ мәнінен артық болсын деп талап етілсе, онда бұл ойыншылар ұтысты өздерінде бар ұтыстан артық болатындай бөлу керек екендігін білдіреді).

Сонымен, дербес ұтымдылық шарты мен ұжымдық ұтымдылық шартын қанағаттандыратын $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ векторы u характеристикалық функция жағдайындағы *бөліс* деп аталады.

Ойыншылар жиынынан, осы жиындардың және бөліс жиындарының характеристикалық функциясынан тұратын (13.4) және (13.5) қатынастарды қанағаттандыратын $\{N, u\}$ жүйесі *классикалық кооперативті ойын* деп аталады.

Теорема 13.1. $\{N,\ u\}$ классикалық кооперативті ойында $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ векторы бөліс болу үшін

$$\alpha_i = u(i) + a_i,\ i \in N$$

және

$$a_i \geq 0,\ i \in N,\ \sum_{i \in N} a_i = u(N) - \sum_{i \in N} u(i)$$

қатынастарының орындалуы қажетті және жеткілікті болып табылады.

Кез келген K және L коалициялары үшін

$$u(K) + u(L) < u(K \cup L)$$

теңсіздігі, яғни супераддитивтілік шартында қатаң теңсіздік орындалса, онда кооперативті ойындар *елеулі* деп есептеледі. Егер супераддитивтілік шартында

$$u(K) + u(L) = u(K \cup L)$$

теңдігі орындалса, яғни аддитивтілік қасиеті орындалса, онда мұндай ойындар *елеулі емес* деп аталады.

Характеристикалық функциялар үшін келесі қасиеттер ақиқат.

1^0. Характеристикалық функция аддитивті болу үшін (кооперативті ойын – елеулі емес)

$$\sum_{i \in N} u(i) = u(N)$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

2^0. Елеулі емес ойында бір ғана бөліс болады:

$$\{u(1), u(2), \ldots, u(n)\}.$$

3^0. Бірден артық ойыншылары бар елеулі ойында бөлік жиыны ақырсыз:

$$(u(1) + a_1, u(2) + a_2, \ldots, u(n) + a_n),$$

мұндағы $a_i \geq 0$, $i \in N$, $u(N) - \sum_{i \in N} u(i) > 0$.

Кез келген $K \subset N$ коалициясы үшін

$$u_1(K) = ku(K) + \sum_{i \in K} C_i \qquad (13.6)$$

теңдігі орындалатындай, егер $k > 0$ және еркін алынған C_i, $i \in N$ шамалары табылса, онда N ойыншылар жиыны мен u характеристикалық функциясы бар кооперативті ойын осы ойыншылар жиыны мен u_1 характеристикалық функциясынан тұратын *стратегиялық эквивалентті ойын* деп аталады.

Стратегиялық эквивалентті ойындар үшін келесі қасиеттер ақиқат.

1^0. *Рефлексивтік*, яғни әрбір характеристикалық функция өзіне-өзі эквивалентті: $u \sim u$ (көз жеткізу үшін (13.6) формулаға $C_i = 0$, $k=1$, $u_1 = u$ мәндерін қойсақ жеткілікті).

2^0. *Симметриялық*, яғни егер $u \sim u_1$ болса, онда $u_1 \sim u$ (көз жеткізу үшін (13.6) формулаға $k_1 = \frac{1}{k}$, $C_{i1} = -\frac{C_i}{k}$ мәндерін қойсақ жеткілікті).

3^0. *Транзитивтілік*, яғни егер $u \sim u_1$, $u_1 \sim u_2$ болса, онда $u \sim u_2$.

Рефлексивтік, симметриялық және транзитивтілік қасиеттерінен барлық характеристикалық функциялардың жиыны жалғыз тәсілмен қиылыспайтын кластар жұбына бөлінетіндігі алынады және *стратегиялы эквиваленттер класы* деп аталады.

Егер кооперативті ойындардың характеристикалық функцияларының барлық мәндері нөлге тең болса, онда кооперативті ойын *нөлдік ойын* деп аталады.

Кез келген елеулі емес ойын нөлдік ойынға стратегиялы эквивалентті.

Егер $u(i) = 0$, $i \in N$, $u(N) = 1$ қатынастары орындалса, онда u характеристикалық функциясы бар кооперативті ойын (0, 1)-*редуцирленген формамен* берілген деп айтамыз.

Теорема 13.2. Әрбір елеулі кооперативті ойын тек қана (0,1)-редуцирленген формадағы ойынға стратегиялы эквивалентті.

(0, 1)-редуцирленген формадағы ойында

$$a_i \geq 0, \; i \in N, \; \sum_{i \in N} a_i = 1$$

қатынастары орындалатын кез келген вектор бөліс болып табылады.

13.4. Ойыншылар саны аз ойынның характеристикалық функциялары

Нөлдік қосындылы ойын үшін (0, 1)-редуцирленген формадағы ойындар класын қарастырайық.

1. *2 ойыншысы бар ойын*. Екі ойыншысы бар кез келген нөлдік қосындылы кооперативті ойын елеулі емес болып табылады.

2. *3 ойыншысы бар ойын*. u – (0, 1)-редуцирленген формадағы елеулі ойынның характеристикалық функциясы болсын. Сонда

$$u(1)=u(2)=u(3)=0,\ u(1,2,3)=1.$$

Қосымшалылық шарты бойынша

$$u(1,2)=u(1,2,3)-u(3)=1-0=1,$$

$$u(1,3)=u(1,2,3)-u(2)=1-0=1,$$

$$u(2,3)=u(1,2,3)-u(1)=1-0=1$$

және осылайша, характеристикалық функция толығымен анықталды. Сонымен, үш ойыншысы бар нөлдік қосындылы кооперативтік ойынның екі класы бар: елеулі ойындар класы және елеулі емес ойындар класы.

3. *4 ойыншысы бар ойын*. Осындай ойындардың стратегиялық эквиваленттердің барлық кластарын қарастырамыз.

(0, 1)-редуцирленген формадағы елеулі емес ойындардың u характеристикалық функциясын анықтайық:

$$u(1)=u(2)=u(3)=u(4)=0,\ u(1,2,3,4)=1.$$

Қосымшалылық шарты бойынша

$$u(1,2,3)=u(1,2,3,4)-u(4)=1-0=1,$$

$$u(1,2,4)=u(1,2,3,4)-u(3)=1-0=1,$$

$$u(1,3,4)=u(1,2,3,4)-u(2)=1-0=1,$$

$$u(2,3,4)=u(1,2,3,4)-u(1)=1-0=1.$$

Енді екі ойыншыдан тұратын коалицияның характеристикалық функциясының мәнін анықтау қажет. Мұндай коалициялар саны 6-ға тең:

$$u(1,2);\ u(1,3);\ u(1,4);\ u(2,3);\ u(2,4);\ u(3,4).$$

Осы коалициялардағы характеристикалық функция қосымшалылық шартына сәйкес тек қана келесі қасиеттерді қанағаттандырады:

$$u(1,4)=u(1,2,3,4)-u(2,3)=1-u(2,3),$$
$$u(1,3)=u(1,2,3,4)-u(2,4)=1-u(2,4),$$
$$u(1,2)=u(1,2,3,4)-u(3,4)=1-u(3,4).$$

Белгісіздір саны – 6, ал теңдеулер саны – 3. Сондықтан үш мәнді еркін таңдауға мүмкіндік бар. Осы еркін алынған мәндерді α_1, α_2, α_3 арқылы белгілейік, яғни $u(1,4)=\alpha_1$, $u(2,4)=\alpha_2$, $u(3,4)=\alpha_3$.

Сонда $u(2,3)=1-\alpha_1$, $u(1,3)=1-\alpha_2$, $u(1,2)=1-\alpha_3$.

Сонымен қатар, екі ойыншысы бар коалицияның характеристикалық функциясының мәні осы ойыншылардың біреуі үшін характеристикалық функциясының мәнінен кіші болуы мүмкін емес (бір ойыншы үшін нөлге тең) болғандықтан және үш ойыншысы бар коалиция үшін характеристикалық функцияның мәнінен артық болуы мүмкін емес (үш ойыншы үшін 1-ге тең) болғандықтан

$$0\le \alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3\le 1$$

болуы керек.

Сонымен, төрт ойыншысы бар ойынның әрбір стратегиялық эквиваленттер класс жиыны ақырсыз және үш еркін таңдалынған параметрлерден тәуелді.

4. *4-тен артық ойыншылары бар ойындар*. Мұндай ойындарда елеулі ойындардың стратегиялық эквиваленттер класы әр түрлі болып келеді.

n ойыншылары бар ойындар класының жиынының өлшемділігі $2^{n-1}-n-1$-ге тең, яғни $2^{n-1}-n-1$ еркін алынған параметрі бар.

Тұрақты қосынды болатын шарты жоқ кооперативтік ойындарды қарастырайық.

1. *2 ойыншысы бар ойын* ($N=\{1,2\}$ жиыны) үшін, редуцирлену шартынан келесі қатынасты аламыз:

$$u(\varnothing)=u(1)=u(2)=0,\ u(1,2)=1.$$

Сонымен, нөлдік емес қосындылы екі ойыншысы бар елеулі кооперативті ойындар стратегиялық эквивалентті бір класты құрайды.

2. *3 ойыншысы бар ойын* ($N = \{1, 2, 3\}$ жиыны) үшін, редуцирлену шарты келесі қатынасты береді:

$$u(\varnothing) = u(1) = u(2) = u(3) = 0\,,\; u(1, 2, 3) = 1\,.$$

Екі ойыншының коалициялар жиынында характеристикалық функцияларының мәндері еркін алынады (қосымшалық шарты жоқ):

$$u(1, 2) = C_3\,;\; u(1, 3) = C_2\,;\; u(2, 3) = C_1\,,$$

бірақ,

$$0 \le C_1,\; C_2,\; C_3 \le 1$$

шартын қанағаттандырады.

Ойыншылар саны көп болған кездегі ойындарды зерттеу үшін доминациялау ұғымы пайдаланылады.

Егер

$$\alpha_i > \beta_i,\; i \in K,\; \alpha(K) \le u(K) \qquad (13.7)$$

қатынастары орындалса, онда α бөлісі β бөлісін K коалициясы бойынша доминациялайды деп айтады да, $\alpha \succ_K \beta$ арқылы белгілейді, мұндағы $\alpha(K)$ кез келген α бөлісі үшін $\sum_{i \in K} \alpha_i = \alpha(K)$.

(13.7) анықтамасындағы бірінші шарт K коалициясының барлық мүшелері үшін α бөлісі β бөлісіне қарағанда жақсы екендігін білдіреді, ал екінші теңсіздік K коалициясының α бөлісі жүзеге асырылатындығын (яғни K коалициясы $i \in K$ ойыншыларының әрқайсысына α_i шамасын ұсына алады) білдіреді.

Егер $\alpha \succ_K \beta$ орындалатындай K коалициясы бар болса, онда α бөлісі β бөлісін доминациялайды деп айтады. β бөлісін α бөлісімен доминациялау $\alpha \succ \beta$ арқылы белгіленеді.

Бір элементті коалиция бойынша және N барлық ойыншылар жиыны бойынша доминациялау мүмкін емес.

Бөлістерді елеулі ойындарда доминациялауды келесі мысалда қарастырайық.

13.2-мысал.

Тұрақты қосындылы (1-ге тең) үш ойыншысы бар (0, 1)-редуцирленген формадағы елеулі ойын берілсін. Бір элементті коалиция (1, 2, 3) бойынша және барлық үш ойыншылардан тұратын коалиция бойынша доминациялау мүмкін емес болғандықтан екі элементті коалициялардың ($\{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}$) біреуі бойынша доминациялау мүмкін болады.

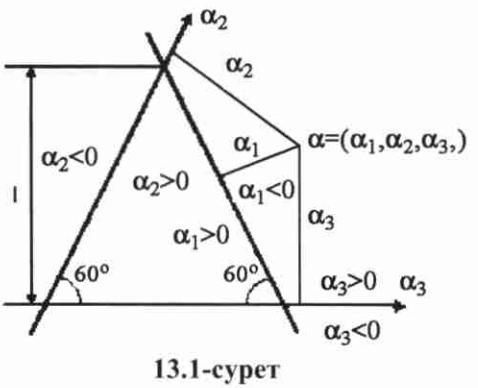
Бөлістерді доминациялаудың көрнектілігі үшін бароцентрлік координаталар ұғымын енгіземіз. Координаталар осьтері ретінде α_1, α_2, α_3 осьтерін қарастырамыз. Олар өзара бірдей 60° бұрыш құрайды. α_3 осі α_1 және α_2 осьтерінің қиылысу нүктесінен бірлік қашықтықта орналасқан (13.1-сурет). $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ нүктесінің координаталары сәйкес осы нүктеден α_1, α_2, α_3 осьтеріне дейінгі 13.1-суретте көрсетілген таңбалармен алынған қашықтыққа тең (мысалы, α нүктесі үшін $\alpha_1 < 0$, $\alpha_2 > 0$, $\alpha_3 > 0$).

Бароцентрлік координаталар жүйесінде

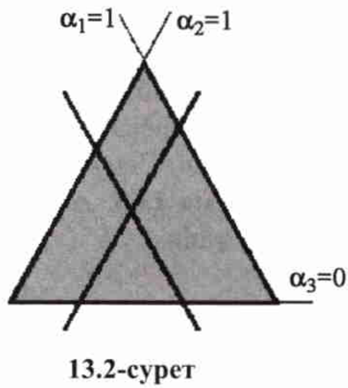
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1. \qquad (13.8)$$

Жазықтықта барлық уақытта (13.8) теңдікті қанағаттандыратын координаталары α_1, α_2, α_3 болатын нүкте бар болады. Сондықтан бароцентрлік координаталар жүйесі үш ойыншылары бар ойынның қорытындысын анықтайтын шарттардың біреуін міндетті түрде қанағаттандырады. Басқа жағынан қарастырсақ, ойын (0, 1)-редуцирленген формада болғандықтан α нүктесі белгіленген үшбұрышта жатуы керек (13.2-сурет.)

α_1, α_2, α_3 бөлістері келесі теңсіздіктерді қанағаттандырады:



13.1-сурет



13.2-сурет

$$\alpha_1+\alpha_2 \le u(1,2);\ \alpha_1+\alpha_3 \le u(1,3);\ \alpha_2+\alpha_3 \le u(2,3).$$

Қосымшалылық шартынан

$$\alpha_1+\alpha_2 = 1-\alpha_3 \le 1 = u(1,2);\ \alpha_1+\alpha_3 \le 1;\ \alpha_2+\alpha_3 \le 1.$$

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ бөлісі $\beta = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ бөлісін

егер $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_2 > \beta_2$ болса $\{1, 2\}$ коалициясы бойынша;

егер $\alpha_1 > \beta_1$, $\alpha_3 > \beta_3$ болса $\{1, 3\}$ коалициясы бойынша;

егер $\alpha_2 > \beta_2$, $\alpha_3 > \beta_3$ болса $\{2, 3\}$ коалициясы бойынша доминациялайды.

Кооперативті ойындарда бөлістерді доминациялауға қатысты мәселелерді қарастырған кезде көптеген нұсқалардың болуы мүмкін. Ойыншылардың санының артуына байланысты осындай нұсқалардың саны өте тез артады. Осыған байланысты *бөлістердің жете орнықтылығын,* яғни басқа ешқандай бөлістермен доминацияланбайтын бөлістерді атап айту қажеттігі пайда болады.

13.5. С-ядро

Кооперативті ойындардағы тиімді жүрістердің принциптерін қарастырайық.

(N, u) кооперативті ойында ойыншылар барлық N коалициялының (α^* бөлісін) ұтыстарын бөлу жайында бір де бір бөліс α^* бөлісін доминацияламайтындай келісімге келеді. Сонда, мұндай бөлу K коалицияларының ешқайсысы басқа ойыншылардан бөлек кетуі және $u(K)$ ұтысын коалиция мүшелеріне бөліп беру қолайлы болмайтын мағынада орнықты болып табылады. Бұл талқылау доминацияланбайтын бөлістер жиынын қарастыруға әкеледі.

(N, u) кооперативті ойынының доминацияланбайтын бөлістер жиыны оның *С-ядросы* деп аталады.

Теорема 13.3. α бөлісі C-ядроға тиісті болуы үшін барлық $K \subset N$ үшін

$$u(K) \le \alpha(K) = \sum_{i \in K} \alpha_i$$

теңсіздігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Лемма 13.2. α – (N, u) кооперативті ойынының бөлісі болсын. Сонда барлық $K \subset N$ коалициялар үшін

$$\sum_{i \in K} \alpha_i \le u(N) - u(N \setminus K)$$

теңсіздігі орындалғанда ғана α бөлісі C-ядроға тиісті болады.

Кооперативті ойындарда C-ядроның бар болуының ерекшеліктеріне мыналарды жатқызуға болады:

1) елеулі емес ойында C-ядро бар және осы ойынның тек қана бір бөлісінен тұрады;

2) тұрақты қосындылы кез келген елеулі ойында C-ядро бос болады.

13.3-мысал.

(0, 1)-редуцирленген формадағы үш ойыншысы бар жалпы ойынды қарастырайық. Ойынның характеристикалық функциялары:

$$u(\varnothing) = u(1) = u(2) = u(3) = 0,\ u(1, 2, 3) = 1,$$
$$u(1, 2) = c_3;\ u(1, 3) = c_2;\ u(2, 3) = c_1,$$

мұндағы

$$0 \le c_1,\ c_2,\ c_3 \le 1$$

13.3-теореманың негізінде α бөлісі C-ядроға тиісті болуы үшін

$$\alpha_1 + \alpha_2 \ge c_3,\ \alpha_1 + \alpha_3 \ge c_2,\ \alpha_2 + \alpha_3 \ge c_1$$

немесе

$$\alpha_3 \le 1 - c_3,\ \alpha_2 \le 1 - c_2,\ \alpha_1 \le 1 - c_1 \tag{13.9}$$

теңсіздіктерінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

(13.9) теңсіздіктерін қосайық:

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 \le 3 - (c_1 + c_2 + c_3)$$

немесе $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ болғандықтан

$$c_1 + c_2 + c_3 \le 2. \tag{13.10}$$

Соңғы теңсіздік қарастырылып отырған ойында бос емес C-ядросының бар болуының қажетті шарты болып табылады.

Басқа жағынан қарастырсақ, егер (13.10) орындалса, онда

$$\sum_{i=1}^{3}(c_i+\xi_i)=2,\ c_i+\xi_i\le 1,\ i=\overline{1,3}$$

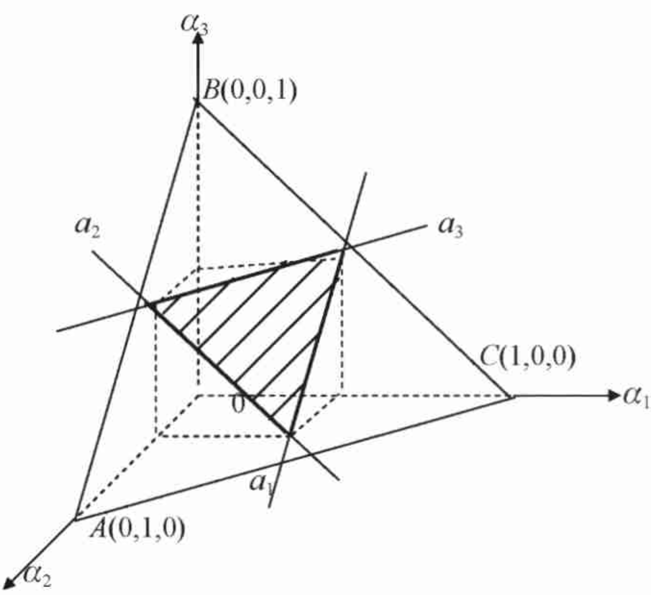
қатынастары орындалатындай теріс емес ξ_1, ξ_2, ξ_3 шамалары табылады.

$\beta_i=1-c_i-\xi_i$, $i=\overline{1,3}$ деп ұйғарайық. β_i сандары (13.9) теңсіздікті қанағаттандырады, сондықтан $\beta=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$ бөлісі ойынның C-ядросына тиісті болады. Сонымен, (13.10) қатынас бос емес C-ядросының бар болуының жеткілікті шарты болып та табылады.

Қарастырылып отырған ойында бөлістер жиынын геометриялық тұрғыдан қарастыратын болсақ ол симплексті береді:

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=1$, $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,3}$ (13.3-сурет, ABC үшбұрышы). Бос емес C-ядросы бөлістер жиынының қиылысуын ΔABC және дөңес көпжақты (параллелепипед) $0\le\alpha_i\le 1-c_i$, $i=\overline{1,3}$ береді. Бұл

$$\alpha_i=1-c_i, \tag{13.11}$$



13.3-сурет

жазықтықтарының ABC үшбұрышының жазықтығымен қиылысқандағы сызықпен кескендегі ABC үшбұрышының бөлігі.

13.3-суретте a_i. $i = \overline{1,3}$ арқылы $\alpha_i = 1 - c_i$ жазықтықтарымен $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ жазықтығының қиылысу түзуі белгіленген. Егер a_i және a_j түзулерінің қиылысу нүктесінің k-шы ($k \neq i$, $k \neq j$) координатасы теріс емес болса, онда бұл нүкте ABC үшбұрышына тиісті болады, кері жағдайда ABC үшбұрышынан тыс жатады. Сонымен, егер (13.11) теңдеулердің кез келген жұбы мен $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$ теңдеуін бірлесіп шешкенде теріс емес сандар алынса, онда C-ядроның түрі үшбұрыш болады. Бұл талап

$$c_1 + c_2 \geq 1,\ c_1 + c_3 \geq 1,\ c_2 + c_3 \geq 1$$

теңсіздіктері ақиқат болған жағдайда орындалады.

Әр түрлі жағдайға байланысты (барлығы 8 жағдай бар) C-ядроның түрі де әр түрлі болады. Мысалы,

$$c_1 + c_2 < 1,\ c_1 + c_3 < 1,\ c_2 + c_3 < 1$$

теңсіздіктері орындалса, онда C-ядроның түрі алтыбұрыш болады.

13.6. Н-М шешімі

Кооперативті ойындардағы тиімділік принципінің тағы біреуі – Н-М шешімі (Нейман-Моргенштерн бойынша шешімі). Н-М шешімі C-ядро сияқты барлық бөлістер жиынындағы тиімділіктің жиындық принципі болып табылады. C-ядроның элементтері басқа ешқандай бөлістермен доминацияланбаса да, алдын ала берілген α бөлісі үшін оны доминациялайтын бөліс табылады деп ұйғаруға болмайды. Осы жағдайды ескеретін тиімділік принципін қарастырайық.

Егер

1) $\alpha \succ \beta$ қатынасынан, не $\alpha \notin L$, не $\beta \notin L$ алынса (ішкі орнықтылық);

2) $\beta \succ \alpha$ қатынасы орындалатындай кез кеген $\alpha \notin L$ үшін $\beta \notin L$ бөлісі табылса, онда $(N,\ u)$ кооперативтік ойынының L бөлістерінің ішкі жиыны *Н-М шешімі* деп аталады.

Теорема 13.4. Егер C-ядро бос емес болса және Н-М шешім бар болса, онда ол C-ядроны қамтиды.

Теорема 13.5. Егер (0, 1)-редуцирленген формадағы (N, u) ойынының ($|N| = n$) характеристикалық функциясы үшін

$$u(K) \leq \frac{1}{n - |K| + 1}$$

теңсіздігі орындалса, онда осы ойынның C-ядросы бос емес және оның Н-М шешімі болып табылады, мұндағы $|K|$ – K коалициясындағы ойыншылар саны.

Егер кез келген $K \subset N$ үшін $u(K)$ – 0 және 1 мәндерінің біреуін ғана қабылдайтын болса, онда (0, 1)-редуцирленген формадағы (N, u) ойыны *қарапайым* деп аталады. Егер кооперативті ойынның (0, 1)-редуцирленген формасы қарапайым болса, онда ол *қарапайым* деп аталады.

13.4-мысал.

(0, 1)-редуцирленген формадағы үш ойыншысы бар қарапайым ойынды қарастырайық. Бұл ойында екі және үш ойыншыдан тұратын коалиция ұтады $(u(K)=1)$, ал тек қана бір ойыншыдан тұратын коалиция ұтылады $(u(\{i\})=0)$. Осы ойын үшін үш бөлісті қарастырамыз:

$$\alpha_{12} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right), \ \alpha_{13} = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right), \ \alpha_{23} = \left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right). \quad (13.12)$$

Осы үш бөлістің ешқайсысы басқаларын доминацияламайды. (13.12) бөлістер жиыны келесі қасиетті қамтиды: α_{ij} бөлісінен басқа кез келген бөліс α_{ij} бөлістерінің біреуімен доминацияланады. Осыған көз жеткізуіміз үшін қандай да бір $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ бөлісін қарастырамыз. Ойын (0, 1)-редуцирленген формада болғандықтан $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$, $\alpha_i \geq 0$, $i = \overline{1, 3}$. Демек, α векторының бір немесе екі компоненті $\frac{1}{2}$ мәнінен кіші емес болуы мүмкін. Егер екі компонент $\frac{1}{2}$ мәнінен кіші емес болса, онда олардың әрқайсысы $\frac{1}{2}$ мәніне тең болады да, үшіншісі нөлге тең болады. Бірақ бұл α векторы α_{ij} бөлістерінің біреуімен беттесетінін білдіреді. Егер α басқа бөліс болса, онда $\frac{1}{2}$ мәнінен кіші емес бір компонент болады.

Демек, $\frac{1}{2}$ мәнінен кіші кем дегенде екі компонеті болады, мысалы α_i және α_j, $i < j$. Бірақ бұл жағдайда $\alpha_{ij} \underset{ij}{\succ} \alpha$. Сонымен, (13.16) бөлістер жиынының үш бөлісі Н-М шешімді құрайды. Бірақ бұл жалғыз Н-М шешім емес.

Н-М шешімнің жалпы жағдайда бар болуы дәлелденген жоқ, бірақ дербес нәтижелері алынды.

13.7. Шепли векторы

Кез келген $K \subset N$ коалициясы үшін $u(K) = u(K \cap T)$ орындалатындай T коалициясы (N, u) ойынының *тасуышы* деп аталады.

T тасуышына тиісті емес кез келген ойыншы коалицияға ештеңе де бере алмайды, ортақ пайдадан оған да ештеңе бөлінбейді.

(N, u) – n ойыншысы бар кооперативтік ойын. P – N ойыншылар жиынының кез келген орын алмастыруы, π – сәйкес оның ауыстыруы. Сонда $(N, \pi u)$ арқылы кез келген $K \subset N$, $N = \{i_1, i_2, \ldots, i_n\}$ коалициясы үшін

$$u(\{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_n)\}) = u(K)$$

орындалатын (N, u) ойынын белгілейміз.

$(N, \pi u)$ ойыны мен (N, u) ойынының айырмашылығы (N, u) ойында ойыншылар P орын алмастыруына сәйкес рөлдерін ауыстырады.

Осы анықтамалардың көмегімен Шеплидің аксиомаларын тұжырымдаймыз.

Шепли аксиомалары

1. Егер K – (N, u) ойынының кез келген тасуышы болса, онда

$$\sum_{i \in K} \varphi_i(u) = u(K).$$

2. Кез келген π ауыстыруы мен $i \in K$ үшін

$$\varphi_{\pi(i)}(\pi u) = \varphi_i(u).$$

3. Егер (N, u) және (N, ν) екі кез келген кооперативті ойындар болса, онда

$$\varphi_i(u+v)=\varphi_i(u)+\varphi_i(v).$$

Шепли аксиомаларын қанағаттандыратын

$$\varphi(u)=(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u))$$

n-өлшемді вектор u характеристикалық функциямен берілген ойынның *құн векторы* (*Шепли векторы*) деп аталады.

Теорема 13.6. Барлық (N, u) ойындары үшін анықталған және 1-3 Шепли аксиомаларды қанағаттандыратын жалғыз ғана φ функциясы бар.

Егер

$$w_K(T)=\begin{cases}1, K\subset T\\ 0, K\not\subset T\end{cases}$$

болса, онда кез келген K коалициясы үшін анықталған $w_K(T)$ характеристикалық функциясы *өте қарапайым* деп аталады.

Шепли векторының компоненттері мына түрде жазылады:

$$\varphi_i(u)=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\varphi_i(T)[u(T)-u(T\setminus i)]=$$

$$=\sum_{\substack{T\subset N\\ i\in T}}\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}[u(T)-u(T\setminus i)], \qquad (13.13)$$

мұндағы, t – T жиынындағы элементтер саны.

i-ші ойыншының T коалициясына қосатын шектік шама

$$u(T)-u(T\setminus\{i\})$$

өрнегі түрінде жазылады да, i-ші ойыншының ұтысы деп есептеледі.

u өте қарапайым болған жағдайда

$$u(T)-u(T/\{i\})=\begin{cases}1, \text{егер } T \text{ ұтушы коалиция болса,}\\ 0, \text{егер } T \text{ ұтушы коалиция, ал } T\setminus(i)\\ \text{ұтушы емес коалиция болса}\end{cases}$$

Салдар 13.1. Қарапайым ойын үшін Шепли векторының компоненттері

$$\varphi_i(u) = \sum_T \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} \qquad (13.14)$$

формуласымен анықталады.

13.5-мысал.

Төрт студенттік топтардағы студенттердің арасынан көшбасшы сайлау керек. Бұл жерде

– 1-топ 5 дауыс бере алады ($a_1 = 5$);

– 2-топ 20 дауыс бере алады ($a_2 = 20$);

– 3-топ 35 дауыс бере алады ($a_3 = 35$);

– 4-топ 40 дауыс бере алады ($a_4 = 40$).

Егер 51 және одан артық дауыс берілсе, көшбасшы сайланды деп есептеледі.

Осы ойынның Шепли векторын табу керек.

Шығарылуы. Есепті екі әдіспен (13.6-теореманы және 13.1-салдарды пайдаланып) шығарайық.

1-әдіс (13.6-теорема).

Коалицияның ұтысын – қабылданатын шешімді 1-ге тең деп, ал қабылданбайтын шешімді – 0-ге тең деп есептей отырып, есептің шартына байланысты келесі характеристикалық функцияларды құрамыз. Сонда

$$v\{1\} = v\{2\} = v\{3\} = v\{4\} = 0,$$

$$v\{1, 2\} = v\{1, 3\} = v\{1, 4\} = 0,$$

$$v\{2, 3\} = v\{2, 4\} = v\{3, 4\} = 1,$$

$$v\{1, 2, 3\} = v\{1, 2, 4\} = v\{1, 3, 4\} = v\{2, 3, 4\} = 1,$$

$$v\{1, 2, 3, 4\} = 1.$$

Шепли векторының компоненттерін

$$\varphi_i(u) = \sum_{\substack{T \subset N \\ i \in T}} \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} [u(T) - u(T \setminus i)], \qquad (13.13')$$

формуласының көмегімен есептейміз, мұндағы, t – T жиынындағы элементтер саны, n – жалпы ойыншылар саны.

φ_1: бірінші ойыншы қатысатын $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ коалицияларында $t = 3$ ойыншылар бар; $\{1, 2, 3, 4\}$ коалицияда $t = 4$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$:

$$\varphi_1 = \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!}\cdot[v\{1, 2, 3\} - v\{2, 3\} + v\{1, 2, 4\} - v\{2, 4\} +$$

$$+ v\{1, 3, 4\} - v\{3, 4\}] + \frac{(4-1)!\cdot(4-4)!}{4!}\cdot[v\{1, 2, 3, 4\} - v\{2, 3, 4\}] =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot(1-1+1-1+1-1) + \frac{1}{8}(1-1) = 0;$$

φ_2: екінші ойыншы қатысатын $\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$ коалицияларда $t = 2$ ойыншылар бар; $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ коалицияларда $t = 3$ ойыншы бар, $\{1, 2, 3, 4\}$ коалицияда $t = 4$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$:

$$\varphi_2 = \frac{(2-1)!\cdot(4-2)!}{4!}\cdot[v\{2, 3\} - v\{3\} + v\{2, 4\} - v\{4\}] +$$

$$+ \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!}\cdot[v\{1, 2, 3\} - v\{1, 3\} + v\{1, 2, 4\} - v\{1, 4\} +$$

$$+ v\{2, 3, 4\} - v\{3, 4\}] + \frac{(4-1)!\cdot(4-4)!}{4!}\cdot[v\{1, 2, 3, 4\} - v\{1, 3, 4\}] =$$

$$= \frac{1}{12}\cdot(1-0+1-0) + \frac{1}{12}(1-0+1-0+1-1) + \frac{1}{4}(1-1) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3};$$

φ_3: үшінші ойыншы қатысатын $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$ коалицияларда $t = 2$ ойыншылар бар; $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ коалицияларда $t = 3$ ойыншылар бар, $\{1, 2, 3, 4\}$ коалицияда $t = 4$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$:

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!\cdot(4-2)!}{4!}\cdot[v\{2, 3\} - v\{2\} + v\{3, 4\} - v\{4\}] +$$

$$+ \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!}\cdot[v\{1, 2, 3\} - v\{1, 2\} + v\{1, 3, 4\} - v\{1, 4\} +$$

$$+v\{2,3,4\}-v\{2,4\}]+\frac{(4-1)!\cdot(4-4)!}{4!}\cdot[v\{1,2,3,4\}-v\{1,2,4\}]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(1-0+1-0)+\frac{1}{12}(1-0+1-0+1-1)+\frac{1}{4}(1-1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3};$$

φ_4 : төртінші ойыншы қатысатын $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$ – коалицияларда $t = 2$ ойыншылар бар; $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ – коалицияларда $t = 3$ ойыншылар бар, $\{1, 2, 3, 4\}$ – коалицияда $t = 4$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$:

$$\varphi_4=\frac{(2-1)!\cdot(4-2)!}{4!}\cdot[v\{2,4\}-v\{2\}+v\{3,4\}-v\{3\}]+$$

$$+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!}\cdot[v\{1,2,4\}-v\{1,2\}+v\{1,3,4\}-v\{1,3\}+$$

$$+v\{2,3,4\}-v\{2,3\}]+\frac{(4-1)!\cdot(4-4)!}{4!}\cdot[v\{1,2,3,4\}-v\{1,2,4\}]=$$

$$=\frac{1}{12}\cdot(1-0+1-0)+\frac{1}{12}(1-0+1-0+1-1)+\frac{1}{4}(1-1)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}.$$

Сонымен, Шепли векторы – $\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

2-әдіс (13.1-салдар бойынша). Осы ойынның «дауыс беру векторы» дауыс берушілердің дауыстарына мына түрде пропорционал болады:

$$\{0{,}05;\ 0{,}2;\ 0{,}35;\ 0{,}4\},$$

ал бұл ойыншылардың жеке пайдалылығына сәйкес келеді.

Ұтатын коалициялар жиыны:

$$\{2, 3\}, \{2, 4\}, \{3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 3, 4\},$$
$$\{1, 2, 3, 4\}.$$

φ_1 компонентін табу үшін, барлық ұтатын, бірақ бірінші ойыншысыз ұтпайтын коалицияларды анықтаймыз.

Ұтатын коалициялар жиынынан $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$ коалицияларын қарастырмаймыз, себебі бұл коалицияларда бірінші ойыншы қатыспайды.

$T = \{1, 2, 3\}$, $T \setminus \{1\} = \{2, 3\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 2, 4\}$, $T \setminus \{1\} = \{2, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 3, 4\}$, $T \setminus \{1\} = \{3, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 2, 3, 4\}$, $T \setminus \{1\} = \{2, 3, 4\}$ – ұтатын коалиция.

Бірінші ойыншы қатысатын коалициялардың ішкі жиыны бос, демек $\varphi_1 = 0$.

Барлық ұтатын, бірақ екінші ойыншысыз ұтпайтын коалицияларды анықтап, φ_2 компонентін табамыз (жоғарыда қарастырған алгоритм бойынша талдау жүргіземіз).

$\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ коалицияларында екінші ойыншы қатыспайды, сондықтан оларды қарастырмаймыз.

$T = \{2, 3\}$, $T \setminus \{2\} = \{3\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{2, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{4\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{1, 2, 3\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 3\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{1, 2, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 4\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{2, 3, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{3, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 2, 3, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 3, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$\{2, 3\}$, $\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ коалицияларын ескеріп φ_2 компонентін анықтаймыз.

$T = \{2, 3\}$, $T = \{2, 4\}$ коалицияларында $t = 2$ ойыншы бар; $T = \{1, 2, 3\}$, $T = \{1, 2, 4\}$ коалицияларында $t = 3$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$. Сонда

$$\varphi_2(u) = \sum_T \frac{(t-1)!(n-t)!}{n!} = \frac{(2-1)!\cdot(4-2)!}{4!} + \frac{(2-1)!\cdot(4-2)!}{4!} +$$

$$+ \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!} + \frac{(3-1)!\cdot(4-3)!}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}.$$

Үшінші ойыншы үшін де осындай талдауды жүргізе отырып, нәтижесінде {2, 3}, {3, 4}, {1, 2, 3}, {1, 3, 4} коалицияларын аламыз. $T=\{2,3\}$, $T=\{3,4\}$ коалицияларында $t=2$, $T=\{1,2,4\}$, $T=\{1,2,3\}$ коалицияларында $t=3$ ойыншылар қатысады, жалпы ойыншылар саны – $n=4$. φ_3 компонентін есептейміз:

$$\varphi_3(u)=\sum_T\frac{(t-1)!(n-t)!}{n!}=\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+$$

$$+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}=$$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

Төртінші ойыншы үшін талдау жүргізу нәтижесінде {2, 4}, {3, 4}, {1, 2, 4}, {1, 3, 4} коалицияларын аламыз. $T=\{2,4\}$, $T=\{3,4\}$ коалицияларында $t=2$, $T=\{1,2,4\}$, $T=\{1,3,4\}$ коалицияларында $t=3$ ойыншылар бар, жалпы ойыншылар саны – $n=4$. φ_4 компонентін есептейміз:

$$\varphi_4(u)=\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+$$

$$+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{3}.$$

$\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$ – Шепли векторын алдық.

Сонымен, екі формуланы пайдаланып шығарған кезде алынған Шепли векторының координаталары бірінші ойыншы ештеңе ұтпайтынын, және оның берген дауысының пайдаға аспайтынын, ал төртінші ойыншының ұтысы екінші және үшінші ойыншылардың ұтысымен бірдей екенін білдіреді. Оның артық дауысы оған ешқандай артық пайда әкелмейді.

Жауабы. $\varphi=\left(0;\frac{1}{3};\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$.

13.6-мысал.

Үш адамнан тұратын комиссия қарапайым көпшілікпен шешім қабылдайды (екеуі – дауыс берсе), бірақ оның бір мүшесі (төраға) дауыс бермеуге құқы бар. Сәйкес ойынның Шепли векторын табу керек.

Шығарылуы. Коалицияның ұтысын – қабылданатын шешімді 1-ге тең деп, ал қабылданбайтын шешімді – 0-ге тең деп есептей отырып, характеристикалық функцияны құрамыз (дауыс бермеуге құқы бар ойыншыны 1 санымен нөмірлейміз). Сонда

$$v\{1\}=v\{2\}=v\{3\}=v\{2,3\}=0,$$
$$v\{1,2\}=v\{1,3\}=v\{1,2,3\}=1.$$

(13.13') формуласы бойынша Шепли векторының компоненттерін табамыз.

φ_1: бірінші ойыншы қатысатын {1, 2}, {1, 3} коалицияларда t = 2 ойыншылар бар; {1, 2, 3} коалицияда t = 3 ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – n = 3:

$$\varphi_1=\frac{(2-1)!\cdot(3-2)!}{3!}\cdot\left[v\{1,2\}-v\{2\}+v\{1,3\}-v\{3\}\right]+\frac{(3-1)!\cdot(3-3)!}{3!}\cdot$$
$$\cdot\left[v\{1,2,3\}-v\{2,3\}\right]=\frac{1}{6}\cdot(1-0+1-0)+\frac{1}{3}(1-0)=\frac{2}{6}+\frac{1}{3}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3};$$

φ_2: екінші ойыншы қатысатын {1, 2}, {2, 3} коалицияларда t = 2 ойыншылар бар; {1, 2, 3} коалицияда t = 3 ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – n = 3:

$$\varphi_2=\frac{(2-1)!\cdot(3-2)!}{3!}\cdot\left[v\{1,2\}-v\{1\}+v\{2,3\}-v\{3\}\right]+\frac{(3-1)!\cdot(3-3)!}{3!}\cdot$$
$$\cdot\left[v\{1,2,3\}-v\{1,3\}\right]=\frac{1}{6}\cdot(1-0+0-0)+\frac{1}{3}(1-1)=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6};$$

φ_3: үшінші ойыншы қатысатын {1, 2}, {2, 3} коалицияларда t = 2 ойыншылар бар; {1, 2, 3} коалицияда t = 3 ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – n = 3:

$$\varphi_3 = \frac{(2-1)!\cdot(3-2)!}{3!}\cdot\left[v\{1,3\}-v\{1\}+v\{2,3\}-v\{2\}\right]+\frac{(3-1)!\cdot(3-3)!}{3!}\cdot$$

$$\cdot\left[v\{1,2,3\}-v\{1,2\}\right]=\frac{1}{6}\cdot(1-0+0-0)+\frac{1}{3}(1-1)=\frac{1}{6}+0=\frac{1}{6}.$$

Жауабы. $\varphi=\left(\frac{2}{3},\frac{1}{6},\frac{1}{6}\right)$ – Шепли векторы.

13.7-мысал.

Сәйкес

$$a_1=20,\ a_2=25,\ a_3=25,\ a_4=30$$

мөлшерінде акциялары бар төрт акционерден тұратын корпорация қарастырылады.

Қосындысында көп акциясы болатын (жартысына тең немесе артық) кез келген шешімді акционерлер бекітеді. Бұл шешімі 1-ге тең ұтыс болып есептеледі. Сондықтан осы жағдайды төрт ойыншысы бар қарапайым ойын ретінде қарастыруға болады.

Осы ойын үшін Шепли векторын табу керек.

Шығарылуы

Ұтатын коалициялар жиыны:

$$\{2,4\},\ \{3,4\},$$
$$\{1,2,3\},\ \{1,2,4\},\ \{2,3,4\},\ \{1,3,4\},$$
$$\{1,2,3,4\}.$$

φ_1 компонентін табу үшін, барлық ұтатын, бірақ бірінші ойыншысыз ұтпайтын коалицияларды анықтаймыз.

Ұтатын коалициялар жиынынан $\{2,4\}$, $\{3,4\}$, $\{2,3,4\}$ коалицияларын қарастырмаймыз, себебі бұл коалицияларда бірінші ойыншы жоқ.

$T=\{1,2,3\}$, $T\setminus\{1\}=\{2,3\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T=\{1,2,4\}$, $T\setminus\{1\}=\{2,4\}$ – ұтатын коалиция;

$T=\{1,3,4\}$, $T\setminus\{1\}=\{3,4\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 2, 3, 4\}$, $T \setminus \{1\} = \{2, 3, 4\}$ – ұтатын коалиция.

Сонымен жалғыз $T = \{1, 2, 3\}$ коалициясы бар екенін анықтадық.

(13.14) формуласын пайдаланып φ_1 компонентін анықтаймыз. T коалициясында $t = 3$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$:

$$\varphi_1 = \frac{(t-1)!(n-t)}{n!} = \frac{2!\cdot 1!}{4!} = \frac{1}{12}$$

Әрі қарай барлық ұтатын, бірақ екінші ойыншысыз ұтпайтын коалицияларды қарастырамыз (жоғарыда қарастырған алгоритм бойынша талдау жүргіземіз):

$\{3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ – коалицияларында екінші ойыншы қатыспайды, сондықтан оларды қарастырмаймыз.

$T = \{2, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{4\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{1, 2, 3\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 3\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{1, 2, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 4\}$ – ұтпайтын коалиция;

$T = \{2, 3, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{3, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$T = \{1, 2, 3, 4\}$, $T \setminus \{2\} = \{1, 3, 4\}$ – ұтатын коалиция;

$\{2, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$ коалицияларын ескеріп φ_2 компонентін анықтаймыз.

$T = \{2, 4\}$ коалициясында $t = 2$ ойыншы бар; $T = \{1, 2, 3\}$ коалициясында $t = 2$ ойыншы бар; $T = \{1, 2, 4\}$ коалициясында $t = 3$ ойыншы бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$. Сонда

$$\varphi_2(u) = \sum_T \frac{(t-1)!(n-t)}{n!} = \frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!} + \frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!} +$$

$$+ \frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!} = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{4}$$

Үшінші ойыншы үшін де осындай талдауды жүргізе отырып, нәтижесінде $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 3, 4\}$ коалицияларын аламыз. $T = \{3, 4\}$ коалициясында $t = 2$, $T = \{1, 2, 3\}$ коалициясында $t = 3$, $T = \{1, 2, 4\}$ коалициясында $t = 3$ ойыншылар бар, жалпы ойыншылар саны – $n = 4$. компонентін есептейміз:

$$\varphi_3(u)=\sum_T \frac{(t-1)!(n-t)}{n!}=\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+$$

$$+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{4}$$

Төртінші ойыншы үшін талдау жүргізу нәтижесінде $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$ коалицияларын аламыз. $T=\{2, 4\}$ коалициясында $t=2$, $T=\{3, 4\}$ коалициясында $t=2$, $T=\{1, 2, 4\}$ коалициясында $t=3$, $T=\{1, 3, 4\}$ коалициясында $t=3$, $T=\{2, 3, 4\}$ коалициясында $t=3$ ойыншылар бар, жалпы ойыншылар саны – $n=4$. φ_4 компонентін есептейміз:

$$\varphi_4(u)=\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(2-1)!\cdot(4-2)}{4!}+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+$$

$$+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}+\frac{(3-1)!\cdot(4-3)}{4!}=\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{5}{12}.$$

Осы есептеулер нәтижесінде $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{5}{12}\right)$ – Шепли векторын аламыз. Бұл жерде, егер акционерлердің дауысы оларда бар акцияларға пропорционал екенін ескерсек, онда келесі дауыс беру векторын аламыз: $\left(\frac{2}{10};\frac{2{,}5}{10};\frac{2{,}5}{10};\frac{3}{10}\right)$ немесе $\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{3}{10}\right)$. Ал бұл Шепли векторынан өзгеше.

Шепли векторы бойынша 2-ші және 3-ші компоненттер өзара тең. Ал бұл 2-ші және 3-ші ойыншылардың коалиция құру мүмкіндіктері бірдей екенін көрсетеді. 1-ші және 4-ші ойыншылар үшін олардың капиталдарына қарай жағдай табиғи болып келеді.

Жауабы. $\left(\frac{1}{12};\frac{1}{4};\frac{1}{4};\frac{5}{12}\right)$

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Трансферабельді, трансферабельді емес ұтыстармен берілген кооперативті ойындар.

2. Характеристикалық функция. Оның түрлері.

3. Коалициясыз ойынның характеристикалық функциясының қасиеттері.

4. Характеристикалық функцияның қасиеттері.

5. Стратегиялық эквивалентті ойындардың қасиеттері.

6. С-ядро ұғымы.

7. Қандай шешім Н-М шешімі деп аталады?

8. Шепли аксиомалары.

9. Шепли векторы.

10. Характеристикалық функция жағдайындағы бөліс дегеніміз не?

11-15 есептерде n ойыншылардан тұратын ойын берілген. Әрбір ойыншының табатын бірлік табыстары келтірілген. Сонымен қатар, ойыншылар әр түрлі коалициялар құруға мүмкіндіктері бар және осы коалициялардың табыстары берілген. Ең көп табыс табу үшін жұмысшылар қалай әрекет етулері керек, және осы табыстың көлемі қандай болатынын анықтау керек.

11. n =3, A ойыншы – 8 бірлік, B – 5 бірлік, C – 6 бірлік; AB – 15 бірлік, BC – 13 бірлік, AC – 14 бірлік, ABC – 30 бірлік табыс таба алады.

12. n =3, A ойыншы – 13 бірлік, B – 7 бірлік, C – 9 бірлік; AB – 22 бірлік, BC – 22 бірлік, AC – 22 бірлік, ABC – 33 бірлік табыс таба алады.

13. n =3, A ойыншы – 11 бірлік, B – 12 бірлік, C – 5 бірлік; AB – 25 бірлік, BC – 20 бірлік, AC – 18 бірлік, ABC – 30 бірлік табыс таба алады.

14. n =4, A ойыншы – 7 бірлік, B – 8 бірлік, C – 9 бірлік, D – 10 бірлік; AB – 17 бірлік, AC – 18 бірлік, AD – 19 бірлік, BC – 21 бірлік, BD – 22 бірлік, CD – 20 бірлік, ABC – 25 бірлік, ACD – 28 бірлік, ABD – 26 бірлік, BCD – 27 бірлік, $ABCD$ – 40 бірлік табыс таба алады.

15. n =4, A ойыншы – 11 бірлік, B – 9 бірлік, C – 10 бірлік, D – 12 бірлік; AB – 24 бірлік, AC – 22 бірлік, AD – 25 бірлік, BC – 23 бірлік, BD – 26 бірлік, CD – 24 бірлік, ABC – 35 бірлік, ACD – 38 бірлік, ABD – 36 бірлік, BCD – 37 бірлік, $ABCD$ – 50 бірлік табыс таба алады.

16-20 есептерде

а) берілген характеристикалық функцияларды пайдаланып Шепли векторын табу керек;

ә) Шепли векторын екі әдіспен (13.6-теореманы және 13.1-салдарды пайдаланып) табу керек.

16. a) $u(1)=0$, $u(2)=0$, $u(3)=0$,
$u(1,2)=1$, $u(1,3)=0{,}5$, $u(2,3)=1$,
$u(1,2,3)=1$.
ə) $a_1=10$, $a_2=15$, $a_3=25$, $a_4=50$.
17. a) $u(1)=0$, $u(2)=0$, $u(3)=0$,
$u(1,2)=1$, $u(1,3)=0{,}4$, $u(2,3)=0{,}8$,
$u(1,2,3)=1$.
ə) $a_1=15$, $a_2=25$, $a_3=35$, $a_4=25$.
18. a) $u(1)=0$, $u(2)=0$, $u(3)=0$, $u(4)=0$,
$u(1,2)=0$, $u(1,3)=0$, $u(1,4)=1$, $u(2,3)=1$, $u(2,4)=1$,
$u(3,4)=1$,
$u(1,2,3)=1$, $u(1,2,4)=1$, $u(1,3,4)=1$, $u(2,3,4)=1$,
$u(1,2,3,4)=1$.
ə) $a_1=15$, $a_2=25$, $a_3=30$, $a_4=12$, $a_5=18$.
19. a) $u(1)=0$, $u(2)=0$, $u(3)=0$, $u(4)=0$,
$u(1,2)=1$, $u(1,3)=0$, $u(1,4)=0$, $u(2,3)=1$, $u(2,4)=0$,
$u(3,4)=1$,
$u(1,2,3)=1$, $u(1,2,4)=0$, $u(1,3,4)=1$, $u(2,3,4)=1$,
$u(1,2,3,4)=1$.
ə) $a_1=50$, $a_2=30$, $a_3=15$, $a_4=3$, $a_5=2$.
20. a) $u(1)=0$, $u(2)=0$, $u(3)=0$, $u(4)=0$,
$u(1,2)=1$, $u(1,3)=1$, $u(1,4)=0$, $u(2,3)=1$, $u(2,4)=1$,
$u(3,4)=0$,
$u(1,2,3)=1$, $u(1,2,4)=1$, $u(1,3,4)=1$, $u(2,3,4)=1$,
$u(1,2,3,4)=1$.
ə) $a_1=10$, $a_2=20$, $a_3=30$, $a_4=15$, $a_5=25$.

14 - тарау. АНЫҚТАЛМАҒАНДЫҚ ЖАҒДАЙДА ШЕШІМДІ ҚАБЫЛДАУ. ТАБИҒАТПЕН ОЙЫН

14.1. Табиғатпен ойын ұғымы

Ойындарға келтірілетін кейбір есептерде белгілі бір амал (ауа-райы, сатып алушылардың сұранысы және т.т.) орындалатын жағдай туралы ақпараттың болмауына әсер ететін мәселе анықталмағандық болып табылады. Бұл жағдайлар басқа ойыншының біліп отырып орындаған әрекетінен тәуелсіз, ал нақтылықтан тәуелді болады. Осындай ойындар *табиғатпен ойын* деп аталады. Табиғатпен ойында ойыншылардың біреуі жан-жақты қамтып ойнауға тырысады (белсенді ойыншы), екінші ойыншы (ауа-райы, сатып алушылардың сұранысы, экономикалық жағдайдың тұрақсыздығы, нарықтық конъюнктура, үкіметтің саясаты, серіктестің сенімсіздігі, техникалық-құрал жабдықтардың істен шығуы, валюта курсы, инфляция деңгейі және т.б.) кездейсоқ әрекет етеді, яғни осындай ойындарда бір ғана ойыншы саналы түрде, атап айтқанда шешім қабылдайтын тұлға әрекет етеді. Бірінші ойыншының стратегиясын A_i, $(i = 1, \ldots, m)$ арқылы, екінші ойыншының стратегиясын T_j, $(j = 1, \ldots, n)$ арқылы (табиғатқа байланысты болғандықтан) белгілейік.

14.2. Табиғатпен ойындардың тиімді стратегияларын таңдау

Табиғатпен ойындардың тиімді стратегияларын таңдау барысында әр түрлі критерийлер қолданылады. Солардың ішіндегі жиі қолданылатын критерийлерді қарастырайық.

Вальд критерийі. Максиминді стратегияны қолдану ұсынылады. Ол

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

шартынан таңдалынады және ойынның төменгі құнымен бірдей болады. Критерий пессимистік болып табылады, табиғат адам үшін ең нашар түрде әрекет етеді деп есептелінеді.

Максимум критерийі. Бұл критерий де

$$\max_i \left(\min_j a_{ij} \right)$$

шартынан таңдалынады. Критерий оптимистік болып табылады, табиғат адам үшін қолайлы түрде әрекет етеді деп есептелінеді. Табиғаттың әр түрлі жағдайы үшін үлестіру ықтималдығы белгілі деп қабылданады (кей жағдайда тең ықтималды деп есептеліп, шешімді қабылдау үшін ұтыстың математикалық күтімін табу керек болады).

Гурвиц критерийі. Бұл критерий

$$\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1-\alpha) \max_j a_{ij} \right)$$

формуласы бойынша анықталатын стратегияны ұсынады, мұндағы α – оптимистік дәрежесі және [0, 1] аралығында өзгереді.

Критерий табиғаттың ең нашар және ең жақсы болу мүмкіндіктерін ескеретін қандай да бір аралықты қолдайды. $\alpha = 1$ мәнінде Гурвиц критерийі Вальд критерийін, $\alpha = 0$ мәнінде максимум критерийін береді. α шамасына стратегияны таңдауға жауапты тұлға әсер етеді. Қате шешімнің салдары артық, сақтану ниеті артық болған сайын α бірге жақын болады.

Сэвидж критерийі. Критерийдің мақсаты – стратегияларды таңдаған кезде едәуір артық шығынға әкелуі мүмкін стратегияларды таңдауға жол бермеу болып табылады.

Табиғаттың әрбір жағдайы үшін элементтері ойыншының (адам, фирма және т.б.) қандай шығын әкелетінін көрсететін тәуекел матрицасы болып табылады.

$$R = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & \cdots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ r_{m1} & r_{m2} & \cdots & r_{mn} \end{pmatrix}.$$

R матрицасы *тәуекел матрица* деп аталады. Тәуекел матрицасының элементтері мына формуланың көмегімен есептеледі:

$$r_{ij} = \max_i a_{ij} - a_{ij},$$

мұндағы $\max_i a_{ij}$ – бастапқы матрицаның бағанының ең үлкен элементі.

Тиімді стратегия

$$\min_i \left(\max_j r_{ij} \right)$$

өрнегімен анықталады.

Лаплас критерийі. Бұл критерийдің негізінде «жеткілікті емес негіздеу» принципі жатыр. Егер қандай да бір сұраныстың ықтималдығының бірқалыпты емес үлестіруі бар деп есептеудің жеткілікті негізі жоқ болса, онда олар бірдей деп қабылданады және есептің шешімі мына формула бойынша анықталады:

$$\max_i \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij} .$$

Анықталмағандық жағдайда шешімді қабылдау барысында бірнеше критерий тұрғысынан алғанда әр түрлі нұсқаларды бағалаған дұрыс болады. Егер ұсыныстар сәйкес келсе, онда үлкен сенімділікпен ең жақсы шешімді таңдау мүмкін, егер ұсыныстар бір-біріне қарама-қайшылықта болса, онда оның әлді және әлсіз жақтарын ескере отырып шешімді қабылдау керек.

14.1-мысал.

Егін егу маусымында егіншінің төрт баламасы бар: A_1 – жүгері егу, A_2 – бидай егу, A_3 – көкөніс егу, A_4 – жерді жайылым ретінде пайдалану. Көрсетілген мүмкіндіктермен байланысты төлемдер жауын-шашынның мөлшеріне байланысты болады. Оларды шартты түрде төрт топқа бөлуге болады: T_1 – қатты жауын-шашын, T_2 – орташа жауын-шашын, T_3 – аздаған жауын-шашын, T_4 – құрғақ маусым.

Төлем матрицасы мына түрде бағаланады (матрицадағы төлемдер мың теңгемен алынған):

$$\begin{pmatrix} -50 & 400 & 200 & -100 \\ 250 & 450 & 175 & 260 \\ -200 & 750 & 275 & -75 \\ 100 & 125 & 175 & 75 \end{pmatrix}.$$

Егінші қандай әрекет істеу керек: жүгері егу керек пе, бидай егу керек пе, көкөніс егу керек пе, әлде жерді жайылым ретінде пайдалану керек пе?

Шығарылуы.

1. Вальд критерийіне сәйкес максимин стратегиясын пайдаланамыз:

$$\max_i\left(\min_j a_{ij}\right)=\max(-100;175;-200;75)=175.$$

Вальд критерийі бойынша егінші бидай егу керек.

2. Сэвидж критерийі бойынша $r_{ij}=\max_i a_{ij}-a_{ij}$ формуласын пайдаланып тәуекел матрицасын құрамыз:

$$\begin{pmatrix} 250-(-50) & 750-400 & 275-200 & 260-(-100) \\ 250-250 & 750-450 & 275-175 & 260-260 \\ 250-(-200) & 750-750 & 275-275 & 260-(-75) \\ 250-100 & 750-125 & 275-175 & 260-75 \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 300 & 350 & 75 & 360 \\ 0 & 300 & 100 & 0 \\ 450 & 0 & 0 & 335 \\ 150 & 625 & 100 & 185 \end{pmatrix}$$

Тиімді стратегияны $\min_i\left(\max_j r_{ij}\right)$ өрнегімен анықтаймыз.

$$\min(360;300;450;625)=300$$

Осы критерий бойынша егінші A_2 – бидай егу керек.

3. Гурвиц критерийі. Тиімді стратегияны $\max_i\left(\alpha\min_j a_{ij}+(1-\alpha)\right.$

$\max\limits_j a_{ij}\Big)$ формуласы бойынша анықтаймыз. $\alpha = 0{,}5$ болсын деп ұсынайық.

$$\max_i\left(0{,}5\min_j a_{ij} + (1-0{,}5)\max_j a_{ij}\right) = \max(0{,}5\cdot(-100;\,175;\,-200;\,75)+$$

$$+0{,}5\cdot(400;\,450;\,750;\,175)) =$$

$$= \max(0{,}5\cdot(-100+400;\,175+450;\,-200+750;\,75+175)) =;$$

$$= \max(150;\,312{,}5;\,275;\,125) = 312{,}5$$

яғни егінші A_2 – бидай егу керек.

4. Максимум критерийі. Егер табиғаттың әр түрлі жағдайы үшін үлестіру ықтималдығын белгілі деп қабылдасақ, мысалы, бұл жағдайлар тең ықтималды деп есептесек ($p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \frac{1}{4}$), онда шешімді қабылдау үшін ұтыстың математикалық күтімін табу керек болады:

$$M_1 = (-50)\cdot\frac{1}{4} + 400\cdot\frac{1}{4} + 200\cdot\frac{1}{4} + (-100)\cdot\frac{1}{4} = \frac{450}{4} = 112{,}5;$$

$$M_2 = 250\cdot\frac{1}{4} + 450\cdot\frac{1}{4} + 175\cdot\frac{1}{4} + 260\cdot\frac{1}{4} = \frac{1135}{4} = 283{,}75;$$

$$M_3 = (-200)\cdot\frac{1}{4} + 750\cdot\frac{1}{4} + 275\cdot\frac{1}{4} + (-75)\cdot\frac{1}{4} = \frac{750}{4} = 187{,}5;$$

$$M_4 = 100\cdot\frac{1}{4} + 125\cdot\frac{1}{4} + 175\cdot\frac{1}{4} + 75\cdot\frac{1}{4} = \frac{475}{4} = 118{,}75,$$

M_2 ең үлкен мәнді қабылдайтындықтан, бидай еккен тиімді болып табылады.

5. Лаплас критерийі. Есептің шешімін $\max\limits_i \frac{1}{n}\sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}$ формуласының көмегімен анықтаймыз.

$$\max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \max\left[\frac{1}{4}(-50+400+200+(-100);\right.$$

$$250+450+175+260;$$

$$\left.-200+750+275+(-75);100+125+175+75)\right]=$$

$$=\max\left(\frac{1}{4}(450;1135;750;475)\right)=$$

$$=\max(112{,}5;\ 283{,}75;\ 187{,}5;\ 118{,}75)=283{,}75\,.$$

Бұл критерий бойынша да A_2 – бидай еккен тиімді.

Жауабы. Вальд критерийі бойынша – бидай;

Сэвидж критерийі бойынша – бидай;

Гурвиц критерийі бойынша – бидай;

максимум критерийі бойынша – бидай;

Лаплас критерийі бойынша – бидай еккен тиімді болып есептеледі.

Е с к е р т у. Барлық жағдайда әр түрлі критерийлерде бір шешімге келе бермейді.

14.2-мысал.

Кәсіпорын жаңа өнім шығаруды жоспарлайды. Ол үшін станоктар сатып алу қажет. Көтерме сауда жүйесін станокпен қамтамасыз ету үшін олардың саны 50-ден артпайды. Бір комплектте 10 станок болады. Ең кем дегенде 20 станок әкелінеді. Жеткізу көлемі туралы шешімді вектор түрінде жазуға болады:

$$A=(20;\ 30;\ 40;\ 50).$$

Бір станоктан жыл сайын өндірілетін өнімнен 109,5 мың теңге пайда түседі. Бір станоктың көтерме құны – 23,875 мың теңге, эксплуатациялық шығындары – 18 мың теңге. Өнімді өндіру барысында дайындауға жұмсалатын шығын – 127,5 мың теңге және ол станоктардың саны мен өндіру көлемінен тәуелді емес.

Сұраныс T жұмыс істейтін станоктардан алынатын өнім санына пропорционал болсын. Қарапайымдылық үшін келесі сұраныс жағдайының векторымен шектелейік:

$$T = (0; 10; 20; 30; 40; 50).$$

Қанша станок сатып алғаны тиімді болады?

Шығарылуы. Егер қорытынды ережені «табыс-шығын» ретінде құрастырсақ, онда пайдалылық матрицасының элементтерін келесі формуламен есептеуге болады:

$$a_{ij} = (109{,}5 - 18) \cdot \min(A_i, T_j) - 23{,}875 \cdot A_i - 127{,}5 .$$

Осы формуланы пайдаланып ұтыс матрицасын құрамыз:

$$\begin{array}{c} \\ A_1 = 20 \\ A_2 = 30 \\ A_3 = 40 \\ A_4 = 50 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} T_1 = 0 & T_2 = 10 & T_3 = 20 & T_4 = 30 & T_5 = 40 & T_6 = 50 \end{array} \\
\begin{pmatrix} -605 & 310 & 1225 & 1225 & 1225 & 1225 \\ -843{,}75 & 71{,}25 & 986{,}25 & 1901{,}25 & 1901{,}25 & 1901{,}25 \\ -1082{,}5 & -167{,}5 & 747{,}5 & 1662{,}5 & 2577{,}5 & 2577{,}5 \\ -1321{,}25 & -406{,}25 & 508{,}75 & 1423{,}75 & 2338{,}75 & 3253{,}75 \end{pmatrix} \end{array}.$$

1. Лаплас критерийі.

$$\max_i \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij} = \max\left[\frac{1}{6}(-605 + 310 + 1225 + 1225 + 1225 + 1225;\right.$$

$$-843{,}75 + 71{,}25 + 986{,}25 + 1901{,}25 + 1901{,}25 + 1901{,}25;$$

$$-1082{,}5 + (-167{,}5) + 747{,}5 +$$

$$+1662{,}5 + 2577{,}5 + 2577{,}5; -1321{,}25 + (-406{,}25) + 508{,}75 +$$

$$+1423{,}75 + 2338{,}75 + 3253{,}75) =$$

$$= \max\left(\frac{1}{6}(4605; 5917{,}5; 6315; 5797{,}5)\right) =$$

$$= \max(767{,}5; 986{,}25; 1052{,}5; 966{,}25) = 1578{,}75 .$$

Максималды мәнді таңдау – күтілетін 1052,5 мың теңге пайдасымен 40 станогы бар нұсқаны таңдау тиімді болып табылады.

2. Вальд критерийі.

$$\max_i\left(\min_j a_{ij}\right) = \max(-605; -843{,}75; -1082{,}5; -1321{,}25) = -605 .$$

Вальд критерийі бойынша 20 станокты сатып алу керек және максималды мүмкін болатын шығын – 605 мың теңгеден аспайды.

3. Сэвидж критерийі.

$r_{ij} = \max\limits_{i} a_{ij} - a_{ij}$ формуласын пайдаланып тәуекел матрицасын құрамыз:

$$\begin{pmatrix} -605-(-605) & 310-310 & 1225-1225 & 1901,25-1225 & 2577,5-1225 & 3253,75-1225 \\ -605-(-843,75) & 310-71,25 & 1225-986,25 & 1901,25-1901,25 & 2577,5-1901,25 & 3253,75-1901,25 \\ -605-(-1082,5) & 310-(-167,5) & 1225-747,5 & 1901,25-1662,5 & 2577,5-2577,5 & 3253,75-2577,5 \\ -605-(-1321,25) & 310-(-406,25) & 1225-508,75 & 1901,25-1423,75 & 2577,5-2338,75 & 3253,75-3253,75 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 676,25 & 1352,5 & 2028,75 \\ 238,75 & 238,75 & 238,75 & 0 & 676,25 & 1352,5 \\ 477,5 & 477,5 & 477,5 & 238,75 & 0 & 676,25 \\ 716,25 & 716,25 & 716,25 & 477,5 & 238,75 & 0 \end{pmatrix}$$

Тиімді стратегияны $\min\limits_{i}\left(\max\limits_{j} r_{ij}\right)$ өрнегімен анықтаймыз.

$$\min(2028,75;\ 1352,5;\ 676,25;\ 716,25) = 676,25$$

Сэвидж критерийі бойынша 40 станокты сатып алу тиімді болып табылады және түсетін табыс 676,25 мың теңгеден кем болмайды.

4. Гурвиц критерийі.

$\max\limits_{i}\left(\alpha \min\limits_{j} a_{ij} + (1-\alpha)\max\limits_{j} a_{ij}\right)$ формуласының көмегімен тиімді стратегияны анықтаймыз. $\alpha = 0,5$ болсын деп ұсынайық.

$$\max_{i}\left(0,5\min_{j} a_{ij} + (1-0,5)\max_{j} a_{ij}\right) =$$

$$= \max(0,5 \cdot (-605;\ -843,75;\ -1082,5;\ -1321,25) +$$

$$+0{,}5\cdot\left(1225;1901{,}25;2577{,}5;3253{,}75\right)\right)=$$

$$=\max\left(0{,}5\cdot\left(620;1057{,}5;1495;1932{,}5\right)\right)=$$

$$=\max\left(310;\ 528{,}75;\ 747{,}5;\ 966{,}25\right)=966{,}25\ .$$

$\alpha = 0{,}5$ болғанда (сәтті және сәтсіз мүмкіндіктері теңықтималды) 50 станок сатып алу керек және 966,25 мың теңге көлемінде пайда күтуге болады.

5. Максимум критерийі.

$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = \dfrac{1}{6}$ деп алып ұтыстың математикалық күтімін табамыз:

$$M_1 = (-605)\cdot\frac{1}{6} + 310\cdot\frac{1}{6} + 1225\cdot\frac{1}{6} + 1225\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+1225\cdot\frac{1}{6} + 1225\cdot\frac{1}{6} = 767{,}5\,;$$

$$M_2 = (-843{,}75)\cdot\frac{1}{6} + 71{,}25\cdot\frac{1}{6} + 986{,}25\cdot\frac{1}{6} + 1901{,}25\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+1901{,}25\cdot\frac{1}{6} + 1901{,}25\cdot\frac{1}{6} = 986{,}25\,;$$

$$M_3 = (-1082{,}5)\cdot\frac{1}{6} + (-167{,}5)\cdot\frac{1}{6} + 747{,}5\cdot\frac{1}{6} + 1662{,}5\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+2577{,}5\cdot\frac{1}{6} + 2577{,}5\cdot\frac{1}{6} = 1052{,}5\,;$$

$$M_4 = (-1321{,}25)\cdot\frac{1}{6} + (-406{,}25)\cdot\frac{1}{6} + 508{,}75\cdot\frac{1}{6} + 1423{,}75\cdot\frac{1}{6} +$$

$$+2338{,}75 + 3253{,}75 = 966{,}25\,.$$

M_3 ең үлкен мәнді қабылдайтындықтан, 40 станок сатып алған тиімді болып табылады.

Сонымен, қарастырып отырған мысалда әр түрлі критерий әр түрлі қорытындыға әкелді.

Жауабы.

Вальд критерийі бойынша – 20 станок;

Сэвидж критерийі бойынша – 40 станок;

Гурвиц критерийі бойынша – 20 станок;

Максимум критерийі бойынша – 40 станок;

Лаплас критерийі бойынша – 40 станок сатып алған тиімді болып табылады.

Критерийді таңдау мүмкіндігі осыған ұқсас есептердің қойылуы үшін жеткілікті мәліметтері болған жағдайда экономикалық шешімдерді қабылдайтын тұлғаларға еркіндік береді. Кез келген критерий есепті шешушінің мүмкіндігімен және оның сипатымен, білімдерімен және сенімділігімен келісілуі керек.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Анықталмағандық жағдайда шешімді қабылдау ерекшелігі.

2. Табиғатпен ойынның практикада кездесетін басқа ойындардан айырмашылығы қандай?

3. Вальд критерийі.

4. Гурвиц критерийі.

5. Сэвидж коитерийі.

6. Лаплас критерийі.

7. Максимум критерийі.

8. Тәуекел матрицасы қалай құрылады?

9. Қай жағдайда Гурвиц критерийі Вальд критерийін береді?

10. Қай жағдайда Гурвиц критерийі максимум критерийін береді?

11-15 есептерде берілген матрицалардың жолдары бірінші ойыншының стратегияларына, бағандары 2-ойыншының (табиғат) стратегияларына сәйкес келеді деп Вальд, Сэвидж, Гурвиц, Лаплас және максимум критерийлерін пайдаланып берілген тапсырмалардың тиімді шешімдерін (стратегияларын) қабылдау керек. Гурвиц критерийі үшін коэффициентті 1) 0,5; 2) 0,7-ге тең деп алып талдау жүргізіңіздер.

11.

1-ойыншының стратегиялары	Табиғаттың жағдайы			
	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	5	2	8	4
A_2	2	3	4	12
A_3	8	5	3	10
A_4	1	4	2	8

12.

1-ойыншының стратегиялары	Табиғаттың жағдайы			
	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1		4	4	7
A_2	0	-1	3	8
A_3	10	6	0	-4
A_4	12	6	-1	5
A_5	6	4	2	-2

13.

1-ойыншының стратегиялары	Табиғаттың жағдайы			
	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	2	6	5	8
A_2	3	9	1	4
A_3	5	1	6	2

14.

1-ойыншының стратегиялары	Табиғаттың жағдайы			
	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	4	3	3	4
A_2	2	4	5	3
A_3	0	5	5	1
A_4	-1	6	6	0

15.

1-ойыншының стратегиялары	Табиғаттың жағдайы			
	T_1	T_2	T_3	T_4
A_1	0	-2	-4	-6
A_2	-1	0	-2	-4
A_3	-2	-1	0	-2
A_4	-3	-2	-1	0

IV - бөлім

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУДІҢ АРНАЙЫ МОДЕЛЬДЕРІ

15 - тарау. ЖЕЛІЛІК ЖОСПАРЛАУ ЖӘНЕ БАСҚАРУ МОДЕЛЬДЕРІ

15.1. Желілік жоспарлау мен басқарудың тағайындалуы және қолдану салалары

Күрделі үрдістерді жоспарлаудың тиімдірек тәсілдері желілік жоспарлау мен басқарудың (ЖЖБ) жаңа әдістерін құруға әкеледі.

ЖЖБ әдістерінің жүйесі – ірі халықшаруашылық кешендерін, ғылыми зерттеулерді, өндірісті конструкторлық және технологиялық әзірлеуді, өнімдердің жаңа түрлерін, құрылыстар мен қайта құруды, негізгі қорды желілік графиканы қолдану жолымен түбегейлі жөндеуді дайындаудағы жоспарлау мен басқару әдістерінің жүйесі болып табылады.

ЖЖБ желілік графиканың көмегімен үрдісті модельдеуге негізделген және есептеу әдістерінің жиынтығын, кешенді жұмыстарды жоспарлау және басқару бойынша ұйымдастыру мен бақылау шараларын береді.

ЖЖБ жүйесі

– жұмыстың қандай да бір жиынтығын жүзеге асырудың күнтізбелік жоспарын қалыптастыруға;

– уақыт, еңбек, материалдық және қаражат ресурстарының қорларын айқындауға және жұмылдыруға;

– «жетекші звено» принципі бойынша жұмыс жиынтығын жұмыс барысында мүмкін болатын орындалмаушылықтарды болжайтындай және ескертетіндей басқаруды жүзеге асыруға;

– әр түрлі деңгейдегі басшылар мен жұмысты орындаушылар арасындағы жауапкершілікті дұрыс үлестіргенде басқару тиімділігін арттыруға мүмкіндік береді.

ЖЖБ қолдану диапазоны өте зор: жеке тұлғалардың қызметіне қатысты мәселелерден жүздеген ұйымдар мен он мыңдаған қызметкерлер қатысатын жобаларға (мысалы, ірі аумақтық-өндірістік кешенді дайындау және тұрғызу) дейін қолданылады.

Жұмыс жиынтығы (*амалдар жиынтығы* немесе *жобасы*) деп орындау үшін көптеген жұмыс түрлерін жүзеге асыру талап етілетін кез келген мәселелерді түсінеміз. Ол қандай да бір ғимаратты тұрғызу, корабльдер мен ұшақтарды немесе кез келген күрделі нысандарды дайындау, және осы құрылыстың жобасын дайындау, және жобаны жүзеге асыру жоспарын құру үрдісі де осы жиынтыққа жатады.

Мыңдаған жеке зерттеулер мен амалдардан тұратын үлкен және ірі жобаларды жүзеге асыру бойынша жұмыс жоспарын құру үшін оны қандай да бір математикалық модельдің көмегімен сипаттау қажет. Желілік модель жобаны сипаттаудың осындай құралы болып табылады.

15.2. Желілік модель және оның элементтері

Желілік модель – желінің арнайыландырылған формасында берілген, графикалық бейнеленуі *желілік графика* деп аталатын өзара байланысты жұмыстардың (амалдардың) орындалу жоспарының қандай да бір жиынтығын береді. Желілік модельдің басты ерекшелігі – алдыңғы жұмыстардың барлық уақыттық өзара байланыстарының дұрыс анықталуы.

Желілік модельдің басты элементтері – *оқиға* және *жұмыс*.

Жұмыс ұғымы ЖЖБ-да кең мағынада пайдаланылады.

Біріншіден, бұл *нағыз жұмыс* – ресурстар шығынын (мысалы, өнімді дайындау, құралды сынақтан өткізу және т.б.) талап ететін уақыт бойынша созылған үрдіс. Әрбір нағыз жұмыс нақты, дәл сипатталған және жауапты орындаушысы болуы керек.

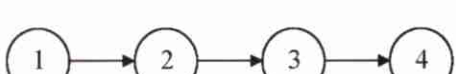
Екіншіден, бұл күту – ресурстар шығынын (мысалы, сырлағаннан кейінгі кебу үрдісі, металлдың ескіруі, бетонның қатты болуы және т.б.) талап етпейтін уақыт бойынша созылған үрдіс.

Үшіншіден, бұл *тәуелділік*, немесе *жалған жұмыс* – еңбек, материалдық ресурстар немесе уақыт шығынын талап етпейтін екі немесе бірнеше жұмыстардың (оқиғалардың) арасындағы логикалық байланыс. Ол бір жұмыстың мүмкіндігі екіншісінің нәтижесінен тікелей тәуелді болатынын көрсетеді. Жалған жұмыстың ұзақтығы нөлге тең деп қабылданады.

Оқиға – жобаның орындалуының жеке кезеңін бейнелейтін қандай да бір үрдістің аяқталу мерзімі. Оқиға жеке жұмыстың дербес нәтижесі немесе бірнеше жұмыстың жалпы нәтижесі болуы мүмкін. Осы оқиғаға дейін болған барлық жұмыстар аяқталғанда ғана оқиға болуы мүмкін. Келесі жұмыстар оқиға орындалғаннан кейін ғана басталады. Осыдан оқиғаның *қосжақтылық* сипаты алынады: оқиғаға дейінгі барлық жұмыс үшін ол *ақырғы*, ал оқиғадан кейінгі барлық жұмыс үшін ол *бастапқы* болып табылады. Бұл жерде оқиғаның ұзақтығы болмайды және лезде орындалады деп ұсынылады. Сондықтан, желілік модельге енгізілетін әрбір оқиға толық, дәл және жан-жақты анықталуы керек, оның тұжырымдамасы оған дейінгі барлық жұмыстың нәтижелерін қамтуы керек.

Желілік модельдегі оқиғаларды *бастапқы* және *аяқтаушы* деп бөледі. Бастапқы оқиғаның ұсынылған жұмыстар жиынтығының моделіне қатысты алдындағы жұмыстар мен оқиғалар болмайды. Аяқтаушы оқиғаның кейінгі жұмыстары мен оқиғалары болмайды.

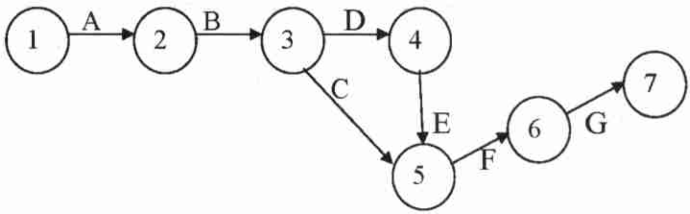
Желілі графикадағы оқиға дөңгелектер арқылы, ал жұмыстар – жұмыстар арасындағы байланысты көрсететін көрсеткіштер (бағытталған түзу) арқылы белгіленеді. 15.1-суретте қарапайым графикаға мысал келтірілген.



15.1-сурет

Графикадан көріп отырғанымыздай 2-оқиға орындалмай 3-оқиға орындалмайды және т.б. Бұл жерде 2-оқиға 1-оқиғаға қатысты, 4-оқиға 3-оқиғаға қатысты *келесі оқиға* деп аталады. 3-оқиға 4-оқиғаға қатысты *алдындағы оқиға* деп аталады. Келтірілген анықтамалар оқиғалар бірінен кейін бірі орындалатынын және аралық оқиғалардың болмайтынын білдіреді. Бір оқиғаның бірнеше алдындағы, не келесі оқиғалары болуы мүмкін.

15.2-суретте модельдеу есебінің графикасы келтірілген. Қандай да бір экономикалық нысанның тиімді жоспарын құру қарастырылсын. Осы есепті шығару үшін келесі жұмыстарды орындау қажет: A – зерттеу мәселесін қою керек; B – зерттелінетін нысанның математикалық моделін құру керек; C – ақпарат жинау керек; D – есепті шығару әдісін таңдау керек; E – ЭЕМ үшін программа жазып оны тексеру керек; F – тиімді жоспарды есептеу керек; G – есептеу нәтижесін тапсырыс берушіге беру керек. Графикадағы цифрлар арқылы сәйкес жұмыстардың орындалуына әкелетін оқиғалардың нөмірлері белгіленген.

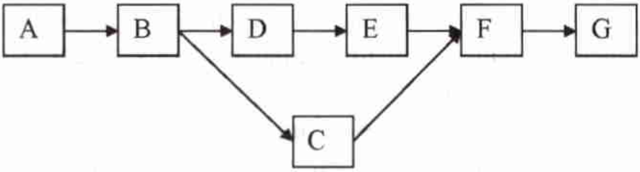


15.2-сурет

3-оқиға орындалғаннан кейін ғана C және D жұмыстарын бір-бірінен тәуелсіз, яғни A және B жұмыстары орындалғанда бастауға болатынын; E жұмысын – 4-оқиға, яғни A, B және D жұмыстары орындалғаннан кейін бастауға болатынын; F жұмысын – 5-оқиға, яғни оның алдындағы барлық A, B, C, D және E жұмыстары орындалғаннан кейін бастауға болатынын графикадан көруге болады.

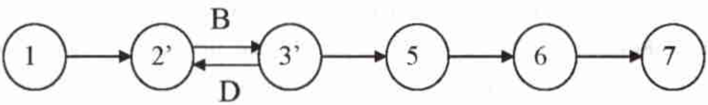
15.2-суретте келтірілген желілік модельде сандық бағалар жоқ. Мұндай желі *құрылымдық* деп аталады. Бірақ практикада көбінесе жұмыстың орындалу ұзақтығы уақыт бірлігімен (сағат, күн, апта, декада, ай және т.б.) өлшенетін, сондай-ақ, басқа параметрлер де (жұмыс қиындылығы, құны және т.б.) бағаланатын желілер қолданылады.

Ескерту. Қарастырылған мысалдарда желілік графика жұмыстар мен оқиғалардан тұрады. Бірақ желі оқиғасыз да құрылуы мүмкін. Осындай желілерде графтың төбелері (мысалы, тіктөртбұрыштармен бейнеленген) белгілі бір жұмыстарды, ал көрсеткіштер арқылы олардың орындалу ретін көрсететін осы жұмыстар арсындағы байланысты белгілейді. Мысал ретінде 15.2-суретте



15.3-сурет

көрсетілген қандай да бір экономикалық нысанның модельдеу есебі мен тиімді жоспарын құрудың «оқиға-жұмыс» желілік графикасын 15.3-суретте көрсетілген «жұмыс-байланыс» желісі түрінде келтірілген. Ал осы есептің «оқиға-жұмыс» желілік графикасы, бірақ жұмыстар тізімі сәтсіз құрылған желі 15.4-суретте келтірілген (келесі тақырыптағы ережені қараңыз).



15.4-сурет

«Жұмыс-байланыс» желілік графикасының «оқиға-жұмыс» графикасынан артықшылықтары:

– жалған жұмыстар жоқ;

– құру және қайта құру техникасы қарапайым;

– орындаушыға онша түсінікті емес оқиға ұғымына қарағанда өте таныс жұмыс ұғымы ғана енгізіледі.

Сонымен қатар, көбінесе оқиғалар жұмысқа қарағанда едәуір аз (желі күрделілігінің көрсеткішін беретін жұмыс санының оқиғалар санына қатынасы бірден артық) болғандықтан оқиғасыз желілер едәуір зор болып келеді. Сондықтан осы желілер кешенді басқару тұрғысынан қарағанда онша тиімді болмайды. Бұл қазіргі кезде «оқиға-жұмыс» желілік графикасының кеңінен тарағанын көрсететін дерек болып табылады.

15.3. Желілік графикаларды құру реті мен ережесі

Желілік графикалар жоспарлаудың бастапқы кезеңінде құрылады. Алдымен жоспарланатын үрдіс жеке жұмыстарға бөлінеді, жұмыстар мен оқиғалар тізімі дайындалады, олардың орындалуының логикалық байланысы мен орындалу реті ойластырылады, жұмыстар жауапты орындаушыларға бекітіледі. Солардың көмегімен әрбір жұмыстың ұзақтығы бағаланады. Содан кейін желілік графика құрылады. Желілік графика бірыңғайланғаннан кейін оқиғалар мен жұмыстардың параметрлері есептеледі, уақыт қоры және сыншыл жол (15.4-тақырыпты қараңыз) анықталады. Соңында желілік графикаға талдау жүргізіледі және оңтайландырылады. Қажет болған жағдайда оқиғалар мен жұмыстардың параметрлерін қайта есептей отырып желілік графика қайтадан сызылады.

Желілік графиканы құрған кезде келесі ережелерді ескеру қажет:

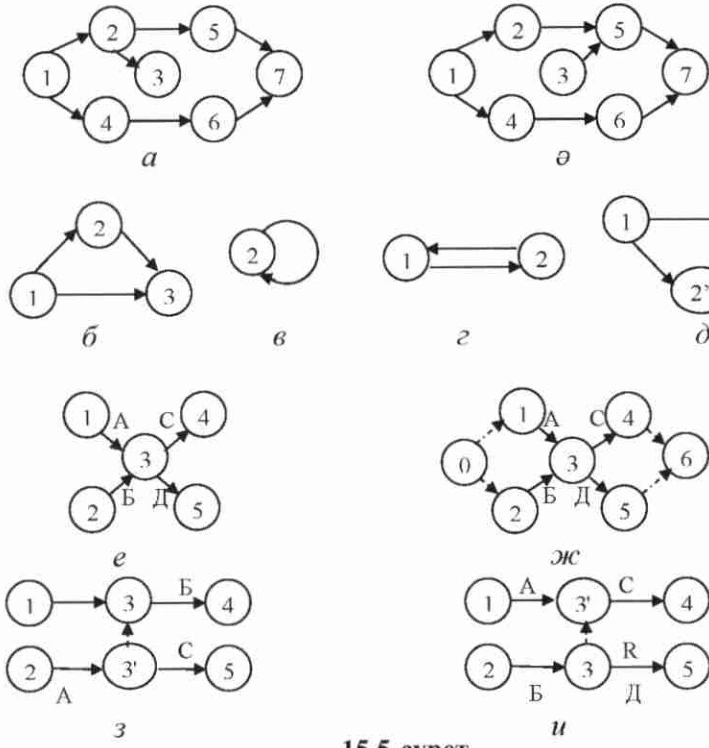
– желілік модельдерде «түйыққа тірелген» оқиғалар, яғни аяқтаушы оқиғадан басқа бірде-бір жұмыс шықпайтын оқиға болмауы керек (15.5 *а*-сурет). Бұл жерде не (2, 3) жұмыс қажет жоқ және оны жою қажет, не қандай да бір келесі оқиғаны аяқтау үшін 3-оқиғадан кейінгі белгілі бір жұмыстың қажеттілігі ескерілмеген. Мұндай жағдайларда пайда болған түсініспеушілікті түзету үшін оқиғалар мен жұмыстардың өзара байланыстарын жете зерттеу қажет;

– желілік модельдерде ең болмағанда алдында бір жұмыс «артқы» оқиға (бастапқыдан өзге) болуы керек (15.5 ә-сурет – 3-оқиға). Бұл жерде 3-оқиғаның алдында жұмыс қарастырылмаған. Сондықтан 3-оқиғаның орындалуы мүмкін емес, демек, одан кейінгі жұмыстың да (3, 5) орындалуы мүмкін емес;

– желіде түйық контурлар мен ілмешектер, яғни кейбір оқиғаларды өздерімен біріктіретін жолдар болмауы керек (15.5 *б*,*в*-суреттер);

– кез келген екі оқиға бір ғана жұмыс-көрсеткішпен тікелей байланысты болуы керек. Бұл шарттың орындалмауы қатар орындалатын жұмыстарды бейнелеу кезінде пайда болады (15.5 *г*-сурет). Егер осы жұмыстарды осы түрде қалдырса, онда екі әр түрлі жұмыстар (1, 2) бірдей белгіленетіндіктен түсінбестік пайда болады; негізінен (i, j) арқылы i-ші оқиғаны j-ші оқиғамен байланыстыратын жұмысты түсіну қабылданған. Бірақ, бұл жұмыстардың мағынасы, орындаушылар құрамы және жұмыстарға жұмсалатын ресурстар саны маңызды түрде өзге болуы мүмкін. Бұл жағдайда *жалған оқиға* (15.5 *д*-сурет) мен *жалған жұмысты* (2', 2) енгізу ұсынылады және қатар орындалатын жұмыстардың бірі (1, 2') осы жалған оқиғаға тіреледі. Жалған жұмыстар графикада нүкте сызықтармен бейнеленген;

– желіде бір бастапқы және бір аяқтаушы оқиғаның болуы ұсынылады. Егер бұл шарт орындалмаса (15.5 *е*-сурет), онда жалған оқиғалар мен жұмыстарды (15.5 *ж*-сурет) енгізе отырып шарттың орындалуын қадағалауға болады.



15.5-сурет

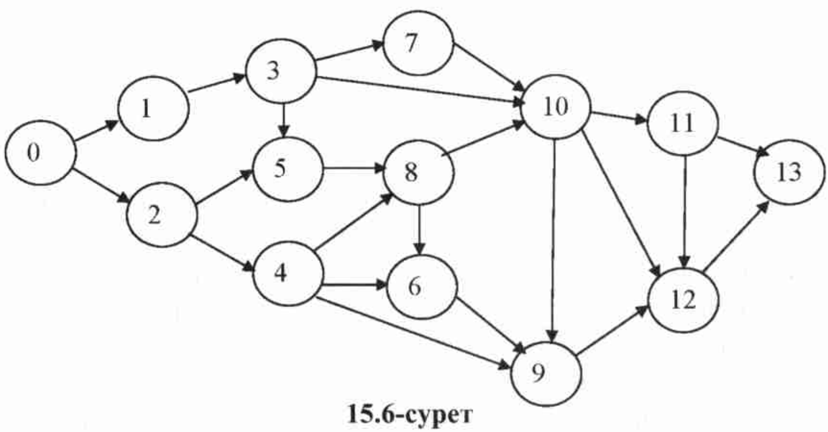
Жалған жұмыстар мен оқиғаларды басқа жағдайларда да енгізу қажет болады. Солардың бірі – нақты жұмыстармен байланыссыз емес оқиғалардың тәуелділігін бейнелеу. Мысалы, А және Б жұмыстары (15.5 *з*-сурет) бір-бірінен тәуелсіз орындалуы мүмкін, бірақ өндіріс шарты бойынша А жұмысы аяқталмайынша Б жұмысын бастауға болмайды. Ал бұл С жалған жұмысын енгізуді талап етеді. Басқа жағдай – жұмыстардың толық емес тәуелділігі. Мысалы, С жұмысын бастау үшін А және Б жұмыстарын аяқтау керек, бірақ Д жұмысы тек қана Б жұмысына тәуелді, ал А жұмысынан тәуелді емес. Сонда жалған R жұмысы мен жалған 3' оқиғасын енгізу талап етіледі (15.5 *и*-сурет).

Сонымен қатар, жалған жұмыстар мерзімді ұзарту мен күтуді бейнелеу үшін енгізілуі мүмкін. Алдыңғы жағдайлардан өзге бұл жерде жалған жұмыс уақыт бойынша ұзақтығымен сипатталады.

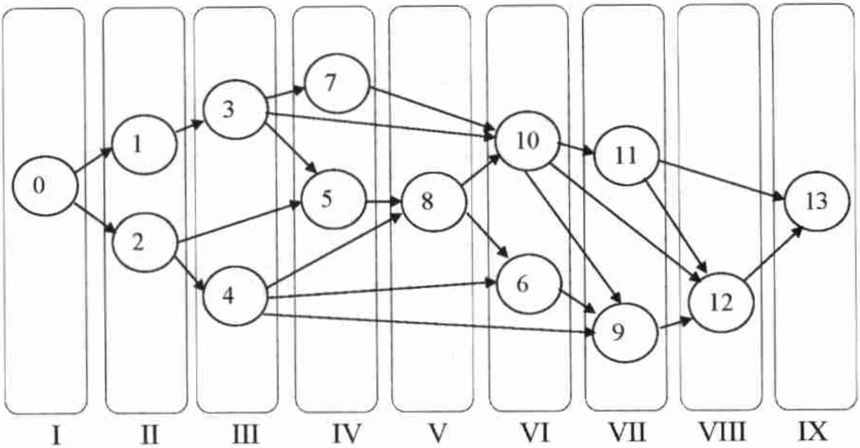
15.4. Желілік графиканы реттеу

Айталық қандай да бір жобаны құрған кезде 14 оқиға бөлінді: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 және олардың жұмыстарын 23 байланыстырушы (0, 1), (0, 2), (1, 3), (2, 4), (2, 5), (3, 5), (3, 7),(3, 10), (4, 6), (4, 8), (4, 9), (5, 8), (6, 9), (7,10), (8, 6), (8, 10), (9, 12), (10, 9), (10, 11), (10, 12), (11, 12), (11, 13), (12, 13) бөлінсін. Желілік графиканы құрып, реттеу керек.

Жұмыс тізімінде 0-оқиға – бастапқы оқиға (оның алдында ешқандай жұмыс жоқ), 13-оқиға – аяқтаушы оқиға (одан кейін ешқандай жұмыс жоқ). Желілік графикада уақыт солдан оңға қарай өзгереді деп ұсынып, 0-ші оқиғаны графиканың сол жақ шетіне, ал 13-ші оқиғаны оң жақ шетіне орналастырамыз. Осы екі оқиғаның арасына қандай да бір ретпен олардың нөмірлеріне сәйкес келетін аралық оқиғаларды орналастырамыз (15.6-сурет). Оқиғаларды жұмыс тізіміне сәйкес көрсеткіштер арқылы жұмыстармен байланыстырамыз.



15.6-сурет



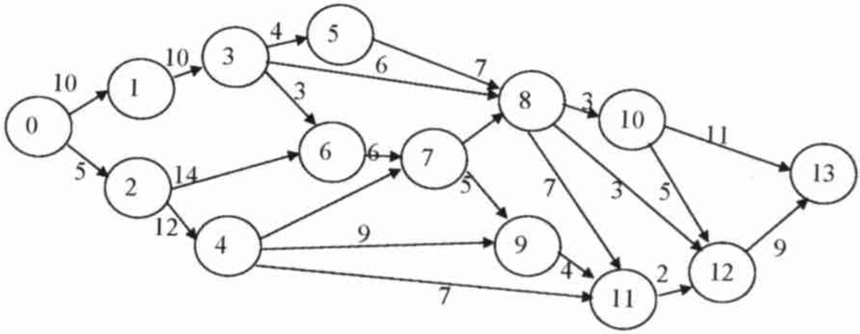
15.7-сурет

Алынған желілік графика оларды құруға қойылған ережелерге толығымен сай, әйтсе де, ол толығымен реттелген болып саналмайды.

Реттелген желілік графика мына түрде орналасады: кез келген жұмыс үшін оның алдындағы оқиға солға қарай орналасқан және осы жұмысты аяқтаушы оқиғамен салыстырғанда нөмірі кіші болуы керек. Басқаша айтқанда, реттелген желілік графикада барлық жұмыс-көрсеткіштер солдан оңға: кіші нөмірлі оқиғадан үлкен нөмірлі оқиғаға қарай бағытталады.

Желілік графиканы шартты бірнеше қабаттарға бөліп, оларды нүкте сызықтармен жүргізіп, рим цифрларымен белгілейміз.

I қабатқа 0-оқиғаны орналастырамыз. Ойша осы оқиғаны және осы оқиғадан шығатын барлық жұмысты графикадан алып тастаймыз. Сонда 1-ші және 2-ші оқиғаларда ену көрсеткіші болмайды да, II-қабатты құрады. 1-ші және 2-ші оқиғаларды және осы оқиғалардан шығатын барлық жұмыстарды ойша сызып тастаймыз. 3-ші және 4-ші оқиғалар ену көрсеткіші болмайды да III-қабатты құрады. Осы үрдісті жалғастыра отырып, келесі қабаттарды (оқиғаларымен) аламыз: IV қабатта – 7-ші және 5-ші оқиғалар; V қабатта – 8-ші оқиға; VI қабатта – 6-шы және 10-шы оқиғалар; VII қабатта – 9-шы және 11-ші оқиғалар; VIII қабатта – 12-ші оқиға; IX қабатта – 13-ші оқиға орналасады.



15.8-сурет

Желідегі тізбектің әрбір жұмысының ақырғы оқиғасы одан кейінгі жұмыстың бастапқы оқиғасымен беттесетін кез келген жұмыс тізбегі *жол* деп аталады.

Жолдың екі түрі кездеседі:

– бастапқы оқиғадан аяқтаушы оқиғаға дейінгі жұмыстардың орындалуының үзіліссіз тізбегі *толық жол* деп аталады;

– осы жолдағы жұмыстардың орындалуының ең көп ұзақтығымен сипатталатын бастапқы оқиғадан аяқтайтын оқиғаға дейінгі жол *сыншыл жол* деп аталады.

Мысалы, қарастырылып отырған желілік графикада (15.8-сурет) толық жолдар:

$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5 \rightarrow 8 \rightarrow 10 \rightarrow 13$ жолы,
ұзақтығы: 10+10+4+7+3+11 = 45;
$0 \rightarrow 2 \rightarrow 4 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13$ жолы,
ұзақтығы: 5+12+7+2+9 = 35;
$0 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 9 \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13$ жолы,
ұзақтығы: 10+10+3+6+5+4+2+9 = 49 және т.б.

Барлық толық жолдарды, олардың ұзындықтарын анықтап 15.1-кестеге енгіземіз.

15.1-кестеден көріп отырғанымыздай, $0 \rightarrow 3 \rightarrow 6 \rightarrow 7 \rightarrow 8 \rightarrow \rightarrow 11 \rightarrow 12 \rightarrow 13$ жолы сыншыл жол болады. Сыншыл жолдың ұзақтығы 57 тәулікті құрайды, яғни жұмысты атқару үшін 57 тәулік қажет болады. Жұмысты тездетіп орындауға болмайды, себебі аяқтаушы оқиғаға жету үшін сыншыл жолды міндетті түрде өту керек.

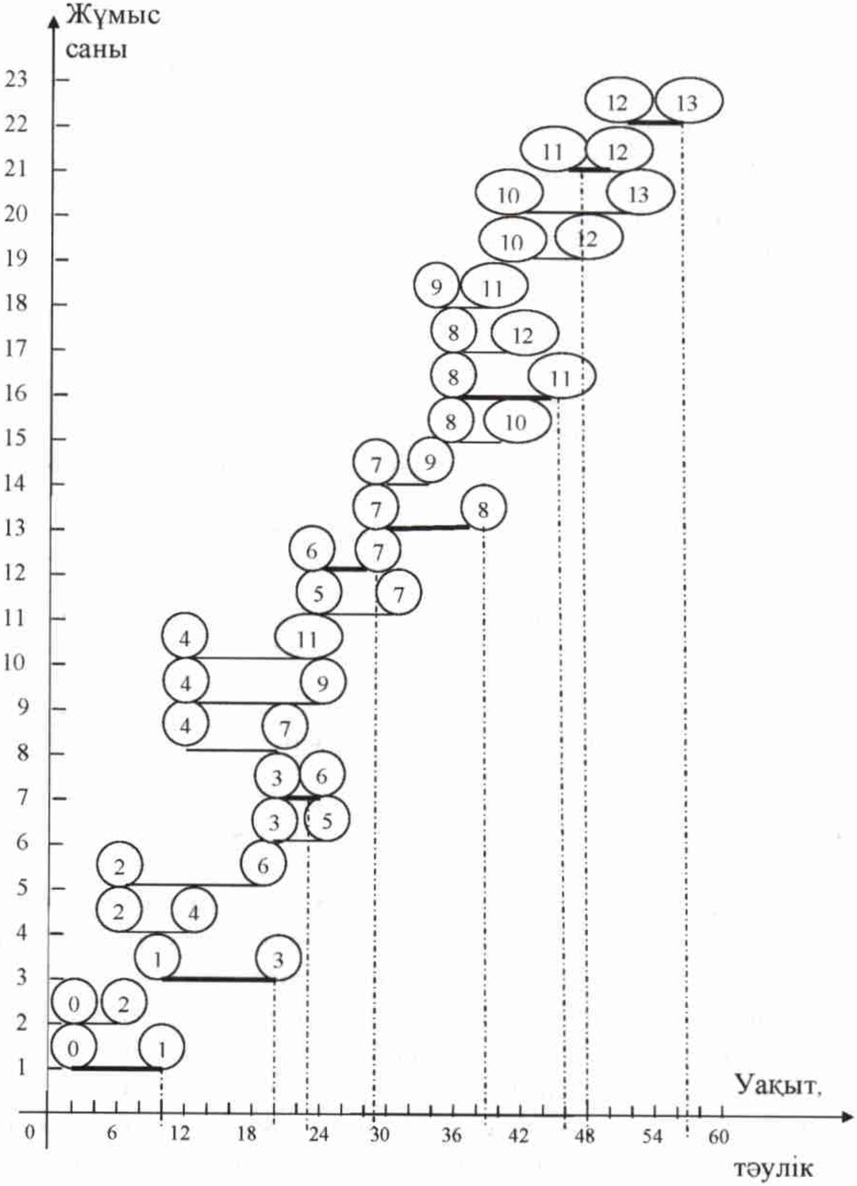
Толық жолдың түрі	Жолдың ұзақтығы	
0→1→3→5→8→10→13	10+10+4+7+3+11	45
0→1→3→5→8→10→12→13	10+10+4+7+3+5+9	48
0→1→3→5→8→11→12→13	10+10+4+7+7+2+9	49
0→1→3→5→8→12→13	10+10+4+7+3+9	43
0→1→3→6→7→9→11→12→13	10+10+3+6+5+4+2+9	49
0→1→3→8→11→12→13	10+10+6+7+2+9	44
0→1→3→8→12→13	10+10+6+3+9	38
0→1→3→8→10→13	10+10+6+3+11	40
0→1→3→8→10→12→13	10+10+6+3+5+9	43
0→1→3→6→7→8→11→12→13	10+10+3+6+10+7+2+9	57
0→1→3→6→7→8→12→13	10+10+3+6+10+3+9	51
0→1→3→6→7→8→10→13	10+10+3+6+10+3+11	53
0→1→3→6→7→8→10→12→13	10+10+3+6+10+3+5+9	56
0→2→4→7→8→10→13	5+12+9+10+3+11	50
0→2→4→7→8→10→12→13	5+12+9+10+3+5+9	53
0→2→4→7→8→11→12→13	5+12+9+10+7+2+9	54
0→2→4→7→8→12→13	5+12+9+10+3+9	48
0→2→4→7→9→11→12→13	5+12+9+5+4+2+9	46
0→2→4→9→11→12→13	5+12+8+4+2+9	40
0→2→4→11→12→13	5+12+7+2+9	35
0→2→6→7→9→11→12→13	5+14+6+5+4+2+9	45
0→2→6→7→8→10→13	5+14+6+10+3+11	49
0→2→6→7→8→10→12→13	5+14+6+10+3+5+9	52
0→2→6→7→8→11→12→13	5+14+6+10+7+2+9	53
0→2→6→7→8→12→13	5+14+6+10+3+9	47

Расында да, 11-оқиғаға жету үшін (8, 11) жұмысты орындау керек, яғни 8-оқиғаға жету керек, 8-оқиғаға жету үшін (7, 8) жұмысты орындау керек, яғни 7-оқиғаға жету керек және т.б.

Сыншыл жолды анықтап біз желінің сыншыл оқиғаларын орнаттық: (0, 1), (1, 3), (3, 6), (6, 7), (7, 8), (8, 11), (11, 12), (12, 13).

ЖЖБ жүйесінде сыншыл жолдың маңызы зор, себебі осы жолдың жұмыстары желілік графиканың көмегімен жоспарланатын барлық жұмыстың жиынтығын аяқтаудың жалпы циклын анықтайды. Жобаның ұзақтығын қысқарту үшін бірінші кезекте сыншыл жолдағы жұмыстың ұзақтығын қысқарту керек.

Желілік графиканың классикалық түрі бұл – уақыт масштабынсыз сызылған желі. Сондықтан, желілік графика жұмыстың орындалуының дәл ретін берсе де, уақыттың әрбір берілген мез-



15.9-сурет

гіліндегі жұмыстарды анықтау үшін көрнектілігі жеткілікті емес. Осыған байланысты желілік графиканы реттегеннен кейін үлкен емес жобаны *жобаның сызықтық диаграммасымен* толықтыру ұсынылады. Қарастырылған желі үшін мұндай сызықтық диаграмма 15.9-суретте келтірілген.

Сызықтық диаграмманы құрған кезде әрбір жұмыс ұзындығы осы жұмыстың ұзақтығына тең уақыт осіне параллель кесіндімен бейнеленеді. Нөлдік ұзындықтағы жалған жұмыс болған кезде ол нүктемен бейнеленеді. i және j оқиғалар (i, j) жұмыстың басы мен соңы кесіндінің сәйкес басы мен соңында орналасады. Кесінділер бір-бірінің үстінде, i индексінің өсу ретімен төменнен жоғары орналасады.

Жобаның сызықтық диаграммасы бойынша сыншыл уақытты, сыншыл жолды, сондай-ақ барлық жұмыстың уақыт қорын анықтауға болады.

Жұмыс жиынтығының сыншыл уақыты диаграмманың барлық кесінділерінің уақыт осіндегі оң жағының координатасына тең:

$$t_{сын} = t(13) = 57 \text{ (тәулік)}.$$

Сыншыл жолды анықтау үшін желінің аяқтаушы оқиғасы соңғы оқиғалармен беттесетін жұмыс-кесінділерді қарастырамыз (біздің мысалда (10, 13), (12, 13)). Содан кейін оң ұшы осыған дейін қарастырылған кесінділердің бірінің сол жақ ұшымен (12, 13) бір $t(10)$ вертикальда жатқан (11, 12) кесіндісін табамыз.

Осылайша сыншыл жолдың басқа да (8, 11), (7, 8) , ..., (0, 1) жұмыс-кесінділерін анықтаймыз (15.9-суретте олар қалыңдатылып белгіленген).

15.5. Желілік графикалардың уақыт параметрлері

15.2-кестеде желілік графикалардың негізгі уақыт параметрлері келтірілген.

Көрсетілген параметрлердің мазмұны мен есептелуіне талдау жүргізейік.

1. Оқиғалар параметрлері.

і-ші оқиғаның орындалуының ерте (немесе күтілетін) мерзімі осы оқиғаға дейінгі оқиғаның ең көп жолының ұзақтығымен анықталады:

15.2-кесте

Параметрмен сипатталатын желінің элементі	Параметрдің аталуы	Парметрдің шартты белгіленуі
i-ші оқиға	Оқиғаның орындалуының ерте мерзімі Оқиғаның орындалуының кеш мерзімі Оқиғаның уақыт қоры	$t_e(i)$ $t_к(i)$ $R(i)$
(i, j) жұмыс	Жұмыстың ұзақтығы Жұмыстың басталуының ерте мерзімі Жұмыстың аяқталуының ерте мерзімі Жұмыстың басталуының кеш мерзімі Жұмыстың аяқталуының кеш мерзімі Жұмыс уақытының толық қоры Бірінші түрдегі жұмыс уақытының жеке қоры Екінші түрдегі жұмыс уақытының жеке қоры немесе жұмыс уақытының бос қоры Жұмыс уақытының тәуелсіз қоры	$t(i, j)$ $t_{еб}(i, j)$ $t_{еа}(i, j)$ $t_{кб}(i, j)$ $t_{ка}(i, j)$ $R_{тол}(i, j)$ $R_1(i, j)$ $R_б(i, j)$ $R_т(i, j)$
	Жолдың ұзақтығы Сыншыл жолдың ұзақтығы Жол уақытының қоры	$t(L)$ $t_{сын}$ $R(L)$

$$t_e(i) = \max t(L_{i\,дж}), \tag{15.1}$$

мұндағы $L_{i\,дж}$ – i-ші оқиғаға дейінгі кез келген жол, яғни желінің бастапқы оқиғасынан i-ші оқиғаға дейінгі жол.

Егер j-ші оқиғаның алдында бірнеше жол болса, демек, бірнеше алдындағы i оқиға болса, онда j-ші оқиғаның орындалуының ерте мерзімін мына формуламен есептеген ыңғайлы:

$$t_e(j) = \max_{i,\,j}[t_e(i) + t(i,\, j)]. \tag{15.2}$$

i-ші оқиғаның орындалу мерзімі мен одан кейінгі жолдардың ең көп ұзақтығының қосындысы сыншыл жолдың ұзындығынан артпайтын жағдайға дейін осы оқиғаның ерте мерзіміне қатысты өзінің аяқталуының кідірісі аяқтаушы оқиғаның аяқталу мерзіміне (демек, жұмыс жиынының мерзіміне де) әсер етпейді.

Сондықтан, *i-ші оқиғаның орындалуының кеш мерзімі* мына формуламен есептелінеді:

$$t_к(i)=t_{сын}-\max_{L_{i\,кж}} t(L_{i\,кж}), \qquad (15.3)$$

мұндағы $L_{i\,кж}$ – i-ші оқиғадан кейінгі кез келген жол, яғни i-ші оқиғадан желіні аяқтаушы оқиғаға дейінгі жол.

Егер i-ші оқиғадан кейін бірнеше жол болса, демек, бірнеше кейінгі j оқиға болса, онда i-ші оқиғаның орындалуының кеш мерзімін мына формуламен есептеген ыңғайлы:

$$t_к(i)=t_{сын}\min_{i,\,j}\left[t_к(j)-t(i,\,j)\right]. \qquad (15.4)$$

i-ші оқиғаның R(t) уақыт қоры оның орындалуының ерте және кеш мерзімдерінің айырымына тең:

$$R(i)=t_k(i)-i_t(i). \qquad (15.5)$$

Оқиғаның уақыт қоры уақыттың қандай мүмкін болатын аралығында жұмыс жиынтығының орындалу мерзімін арттырмай осы оқиғаның болуын кідіртуге болатынын көрсетеді.

Оқиғаның орындалуындағы кез келген кідіріс аяқтаушы оқиғаның орындалуында да осындай кідірісті болдыратындықтан сыншыл оқиғалардың уақыт қорлары болмайды.

Осыдан сыншыл жолдың ұзындығы мен топологиясын анықтау үшін желілік графиканың барлық толық жолдарын тізіп жазып, олардың ұзақтығын анықтау мүлдем міндетті емес.

15.1-мысал.

15.8-суретте келтірілген желілік графика үшін оқиғаның уақыт параметрлері мен сыншыл жолын анықтау керек.

Шығарылуы. Табылған параметрлерді 15.3-кестеге жазамыз.

Оқиғаның орындалуының $t_e(i)$ ерте мезгілін анықтау кезінде желілік графика бойынша солдан оңға жылжимыз және (15.1), (15.2) формулаларды пайдаланамыз.

$i = 0$ (нөлдік оқиға) үшін $t_e(0) = 0$.

1-оқиға үшін тек қана 1 алдындағы жол $L_{1\,аж}\,0\rightarrow 1$ болғандықтан, $i=1$ үшін $t_e(1)=t_e(0)+t(0,1)=0+10=10$ (тәулік);

2-оқиға үшін тек қана 1 алдындағы жол $L_{2\,аж}\,0\rightarrow 2$ болғандықтан, $t=2$ үшін $t_e(1)=t_e(0)+t(0,\,2)=0+5=5$ (тәулік);

3-оқиға үшін тек қана 1 алдындағы жол $L_{3\,аж}$ $0 \to 1 \to 3$ болғандықтан, $i = 3$ үшін $t_e(3) = t_e(1) + t(1, 3) = 10 + 10 = 20$ (тәулік);

4-оқиға үшін тек қана 1 алдындағы жол $L_{4\,аж}$ $0 \to 2 \to 4$ болғандықтан, $i = 4$ үшін $t_e(4) = t_e(2) + t(2, 4) = 5 + 12 = 17$ (тәулік);

5-оқиға үшін тек қана 1 алдындағы жол $L_{5\,аж}$ $0 \to 1 \to 3 \to 5$ болғандықтан, $i = 5$ үшін $t_e(5) = t_e(3) + t(3, 5) = 30 + 4 = 24$ (тәулік);

6-оқиға үшін 2 алдындағы жол $L_{6\,аж}$ $0 \to 1 \to 3 \to 6$ және $0 \to 2 \to 6$ болғандықтан, $i = 6$ үшін

$$t_e(6) = \max\{t_e(3) + t(3, 6), t_e(2) + t(2, 6)\} =$$
$$= \max\{20 + 3, 5 + 14\} \text{(тәулік)}.$$

Осылайша,

$$t_e(7) = \max\{t_e(4) + t(4, 7), t_e(6) + t(6, 7)\} =$$
$$= \max\{17 + 9, 23 + 6\} = 29 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(8) = \max\{t_e(3) + t(3, 8), t_e(5) + t(5, 8), t_e(7) + t(7, 8)\} =$$
$$= \max\{20 + 6, 24 + 7, 29 + 10\} = 39 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(9) = t_e(4) + t(4, 9) = 17 + 8 = 25 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(10) = t_e(8) + t(8, 10) = 39 + 3 = 42 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(11) = \max\{t_e(4) + t(4, 11), t_e(8) + t(8, 11), t_e(9) + t(9, 11)\} =$$
$$= \max\{17 + 7, 39 + 7, 25 + 4\} = 46 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(12) = \max\{t_e(8) + t(8, 12), t_e(10) + t(10, 12), t_e(11) + t(11, 12)\} =$$
$$= \max\{39 + 3, 42 + 5, 46 + 2\} = 48 \text{ (тәулік)};$$

$$t_e(13) = \max\{t_e(10) + t(10, 13), t_e(12) + t(12, 13)\} =$$
$$= \max\{42 + 11, 48 + 9\} = 57 \text{ (тәулік)}.$$

Сыншыл жолдың ұзындығы аяқтаушы 13-оқиғаның орындалуының ерте мерзіміне тең (15.3-кестені қараңыз):

$$t_{сын} = t_e(13) = 57 \text{ (тәулік)}.$$

Оқиғаның орындалуының $t_к(i)$ кеш мезгілін анықтау кезінде желі бойынша кері бағытта, яғни оңнан солға жылжимыз және (15.3), (15.4) формулаларды пайдаланамыз.

i=13 (аяқтаушы оқиға) үшін оқиғаның орындалуының кеш мезгілі оның ерте мерзіміне тең (әйтпесе сыншыл жолдың ұзындығы өзгереді): $t_к(13)=t_e(13)=57$ (тәулік).

12-оқиға үшін тек қана 1 келесі жол $L_{12\,кж}$ $12\to13$ болғандықтан, i=12 үшін $t_к(12)=t_e(13)-t(12,13)=57-9=48$ (тәулік);

11-оқиға үшін тек қана 1 келесі жол $L_{11\,кж}$ $11\to12\to13$ болғандықтан, i=11 үшін $t_к(11)=t_к(12)-t(11,12)=48-2=46$ (тәулік);

10-оқиға үшін 2 келесі жол $L_{10\,кж}$ $10\to12\to13$ және $10\to13$ болғандықтан, i=10 үшін

$$t_к(10)=\min\{t_к(12)-t(10,12),\ t_к(13)-$$
$$-t(10,13)\}=\min\{48-5,\ 57-11\}=43 \text{ (тәулік)}.$$

Осылайша,

$$t_к(9)=t_к(11)-t(9,11)=46-4=42 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(8)=\min\{t_к(10)-t(8,10),\ t_к(11)-t(8,11),\ t_к(12)-t(8,12)\}=$$
$$=\min\{43-3,\ 46-7,\ 48-3\}=39 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(7)=\min\{t_к(8)-t(7,8),\ t_к(9)-t(7,9)\}=$$
$$=\min\{39-10,\ 42-5\}=29 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(6)=t_e(7)-t(6,7)=29-6=23 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(5)=t_e(8)-t(5,8)=39-7=32 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(4)=\min\{t_к(7)-t(4,7),\ t_к(9)-t(4,9),\ t_к(11)-t(4,11)\}=$$
$$=\min\{29-9,\ 42-8,\ 46-7\}=20 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(3)=\min\{t_к(5)-t(3,5),\ t_к(6)-t(3,6),\ t_к(8)-t(3,8)\}=$$
$$=\min\{32-4,\ 23-3,\ 39-6\}=20 \text{ (тәулік)};$$

$$t_к(2)=\min\{t_к(4)-t(2,4),\ t_к(6)-t(2,6)\}=$$
$$=\min\{20-12,\ 23-14\}=8 \text{ (тәулік)};$$

$t_к(1) = t_e(3) - t(1, 3) = 20 - 10 = 10$ (тәулік);

$t_к(0) = \min\{t_к(1) - t(0, 1), t_к(2) - t(0, 2)\} =$

$= \min\{10 - 10, 8 - 14\} = 0$ (тәулік).

15.5-формула бойынша i-ші оқиғаның $R(i)$ уақыт қорын анықтаймыз:

$R(0) = 0$, $R(1) = 10 - 10 = 0$, $R(2) = 8 - 5 = 3$,

$R(3) = 20 - 20 = 0$, $R(4) = 20 - 17 = 3$, $R(5) = 32 - 24 = 8$,

$R(6) = 23 - 23 = 0$, $R(7) = 39 - 29 = 10$, $R(8) = 39 - 39 = 0$,

$R(9) = 42 - 25 = 17$, $R(10) = 43 - 42 = 1$, $R(11) = 46 - 46 = 0$,

$R(12) = 48 - 48 = 0$, $R(13) = 57 - 57 = 0$

Жауабы. Есептің жауабын15.3-кестемен береміз.

15.3-кесте

Оқиға нөмірі	Оқиғаның орындалу мерзімдері, тәулік		$R(i)$ уақыт қоры, тәулік
	ерте $t_e(i)$	кеш $t_к(i)$	
0	0	0	0
1	10	10	0
2	5	8	3
3	20	20	0
4	17	20	3
5	24	32	8
6	23	23	0
7	29	29	0
8	39	39	0
9	25	42	17
10	42	43	1
11	46	46	0
12	48	48	0
13	57	57	0

Мысалы, 2-оқиғаның $R(2) = 3$ уақыт қоры – 2-оқиғаның орындалу уақыты жобаның орындалуының жалпы мерзімді арттырмай 3 тәулікке кідіруі мүмкін екенін білдіреді. Ал, 0, 1, 3, 6, 7, 8, 11, 12 және 13-оқиғалардың уақыт қоры жоқ, 0-ге тең. Осы оқиғалар сыншыл жолды құрайды.

2. Жұмыс параметрлері.

Жеке жұмыстар ерте, кеш және де аралық уақыттарда басталуы (аяқталуы) мүмкін.

Графиканы оңтайландыру кезінде жұмыс берілген аралықтағы кез келген жерде орналасуы мүмкін.

(i, j) жұмыстың $t_{еб}(i,j)$ ерте мерзімде басталуы бастапқы (алдындағы) i-ші оқиғаның орындалуының ерте мерзімімен беттеседі, яғни

$$t_{еб}(i,\ j)=t_{е}(i). \tag{15.6}$$

Сонда *(i, j) жұмыстың $t_{еа}(i,j)$ ерте аяқталуы*

$$t_{еа}(i,\ j)=t_{е}(i)+t(i,\ j) \tag{15.7}$$

формуласымен есептеледі.

Бірде-бір жұмыс өзінің ақырғы i-ші оқиғасының мүмкін болатын кеш мерзімінен кеш аяқтауы мүмкін емес. Сондықтан, *(i, j) жұмыстың аяқталуының $t_{ка}(i,j)$ кеш мерзімі*

$$t_{ка}(i,\ j)=t_{к}(j) \tag{15.8}$$

қатынасымен, ал осы *жұмыстың басталуының $t_{кб}(i,j)$ кеш мерзімі*

$$t_{кб}(i,\ j)=t_{к}(j)-t(i,\ j) \tag{15.9}$$

қатынасымен анықталады.

Сонымен, желілік модель аясында жұмыстың басталуы мен аяқталуы көршілес оқиғалармен (15.6)-(15.9) шектеулер арқылы тығыз байланысты.

3. Жолдың уақыт қоры.

Жолдың $R(L)$ уақыт қоры сыншыл және қарастырылатын жолдардың арасындағы айырым ретінде анықталады:

$$R(L)=t_{сын}-t(L). \tag{15.10}$$

Бұл – осы жолға тиісті барлық жұмыстардың ұзақтығы жалпы қаншаға артатынын көрсетеді. Егер осы жолдағы жұмыстың орындалуын $R(L)$ уақытынан артық уақытқа созсақ, онда сыншыл жол L жолына жылжиды.

Осыдан, L жолындағы бөлімнің сыншыл жолмен беттеспейтін (сыншыл жолдың екі оқиғасының арасында шектелген) кез келген жұмыстың уақыт қоры болатынын қорытындылауға болады.

4. Жұмыстың уақыт қоры.

Жұмыстың уақыт қорының төрт түрі кездеседі.

4.1. *(i, j) жұмыс уақытының $R_{тол}(i,j)$ толық қоры.*

(i, j) жұмыс уақытының $R_{тол}(i,j)$ толық қоры жұмыс жиынтығының орындалу мерзімі орындалған жағдайда берілген жұмыстың орындалу уақытын қаншаға арттыруға болатынын көрсетеді. $R_{тол}(i,j)$ толық уақыт қоры

$$R_{тол}(i, j) = t_к(j) - t_е(i) - t(i, j) \qquad (15.11)$$

формуласымен анықталады.

Жұмыс уақытының толық қоры – бұл жобаның жалпы мерзімін өзгертпей жұмыстың басталуын қанша уақытқа жылжытуға немесе ұзақтығын қанша уақытқа арттыруға болатынын көрсететін уақыт мөлшері.

Осы анықтамадан жеке жұмыстар бойынша жұмысты жақсы орындайтындай уақыттың толық қорын пайдалануға болатыны алынады. Уақыттың толық қоры тәуелді қор болып табылады, яғни оны қолдану басқа жұмыстар бойынша қорларын өзгертуге әкелуі мүмкін. Сондықтан, уақыттың толық қорын пайдаланған кезде көбінесе қорларды қайта үлестіруді анықтау үшін желілік графиканың параметрлері қайтадан есептелінеді.

4.2. Кепілденген қор немесе *(i, j) жұмыс уақытының бірінші түрдегі жеке қоры.*

Кепілденген қор бұл – жұмыстың бастапқы оқиғасының кеш мерзімін өзгертпей жұмыс ұзақтығын осы мөлшерге арттыруға болатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі. Жұмыстың бастапқы және ақырғы оқиғалары өздерінің ең кеш мерзімінде орындалады деген ұйғарыммен берілген жұмысты орындау барысында осы қорды пайдалануға болады. Кепілденген қор

$$R_1(i, j) = t_к(j) - t_к(i) - t(i, j) \qquad (15.12)$$

немесе

$$R_1(i, j) = R_{тол}(i, j) - R(i) \qquad (15.13)$$

формулаларының көмегімен есептелінеді.

4.3. Бос қор немесе (i, j) *жұмыс уақытының екінші түрдегі жеке қоры.*

Бос қор бұл – жұмыстың ақырғы оқиғасының ерте мерзімін өзгертпей жұмыс ұзақтығын осы мөлшерге арттыруға болатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі. Жұмыстың бастапқы және ақырғы оқиғалары өздерінің ең ерте мерзімінде орындалады деген ұйғарыммен берілген жұмысты орындау барысында осы қорды пайдалануға болады. Бос қор

$$R_2(i, j) = t_e(j) - t_e(i) - t(i, j) \tag{15.14}$$

немесе

$$R_2(i, j) = R_{тол}(i, j) - R(j) \tag{15.15}$$

формулаларының көмегімен есептелінеді.

Жұмыстарды орындау барысында пайда болатын кездейсоқтардан құтылу үшін уақыттың бос қорын пайдалануға болады. Жұмыстың басталуы мен аяқталуы ерте мерзім бойынша орындалатындай жоспарланса, онда барлық кезде қажет болған жағдайда жұмыстың басталуы мен аяқталуын кеш мерзімге ауыстыруға болады.

4.4. (i, j) *жұмыс уақытының тәуелсіз қоры.*

Тәуелсіз қор – барлық алдындағы жұмыстар кеш мерзімде аяқталатындай, ал барлық келесі жұмыстар ерте мерзімде басталатындай жағдай үшін алынатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі. Уақыттың тәуелсіз қоры

$$R_m(i, j) = t_e(j) - t_к(i) - t(i, j) \tag{15.16}$$

немесе

$$R_m(i, j) = R_{тол}(i, j) - R(i) \tag{15.17}$$

формулаларының көмегімен есептелінеді.

Уақыттың тәуелсіз қорын пайдалану басқа жұмыстардың уақыт қорларының шамасына әсер етпейді. Алдындағы жұмыстың орындалуы мүмкін болатын кеш мерзімде аяқталса, ал келесі жұмыстарды ерте мерзімде бастайтын болған жағдайда уақыттың тәуелсіз қорын пайдалануға ұмтылады. Егер (15.16) және (15.17) формулалармен анықталған тәуелсіз қор шамасы нөлге тең немесе оң болса, онда мұндай мүмкіндік бар. Егер бұл шама теріс болса, онда мұндай мүмкіндік жоқ, себебі алдындағы жұмыс әлі аяқталған жоқ, ал келесі жұмысты бастау керек. Сондықтан тәуелсіз қордың теріс мәнінің нақты мағынасы жоқ. Тәуелсіз қорлар тек қана жұмыстың бастапқы және ақырғы оқиғалары арқылы өтетін максималды жолдарда жатпайтын жұмыстарда болады.

Сонымен, егер уақыттың бірінші түрдегі жеке қоры алдындағы жұмыстардың уақыт қорын жұмсамай берілген және келесі жұмыстардың ұзақтығын арттыруға пайдаланылса, ал уақыттың бос қоры – келесі жұмыстардың уақыт қорын бұзбай берілген және алдындағы жұмыстардың ұзақтығын арттыруға пайдаланылса, уақыттың тәуелсіз қоры тек қана берілген жұмыстың ұзақтығын арттыруға пайдаланылады.

Сыншыл жолдағы жұмыстардың сыншыл оқиғалардағы сияқты уақыт қорлары болмайды, яғни олар нөлге тең. Сыншыл жұмыстардың, яғни уақыт қорлары жоқ жұмыстардың көмегімен желілік графиканың сыншыл жолы анықталуы мүмкін. Егер желіде бірнеше сыншыл жол болған кезде сыншыл жолды анықтаудың осы тәсілін пайдаланған дұрыс болып есептеледі.

Егер i бастапқы оқиға сыншыл жолда болса, онда

$$R_{тол}(i, j) = R_1(i, j). \tag{15.18}$$

Егер j ақырғы оқиға сыншыл жолда болса, онда

$$R_{тол}(i, j) = R_2(i, j). \tag{15.19}$$

Егер бастапқы және ақырғы i және j оқиғалар сыншыл жолда болса, бірақ жұмыстың өзі осы жолда болмаса, онда

$$R_{тол}(i, j) = R_1(i, j) = R_2(i, j) = R_m(i, j). \tag{15.20}$$

(15.18)-(15.20) қатынастарын жеке жұмыстардың уақыт қорларын есептеудің дұрыстығын тексергенде пайдалануға болады.

15.2-мысал.

15.8-суретте келтірілген желілік графика үшін жұмыстың уақыт параметрлерін есептеу керек.

Шығарылуы. (i, j) жұмыстың уақыт параметрлерін есептеуді (8, 12) жұмыстың мысалында көрсетейік.

Жұмыстың басталуының ерте мерзімі ((15.6) формула бойынша): $t_{еб}(8,12) = t_е(8) = 39$ (тәулік);

жұмыстың аяқталуының ерте мерзімі ((15.7) формула бойынша): $t_{еа}(8,12) = t_е(8) + t(8,12) = 39 + 3 = 42$ (тәулік);

жұмыстың басталуының кеш мерзімі ((15.9) формула бойынша): $t_{кб}(8,12) = t_к(12) - t(8,12) = 48 - 3 = 45$ (тәулік);

жұмыстың аяқталуының кеш мерзімі ((15.8) формула бойынша): $t_{ка}(8,12) = t_к(12) = 48$ (тәулік).

Сонымен, (8, 12) жұмысы жобаның орындалуынан бастағанда [39, 45] (тәулік) аралығында басталып, [42, 48] (тәулік) аралығында аяқталуы керек.

(8, 12) жұмыс уақытының толық қоры ((15.11) формула бойынша): $R_{тол}(8,12) = t_к(12) - t_е(8) - t(8,12) = 48 - 39 - 3 = 6$ (тәулік), яғни берілген жұмыстың орындалу мерзімін 6 тәулікке арттыруға болады, бұл жерде жұмыс кешенінің орындалу мерзімі өзгермейді.

(8, 12) жұмыстың мысалында уақыттың толық қоры берілген жұмыс арқылы өтетін жолдардың максималды ұзындығына тең екенін көрсетейік.

(8, 12) жұмыс арқылы бес толық жол өтеді (15.8-сурет):

L_1 $0 \to 1 \to 3 \to 5 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы 43-ке;

L_2 $0 \to 1 \to 3 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы 38-ге;

L_3 $0 \to 1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы 51-ге;

L_4 $0 \to 2 \to 4 \to 7 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы 48-ге;

L_5 $0 \to 2 \to 6 \to 7 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы 47-ге тең.

Осыдан (8, 12) жұмыс арқылы өтетін максималды жолы – ұзақтығы 51 (тәулік) болатын L_3 жолы, уақыт қоры ((15.10) формула бойынша): $R(L_3) = 57 - 51 = 6$ (тәулік).

Есептеулерден көріп отырғанымыздай (8, 12) жұмыс уақытының толық қоры осы жұмыс арқылы өтетін жолдардың ішіндегі ең үлкені – L_3 жолының қорына тең. Егер (8, 12) жұмысының орындалу ұзақтығын 6 тәулікке, яғни 3 тәуліктен 9 тәулікке дейін арттырсақ, онда L_3 жолының уақыт қоры толығымен жұмсалады, яғни бұл жол да сыншыл жол болады, ал басқа жолдардың уақыт қорлары сәйкес 6 тәулікке азаяды.

(8, 12) жұмыс уақытының бірінші түрдегі жеке қоры ((15.12) немесе (15.13) формула бойынша):

$R_1(8,12)=t_к(12)-t_к(8)-t(8,12)=48-39-3=6$ (тәулік) (немесе $R_1(8,12)=R_{тол}(8,12)-R(8)=6-0=6$ (тәулік)), яғни жобаны орындаудың жалпы мерзімін сақтағанда (8, 12) жұмысын және келесі (L_1, L_2, L_3, L_4, L_5) жолдарының кез келгені бойынша) жұмыстарын оның алдындағы жұмыстардың уақыт қорын жұмсамай 6 тәулікке кідіртуге болады.

(8, 12) жұмыс уақытының екінші түрдегі жеке қоры немесе уақыттың бос қоры ((15.14) немесе (15.15) формула бойынша):

$R_2(8,12)=t_е(12)-t_е(8)-t(8,12)=48-39-3=6$ (тәулік) (немесе $R_2(8,12)=R_{тол}(8,12)-R(12)=6-0=6$ (тәулік)), яғни жобаны орындаудың жалпы мерзімін сақтағанда (8, 12) жұмысын және одан кейінгі жұмыстардың уақыт қорын бұзбай 6 тәулікке кідіртуге болады.

(8, 12) жұмыс уақытының тәуелсіз қоры ((15.16) немесе (15.17) формула бойынша): $R_т(8,12)=t_е(12)-t_к(8)-t(8,12)=48-39-$ $-3=6$ (тәулік) (немесе (тәулік), яғни (8, 12) жұмыстың ұзақтығын басқа қалған жұмыстардың уақыт қорларын өзгертпей 6 тәулікке арттыруға болады.

Қарастырылған (8, 12) жұмыс мысалында уақыт қорының 4 жағдайында да мәндері өзара тең. Бірақ бұл барлық жұмыс үшін орындала бермейді (15.4-кестені қараңыз).

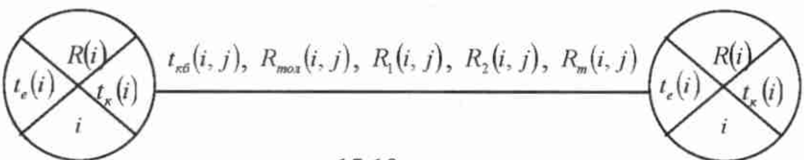
Уақыт қорларының ішінде теріс мәндер де кездеседі. Сыншыл жұмыстардың уақыт қорлары сыншыл оқиғалардың қорлары секілді нөлге тең.

Жауабы.

15.4-кесте

№	(i, j) жұмыс	(i, j) жұмыс-тың ұзақтығы	Жұмыстың басталу және аяқталу мерзімдері				Жұмыс уақытының қорлары			
			$t_{еб}(i, j)$ (15.6)	$t_{еа}(i, j)$ (15.7)	$t_{ка}(i, j)$ (15.8)	$t_{кб}(i, j)$ (15.9)	$R_{тол}(i, j)$ (15.11)	$R_1(i, j)$ (15.12)	$R_2(i, j)$ (15.14)	$R_m(i, j)$ (15.16)
1	(0, 1)	10	0	10	10	0	0	0	0	0
2	(0, 2)	5	0	5	8	3	3	3	0	0
3	(1, 3)	10	10	20	20	10	0	0	0	0
4	(2, 4)	12	5	17	20	8	3	0	0	-
5	(2, 6)	14	5	19	23	9	4	1	4	1
6	(3, 5)	4	20	24	32	28	8	8	0	0
7	(3, 6)	3	20	23	23	20	0	0	0	0
8	(3, 8)	6	20	26	39	33	13	13	13	13
9	(4, 7)	9	17	26	29	20	3	0	3	0
10	(4, 9)	8	17	25	42	34	17	14	0	-
11	(4, 11)	7	17	24	46	39	22	19	22	19
12	(5, 8)	7	24	31	39	32	8	0	8	0
13	(6, 7)	6	23	29	29	23	0	0	0	0
14	(7, 8)	10	29	39	39	29	0	0	0	0
15	(7, 9)	5	29	34	42	37	8	8	-	-
16	(8, 10)	3	39	42	43	40	1	11	0	0
17	(8, 11)	7	39	46	46	39	0	0	0	0
18	(8, 12)	3	39	42	48	45	6	6	6	6
19	(9, 11)	4	25	29	46	42	17	0	17	0
20	(10, 12)	5	42	47	48	43	1	0	1	0
21	(10, 13)	11	42	53	57	46	4	13	4	3
22	(11, 12)	2	46	48	48	46	0	0	0	0
23	(12, 13)	9	48	57	57	48	0	0	0	0

Қарапайым желілік графика жағдайында олардың уақыт параметрлерін есептеу нәтижелерін графикада белгілеуге болады. Оқиғаның параметрлері төрт бөлікке бөлінген дөңгелектерде, ал жұмыс параметрлері сәйкес көрсеткіштердің үстінде жазылады (15.10-сурет). Бұл жерде кесте құрудың қажеттілігі болмайды.



15.10-сурет

15.6. Анықталмағандық жағдайдағы желілік жоспарлау

Желілік графикадағы жұмысты орындау ұзындығы көбінесе анықталмағандық, математикалық түсінік бойынша кездейсоқ шама болып табылады. Егер кездейсоқ шаманың үлестіру заңы белгілі болса, онда оның маңызды екі сипаттамасын – орташа мәні мен дисперсияны табу қиын болмайды.

Барлық дерлік ЖЖБ жүйелерінде жұмыс ұзақтығын үлестіру үш қасиетті қамтиды:

1^0. үзіліссіздік;

2^0. унимодальдылық, яғни үлестіру қисығында жалғыз максимумның бар болуы;

3^0. үлестіру қисығы мен Ох осінің қиылысуы теріс емес абсциссалары бар екі нүктені береді.

Сонымен қатар, жұмыс ұзақтығын үлестіру оң асимметрияны қанағаттандырады, яғни қисық максимумы медианаға қатысты солға жылжыған.

Осындай қасиеттері бар қарапайым үлестіру математикалық статистикада β-үлестіру түрінде белгілі болып табылады. Желілік жоспарлауда жұмыс ұзақтығының уақыт бағалауларының үш түрі қарастырылады:

1. $t_0(i, j)$ *оптимистік бағалау*, яғни қолайлы жағдайларда (i, j) жұмысының ұзақтығы;

2. $t_n(i, j)$ *пессимистік бағалау*, яғни қолайлы емес жағдайларда (i, j) жұмысының ұзақтығы;

3. ең ықтимал бағалау, яғни қалыпты жағдайларда (i, j) жұмысының ұзақтығы.

(i, j) жұмысының ұзақтығының β-үлестіруі туралы болжам оның сандық характеристикаларының келесі бағалауын алуға мүмкіндік береді:

$$\bar{t}(i, j)=\frac{t_0(i, j)+4t_{еы}(i, j)+t_n(i, j)}{6}; \qquad (15.21)$$

$$\sigma^2(i, j)=\left[\frac{t_n(i, j)-t_0(i, j)}{6}\right]^2. \qquad (15.22)$$

Көбінесе, мамандарға жұмысты орындаудың $t_{еы}(i, j)$ ең ықтимал уақытын бағалау қиынға соғады. Сондықтан, нақты жобаларда (i, j) жұмысының орташа ұзақтығына қысқартылған (және онша дәл емес) бағалау пайдаланылады:

$$\bar{t}(i, j)=\frac{2t_0(i, j)+3t_n(i, j)}{5}. \tag{15.23}$$

$\bar{t}(i, j)$, $\sigma^2(i, j)$ шамаларын біле отырып, желілік графиканың уақыт параметрлерін анықтауға және олардың сенімділігін бағалауға болады.

L жолына тиісті жұмыстың саны көп болған кезде және ықтималдықтар теориясының курсынан белгілі Ляпуновтың орталық шектік теоремасын қолдануға болады. Осы теореманың негізінде жолының жалпы ұзақтығы олардың $\bar{t}(i, j)$ жұмыстарын құратын ұзақтығының орташа мәніне тең және дисперсиясы $\sigma^2(L)$ сәйкес $\sigma^2(i, j)$ дисперсияларының қосындысына тең $\bar{t}(L)$ орташа мәнімен берілген қалыпты үлестірім заңын қанағаттандырады деп болжауға болады:

$$\bar{t}(L)=\sum_{i,j}\bar{t}(i, j), \tag{15.24}$$

$$\sigma^2(L)=\sum_{i,j}\sigma^2(i, j). \tag{15.25}$$

Айталық, 15.8-суреттегі желілік графикада желі детерминирленген (бекітілген) жұмыс ұзақтығымен емес, ал кездейсоқ жұмыс ұзақтығымен берілсін және жұмыс-көрсеткіштердің үстіндегі цифрлар (15.21) немесе (15.23) формула бойынша табылған сәйкес амалдардың ұзақтығының $\bar{t}(i, j)$ орташа мәнін берсін және (15.22) формула бойынша есептелген барлық $\sigma^2(i, j)$ дисперсиялары белгілі болсын.

Бұл жағдайда желілік графиканың уақыт параметрлері – сыншыл жолдың ұзындығы, оқиғаның орындалуының ерте және кеш мерзімдері, оқиға мен жұмыстың уақыт қорлары және т.б. алдыңғы тақырыпта анықталған жолмен есептеледі. Тек 15.3 және 15.4-кестелердегі көрсетілген параметрлер сәйкес кездейсоқ шамалардың орташа мәндері болып табылатынын ескеру қажет.

Қарастырылған мысалдарда алынған $\overline{t}_{сын} = 57$ шамасы сыншыл жолдың ұзындығы орташа 57 тәулікті құрайтынын білдіреді, ал әрбір нақты жобада сыншыл жолдың ұзындығы оның орташа мәнінен елеулі ауытқуы мүмкін.

$t_{сын}$ шамасын қалыпты үлестірім заңы бар кездейсоқ шама деп ұсына отырып

$$P(t_{сын} \le T) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\Phi\left(\frac{T - \bar{t}_{сын}}{\sigma_{сын}}\right) \tag{15.26}$$

қатынасын аламыз, мұндағы $\Phi(z)$ – Лаплас ықтималдығының интегралының мәні, $z = \frac{T - \bar{t}_{сын}}{\sigma_{сын}}$; $\sigma_{сын}$ – сыншыл жолдың ұзындығының орташа квадраттық ауытқуы:

$$\sigma_{сын} = \sqrt{\sigma^2_{сын}}, \tag{15.27}$$

ал $t_{сын}$, $\sigma^2_{сын}$ – (15.24) және (15.25) формулалар бойынша анықталады.

Егер $P(t_{сын} \le T)$ аз болса (мысалы, 0,3-тен аз) болса, онда жұмысты мерзімінде орындамау қауіптігі үлкен болады да, қосымша шараларды (желі бойынша қорларды қайтада бөлу, жұмыстар мен оқиғалардың құрамдарын қайтадан қарастыру және т.б.) қабылдау қажет болады. Егер $P(t_{сын} \le T)$ аз (мысалы, 0,8-ден артық) болмаса, онда жеткілікті түрде мол сеніммен жобаның бекітілген мерзімінде орындалатынына көз жеткіземіз.

Кейбір жағдайларда кері есепті шешуге тура келеді, яғни T жобасының (β сенімділігімен берілуі мүмкін) орындалуының максималды мерзімін анықтау керек. Бұл жағдайда

$$T = t_{сын} + z_\beta \sigma_{сын}, \tag{15.28}$$

мұндағы z_β – $\Phi(z_\beta) = \beta$ – Лаплас функциясының көмегімен анықталатын кездейсоқ шаманың нормаланған ауытқуы.

15.3-мысал.

Айталық, желі (15.8-сурет) үшін сыншыл жолдың жұмыс ұзақтығының дисперсиясы мына шамаларға тең болсын:

$\sigma^2(0,1)=2{,}7$; $\sigma^2(1,3)=2{,}5$; $\sigma^2(3,6)=4{,}4$; $\sigma^2(6,7)=3{,}7$; $\sigma^2(7,8)=1{,}5$; $\sigma^2(8,11)=2{,}0$; $\sigma^2(11,12)=3{,}5$; $\sigma^2(12,13)=3{,}0$. Жобаның T = 60 тәулік мерзімінде орындалу ықтималдығын бағалау керек.

Шығарылуы. (15.25) және (15.27) формулаларды пайдаланып, $\sigma_{сын}$ мәнін табамыз:

$$\sigma_{сын}=$$

$$=\sqrt{\sigma^2(0,1)+\sigma^2(1,3)+\sigma^2(3,6)+\sigma^2(6,7)+\sigma^2(7,8)+\sigma^2(8,11)+\sigma^2(11,12)+\sigma^2(12,13)}=$$

$$=\sqrt{2{,}7+2{,}5+4{,}4+3{,}7+1{,}5+2{,}0+3{,}5+3{,}0}=\sqrt{23{,}3}\approx 4{,}83.$$

Енді ізделінді ықтималдық

$$P(t_{сын}\le 60)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{60-57}{4{,}83}\right)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi\left(\frac{3}{4{,}83}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(0{,}62)=0{,}5+0{,}5\cdot 0{,}465=0{,}7325,$$

яғни жұмыс 60 тәулікте, не одан да ерте уақытта орындалатынына 100-ден 73 мүмкіншілік бар екенін білдіреді.

Жауабы. $P(t_{сын}\le 60)=0{,}7325.$

15.4-мысал.

$\beta=0{,}87$ сенімділікпен жобаның орындалуының мүмкін болатын максималды мерзімін бағалау керек.

Шығарылуы. (15.28) формула бойынша

$$T=57+z_{0,87}\cdot\sigma_{сын}=57+1{,}51\cdot 4{,}83\approx 65,$$

яғни 0,87 сенімділікпен жобаны орындау мерзімі 65 тәуліктен аспайды.

Жауабы. T = 65 (тәулік).

Үлкен мөлшерлі жұмыстары бар күрделі желілердің параметрлерін бағалауда есептеудің келтірілген әдісінің кемшіліктері бар. Практикада сыншыл емес (бірақ сыншыл жолға жақын) жолдардың ұзындығының $\sigma^2(L)$ дисперсиясы $\sigma^2_{сын}$ шамасынан едәуір артық болатын жағдайлар жиі кездеседі. Сондықтан, берілген нақты жұмыстар жиынтығында кейбір шарттарды өзгерткен кезде есептеулерде ескерілмейтін жаңа сыншыл жолдарға ауысуы мүмкін.

Осы кезге дейін қарастырылған желілер тек қана детерминерленген емес, сонымен қатар кездейсоқ ұзақтығымен сипатталса да *детерминерленген* болып табылады. Сонымен қатар, кейбір кезеңдерде қандай да бір келесі жұмыстардың жиынтығы алдын ала белгілі емес нәтижелерден тәуелді болатындай жобалар кездеседі. Осы жұмыс жиынтығының қайсысы нақты орындалатыны алдын ала белгісіз, қандай да бір ықтималдықпен болжамдауы мүмкін. Мысалы, алынған тәжірибелік мәліметтердің немесе т.б. тәуелді зерттеуді жалғастырудың бірнеше нұсқалары қарастырылуы мүмкін. Осындай желілер *стохастикалық* желілер деп аталады. Олар да детерминерленген желілер сияқты детерминерленген немесе кездейсоқ ұзақтықпен сипатталуы мүмкін.

15.7 Жұмыс қарбаластығының коэффициенті. Желілік графиканы талдау және оңтайландыру

Сыншыл жолды және жұмыс уақытының қорын және берілген мезгілдегі жобаның орындалу ықтималдығының бағасын тапқаннан кейін желілік графикаға жан-жақты талдау жүргізілуі керек және оны оңтайландыру бойынша шаралар қабылдануы керек. Желілік графиканы дайындаудағы осы маңызды кезең ЖЖБ жүйесінің негізгі идеясын ашады.

Тек қана жұмыс ұзақтығының бағалауы берілетін күнтізбелік желінің талдауы мен оңтайландыруын қарастырайық. Желілік графиканы талдау алдымен желілік графиканы құруды бақылауды, жұмысты дұрыс таңдауды, оларды бөлшектеу деңгейін орнататын желі топологиясын талдаудан басталады. Содан кейін қор шамалары бойынша жұмыстарды жіктеу және топтастыру жүргізіледі. Уақыттың толық қорының шамасы барлық уақытта қандай да бір сыншыл емес жолдағы жұмыстың орындалуын дәл сипаттай бермейді. Ол есептелінген қордың қандай жұмыстар тізбегіне таратылатынынан, осы тізбектің ұзақтығы қандай болатындығынан тәуелді болады. Сыншыл емес жолдағы жұмыстың әрбір тобының мерзімінде орындалу қиындығының деңгейін жұмыс қарбаластығының коэффициентінің көмегімен анықтауға болады.

Жолдардың беттеспейтін (бір оқиғалардың арасындағы) бөліктерінің (біреуі берілген жұмыс арқылы өтетін максималды ұзақтығы бар жол, ал екіншісі – сыншыл жол) ұзақтығының қатынасы *(i, j) жұмысының қарбаластық коэффициенті K_k* деп аталады:

$$K_k(i, j) = \frac{t(L_{\max}) - t'_{сын}}{t_{сын} - t'_{сын}}, \qquad (15.29)$$

мұндағы $t(L_{\max})$ – (i, j) жұмысы арқылы өтетін максималды жолдың ұзақтығы; $t_{сын}$ – сыншыл жолдың ұзақтығы; $t'_{сын}$ – сыншыл жолмен беттесетін, қарастырылатын жолдың бөлігінің ұзақтығы.

(15.29) формуланы

$$K_k(i, j) = 1 - \frac{R_{тол}(i, j)}{t_{сын} - t'_{сын}} \qquad (15.30)$$

түріне келтіруге болады, мұндағы $R_{тол}(i, j)$ – (i, j) жұмыс уақытының толық қоры.

K_k қарбаластық коэффициенті 0-ден 1-ге дейін өзгереді.

15.5-мысал.

Желілік графика (15.8-сурет) үшін (8, 12) жұмыс қарбаластығының коэффициентін табу керек.

Шығарылуы. Алдындағы қарастырылған мысалдардың жауаптарын пайдаланамыз. Сыншыл жолдың ұзындығы $t_{сын} = 61$ (тәулік), (8, 12) жұмыс арқылы өтетін максималды жол – L_3 $0 \to 1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8 \to 12 \to 13$ жолының ұзақтығы $t(L_{\max}) = 51$ (тәулік). Максималды L_3 жолы сыншыл жолдың $0 \to 1 \to 3 \to 6 \to 7 \to 8$ бөлігінде $t'_{сын} = 10 + 10 + 3 + 6 + 10 = 39$ (тәулік) ұзақтығымен беттеседі. (15.29) формуланы пайдаланып,

$$K_k(8,12)=\frac{51-39}{57-39}=\frac{12}{18}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67\,,$$

немесе $R_{тол}$= 6 мәнін ескеріп (15.30) формула бойынша

$$K_k(8,12)=1-\frac{6}{57-39}=1-\frac{6}{22}=\frac{2}{3}\approx 0{,}67$$

қарбаластық коэффициентін табамыз.

Жауабы. $K_k(8,12) = 0{,}67$.

$K_k(i,\ j)$ коэффициенті 1-ге жақын болған сайын көрсетілген мерзімде берілген жұмысты орындау қиынырақ болады. $K_k(i,\ j)$ коэффициенті 0-ге жақын болған сайын берілген жұмыс арқылы өтетін максималды жолдың үлкен салыстырмалы қоры болады.

Жұмыстардың толық қорлары бірдей болуы мүмкін, бірақ $K_k(i, j)$ қарбаластығының коэффициентімен өрнектелетін олардың орындалу мерзімінің қарбаластық деңгейі әр түрлі болуы мүмкін. Керісінше де, қарбаластық коэффициенттері бірдей, ал толық қорлары әр түрлі болуы мүмкін.

Есептелген қарбаластық коэффициенттері жұмыстарды қосымша зоналарға жіктеуге мүмкіндік береді. $K_k(i,\ j)$ шамасына тәуелді үш зона кездеседі: *сыншыл* ($K_k(i,\ j) > 0{,}8$); *ішкі сыншыл* ($0{,}6 \le K_k(i,\ j) \le 0{,}8$); *резервтік* ($K_k(i,\ j) < 0{,}6$).

Жұмыс жиынтығының орындалу мерзімін ескеріп оны ұйымдастыруды жетілдіру желілік графиканы *оңтайландыруды* білдіреді. Оңтайландыру сыншыл жолдың ұзындығын қысқарту, жұмыстардың қарбаластығының коэффициентін теңестіру, қорларды ұтымды пайдалану мақсатында жүргізіледі.

Бірінші кезекте сыншыл жолдағы жұмыстардың ұзақтығын қысқарту бойынша шаралар қабылданады. Ол:

– барлық түрдегі ресурстарды: уақыт (сыншыл емес жолдардағы уақыт қорларын пайдалану), еңбек, материалдық (мысалы, сыншыл емес жолдардағы орындаушылардың, құрал-жабдықтардың бөлігін сыншыл жолдағы жұмыстарға көшіру) қайта үлестіру. Бұл жерде қорларды қайтадан бөлген кезде жүктемесі аз зоналардан жұмыстары көп зоналарға бөлуді ескеру есебінен;

– сыншыл жұмыстардың еңбек мөлшерін уақыт қорлары бар басқа жолдарға жұмыстың бөлігін аудару есебінен қысқарту;

– сыншыл жолдардың жұмыстарын қатар орындау;

– желі топологиясын қайта қарастыру, жұмыс құрамы мен желі құрылымын өзгерту есебінен орындалады.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Желілік жоспарлау мен басқарудың тағайындалуы және қолдану салалары.

2. Жұмыс жиынтығы, желілік модель, желілік графика, құрылымдық желі ұғымдары.

3. Желілік модельдегі оқиғалардың бөлінуі.

4. Желілік графиканы құрған кезде ескерілетін ережелер.

5. Қай жағдайда жалған оқиға мен жалған жұмыс енгізіледі?

6. Реттелген желілік графиканың орналасуы.

7. Жол, толық жол, сыншыл жол ұғымдары. Желілік графикалардың уақыт параметрлері.

8. ЖЖБ жүйелерінде жұмыс ұзақтығын үлестірудегі қасиеттер.

9. Жұмыстың қарбаластық коэффициенті. Жұмыстарды қосымша зоналарға жіктеу.

10. Желілік графиканы оңтайландыру.

11-15 есептерде келтірілген

а) желілік графиканы реттеп орналастыру керек;

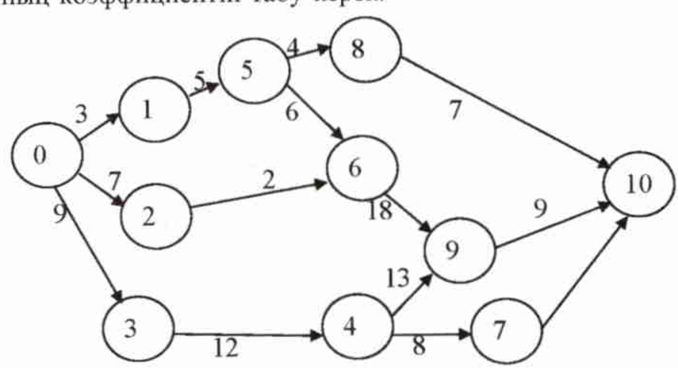
ә) желілік графика үшін оқиғаның уақыт параметрлері мен сыншыл жолын анықтау керек;

б) желілік графика үшін жұмыстың уақыт параметрлерін есептеу керек;

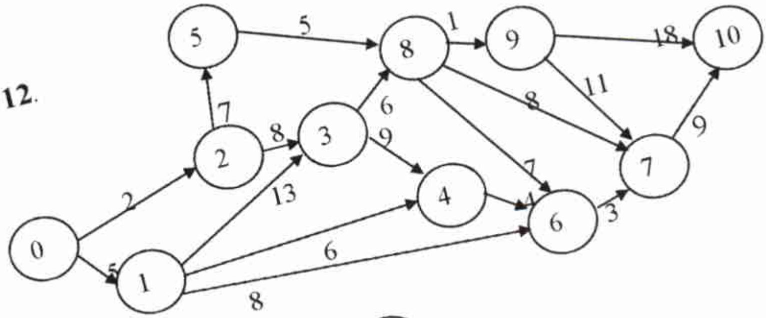
в) желілік графика үшін сызықтық диаграмма тұрғызу керек;

г) желілік графика үшін екі (кез келген) жұмыс қарбаластығының коэффициентін табу керек.

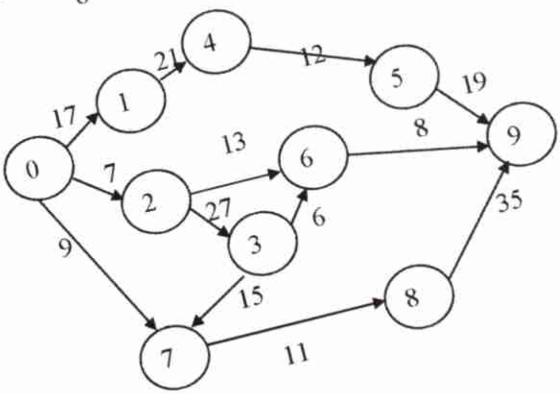
11.



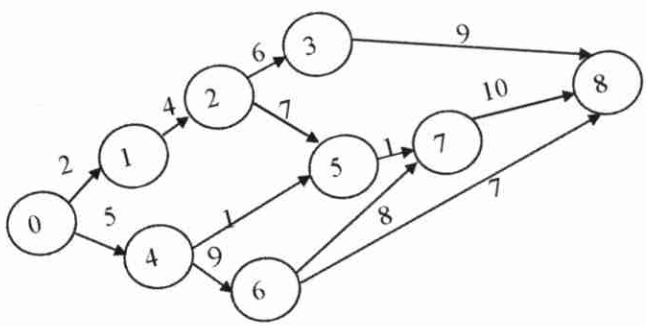
12.


5
5
8
1
9
18
10
7
6
11
8
2
8
3
9
9
7
7
4
4
6
3
2
13
0
5
1
6
8

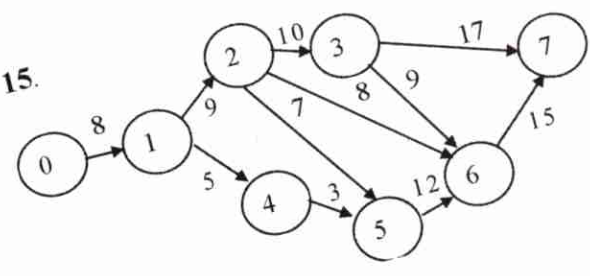
13.


21
4
12
5
19
1
17
13
8
9
0
6
7
2
27
6
35
3
9
15
8
7
11

14.


6
3
9
2
10
8
4
7
1
2
1
5
7
5
0
1
8
7
4
9
6

15.


2
10
3
17
7
8
9
8
9
7
1
15
0
5
6
12
3
4
5

16.1. Негізгі түсініктер. Жаппай қызмет көрсету жүйелерін топтастыру

Амалдарды зерттеу барысында біртипті есептерді шығару кезінде көп рет пайдалануға арналған жүйелер жиі кездеседі. Осы жерде пайда болатын үрдістер *қызмет көрсету үрдістері* деп, ал жүйелер *жаппай қызмет көрсету жүйелері* (ЖҚКЖ) деп аталады.

Табиғат құбылысын, техника, экономика немесе тасымалдау жүйелерінің үрдістерін зерттеу барысында көбінесе уақыт бойынша өзгеретін кездейсоқ шаманың көмегімен жүзеге асырылатын осы құбылыстарды немесе үрдістерді сипаттау кезінде пайда болатын жағдайлар жиі кездеседі.

Жаппай қызмет көрсету теориясы кездейсоқ үрдістер теориясының қолданбалы саласы болып табылады.

Уақыттың кездейсоқ (немесе кездейсоқ емес) мезгілінде қызмет көрсетуге өтініштер пайда болатындай және осы өтініштер бойынша қызмет көрсету үшін құрылғылар бар болатындай нақты қызмет көрсету жүйесінің ықтималдық модельдері жаппай қызмет көрсету теориясының зерттеу мәселесі болып табылады.

Жаппай қызмет көрсетуді ұйымдастыру есебі практикалық қызметтің көптеген салаларында кездеседі.

Телефон жүйелерін, жөндеу шеберханаларын, есептеу кешендерін, билет кассаларын, дүкендерді, шаштараздарды және т.т. осындай мекемелерді жүйелерге мысал ретінде қарастыруға болады.

Адамзаттың практикалық қызметінде қандай да бір арнайы түрдегі қызмет көрсетуге жаппай сұраныс болатындай жағдайлар үнемі пайда болады және шектеулі ғана қызмет көрсету бірліктері бар қызмет көрсетуші ұйым түскен өтініштерді бір мезгілде тез арада қанағаттандыратындай мүмкіндіктер барлық уақытта бола бермейді. Осы жерде кезек пайда болады. Жаппай қызмет көрсету жүйесі үшін мүмкін болатын дәлдікте қызмет көрсетудің бірлік саны мен қызмет көрсету сапасының арасындағы өзара байланысты орнататын типтік есеп пайда болады.

Әрине, қызмет сапасы әр түрлі көрсеткіштермен өлшенеді. Уақыт бірлігінде қызмет көрсетілетін өтініштердің орташа санын; қызмет көрсетуді күтудің орташа уақытын; күтусіз қызмет көрсетуде қабыл алмау ықтималдығын; кезектегі өтініш саны белгілі бір мәннен асып кеткен жағдайдағы ықтималдығын жаппай қызмет көрсету жүйесінің тиімділік көрсеткіші ретінде қарастыруға болады. Қызмет көрсету бірліктерін арттыру жаппай қызмет көрсету жүйесі жұмысының сапасы мен тиімділігін арттырады. Дегенмен, осы бірлік санының шамадан тыс артуы күшті және материалдық құралды артық жұмсағанмен бірдей. Осылайша, жаппай қызмет көрсету теориясына үрдісті математикалық қалыптастыратындай негізгі ерекшелігі бар оңтайландыру енгізіледі.

Жаппай қызмет көрсету жүйесі толығымен мына тапсырмалармен сипатталады: енгізу ағыны, кезек тәртібі, қызмет көрсету реті.

Қызмет көрсету бірліктерін *қызмет көрсету арналары* деп айтамыз. Байланыс желілері, жұмыс орындары, есептеу машиналары, сатушылар және т.б. арналар болуы мүмкін. Жаппай қызмет көрсету жүйесіндегі арналар саны бойынша *бірарналы* және *көпарналы* болып бөлінеді.

Жаппай қызмет көрсету жүйесінде негізінен өтініштер тұрақты емес кездейсоқ түседі де, *өтініштердің (талаптардың) кездейсоқ ағыны* деп аталады. Өтініштер ағыны мен қызмет көрсету уақытының кездейсоқтық сипаты жаппай қызмет көрсету жүйесін бірқалыпты емес жүктеуге әкеледі: қандай да бір уақыт аралығында өте көп мөлшерде өтініштер түседі (олар не кезекке тұрады, не қызмет көрсетуді күтпей кетіп қалады), ал басқа бір уақыт аралығында аз мөлшерде өтініштер түсіп жаппай қызмет көрсету жүйесі толық жүктелмейді немесе тұрып қалады.

Жаппай қызмет көрсету жүйесі екі негізгі класқа бөлінеді: *қабыл алынбайтын* жаппай қызмет көрсету жүйесі және *күтілетін (кезекпен)* жаппай қызмет көрсету жүйесі. Қабыл алмайтын ЖҚКЖ-сінде барлық арналар бос емес кезде түскен өтініш қабыл алынбайды, ЖҚКЖ-сін тастап кетеді және әрі қарай қызмет көрсету үрдісіне қатыспайды. Күтілетін ЖҚКЖ-сінде барлық арналар бос емес кезде түскен өтініш кетпейді, қызмет көрсету кезегіне тұрады.

Күтілетін ЖҚКЖ кезектің ұйымдастырылуына байланысты алуан түрге бөлінеді: шектелген немесе шектелмеген кезек ұзындығы, күтудің шектелген уақыты және т.б.

ЖҚКЖ-сін топтастыру үшін түскен өтініштердің ішінен іріктеу ретін және бос арналардың арасында оларды бөлу ретін анықтайтын қызмет көрсету тәртібі маңызды рөл атқарады. Осы белгі бойынша өтініштер «бірінші келді – бірінші қызмет көрсетілді», «соңынан келді – бірінші қызмет көрсетілді» (мысалы, қызмет көрсету мақсатында қоймадағы өнімді алу үшін соңғысы алдымен пайдаланылады, немесе соңғыларға қатынау мүмкіндігі жеңіл болады) принциптері бойынша немесе приоритетпен қызмет көрсетілу (маңызды өтініштер бірінші орындалады) ұйымдастырылады. Приоритет *абсолютті* және *салыстырмалы* болуы мүмкін. Абсолютті приоритет – маңызды өтініш әдеттегі өтінішті «ығыстырады» (мысалы, жөндеу бригадалары жоспарланған жұмысын орындау барысында, апат жағдайы болса апатты жойғанша жоспарлы жұмыс тоқтатылады), салыстырмалы приоритет – маңызды өтініш кезектегі «жақсырақ» орынға жылжытылады.

16.2. Марковтық кездейсоқ үрдіс

Кездейсоқ (*ықтималдық* немесе *стохастикалық*) *үрдіс* ретінде ықтималдық заңдылықтарға сәйкес қандай да бір жүйе жағдайының уақыт бойынша өзгеру үрдісі түсініледі.

Егер үрдістің мүмкін болатын S_1, S_2, S_3, ... жағдайларын алдын ала атап өтуге болса, ал жағдайдан жағдайға өту жүйесі лезде (секіріп) орындалса, онда осы үрдіс *дискретті жағдайдағы үрдіс* деп аталады. Егер жағдайдан жағдайға өту жүйесінің мүмкін болатын мезгілі алдын ала бекітілмей, кездейсоқ болса, онда осындай үрдіс *үзіліссіз уақытты үрдіс* деп аталады.

ЖҚКЖ жұмыс істеу үрдісі дискретті жағдайдағы және үзіліссіз уақыттағы кездейсоқ үрдісті береді. Бұл ЖҚКЖ-сінің жағдайы қандай да бір оқиғалардың кездейсоқ пайда болған кезінде секіріп өзгеретінін білдіреді (мысалы, жаңа өтініштің түсуі, қызмет көрсетудің аяқталуы және т.б.).

ЖҚКЖ жұмысының үрдісі марковтық болса, онда осы жұмыстың математикалық талдауы едәуір қысқартылады. Егер кез келген t_0 уақыт мерзімі үшін үрдістің ықтималдық сипаты болашақта тек қана оның сол уақыттағы жағдайынан тәуелді болса және жүйе осы жағдайға қалай және қашан жеткеніне тәуелсіз болса, онда кездейсоқ үрдіс *марковтық* немесе *салдарсыз кездейсоқ үрдіс* деп аталады.

Марковтық үрдіске мысал: S жүйесі – таксидегі санауыш болсын. t мезгіліндегі жүйе жағдайы көрсетілген мезгілге дейін көліктің жүрген километр санымен сипатталады. t_0 мезгілінде санауыш S_0 мәнін көрсетсін. $t > t_0$ мезгілінде санауыш қандай да бір километр санын (дәлірек айтқанда, сәйкес теңге саны) көрсететіндігінің S_1 ықтималдығы S_0 мәніне тәуелді, бірақ t_0 мезгіліне дейін санауыштың көрсеткіші қай уақытта өзгергенінен тәуелсіз.

Көптеген үрдістерді жуықтап марковтық үрдістер деп санауға болады. Мысалы, шахмат ойынындағы үрдіс; S жүйесі – шахмат фигураларының тобы. Жүйе жағдайы t_0 мезгілінде тақтада сақталған қарсыластың фигуралар санымен сипатталады. $t > t_0$ мезгілінде материалдық басымдылық қарсыластарының біреуінің жағындағы ықтималдық бірінші кезекте t_0 мезгіліне дейін фигуралар тақтадан қашан және қандай ретпен жоқ болғанынан емес, жүйе берілген t_0 мезгілінде қандай жағдайда болатынынан тәуелді.

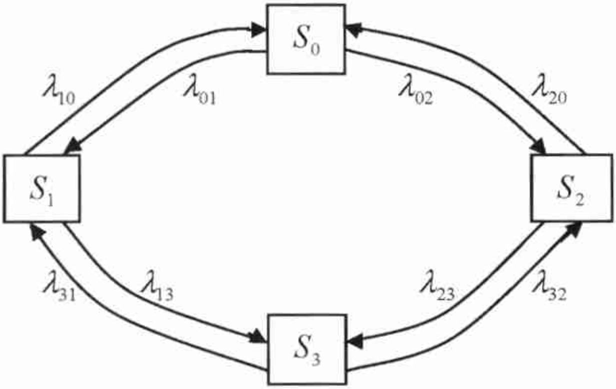
Қарастырылатын үрдістердің кейбір жағдайларында оларды елемеуге және зерделеу үшін марковтық үрдістерді қолдануға болады.

Дискретті жағдайдағы кездейсоқ үрдісті талдау барысында – *жағдай графтары* деп аталатын геометриялық сұлбаны пайдалануға болады. Әдетте жүйе жағдайы тікбұрыштармен (дөңгелекпен), ал жағдайдан жағдайға көшу – жағдайларды біріктіретін көрсеткішпен (бағдарланған доғамен) бейнеленеді.

16.1-мысал.

Келесі кездейсоқ үрдістің жағдай графын тұрғызу керек: құрылғысы екі тораптан тұрады. Олардың әрқайсысы уақыттың кездейсоқ мезгілінде қалыптан шығуы мүмкін, содан кейін сол мезетте алдын ала белгісіз кездейсоқ уақытқа созылатын жөндеу жұмысы басталады.

Шығарылуы. Жүйенің мүмкін болатын жағдайлары: S_0– екі торап та жөндеуден өткізілген; S_1– бірінші торапқа жөндеу жұмысы жүргізілуде, екінші торап жөндеуден өткізілген; S_2– бірінші торап жөндеуден өткізілген, екінші торапқа жөндеу жұмысы жүргізілуде; S_3– екі торапқа да жөндеу жұмыстары жүргізілуде.



16.1-сурет

S_0-ден S_1-ге жүргізілген көрсеткіш бірінші тораптың жұмыс істемей қалған мезгілдегі жүйенің көшуін, S_1-ден S_0-ге – осы торапқа жүргізілген жөндеудің аяқталған мезгілдегі көшуін білдіреді.

Графта S_0-ден S_3-ке және S_1-ден S_2-ге көрсеткіштер жүргізілмеген. Бұл тораптардың қалыптан шығуы бір бірінен тәуелсіз және мысалы, екі тораптың да бір мезгілде қалыптан шығуын (S_0-ден S_3-ке) немесе бір мезгілде екеуіне де жөндеудің аяқталуын (S_3-тен S_0-ге) ескермеуге болатындығымен түсіндіріледі.

16.3. Оқиғалар ағыны

Оқиғалар ағыны дегеніміз уақыттың қандай да бір кездейсоқ мезгілінде бір бірінің артынан орналасқан біртекті оқиғалар тізбегі (мысалы, телефон станциясындағы шақыру ағыны, ЭЕМ қабыл алмау ағыны, сатып алушылар ағыны және т.т.).

Ағын λ *қарқындылығымен* – уақыт бірлігінде ЖҚКЖ-сіне түсетін оқиғалардың пайда болу жиілігімен немесе оқиғалардың орташа санымен сипатталады.

Егер оқиғалар бір бірінің артынан бірдей уақыт аралығында орындалса, онда оқиғалар ағыны *оқиғалардың тұрақты ағыны* деп аталады. Мысалы, құрастыратын цехтың конвейеріндегі өнімдер ағыны (қозғалыстың тұрақты жылдамдығымен) тұрақты болып табылады.

Егер оқиғалар ағынының ықтималдық сипаты уақыттан тәуелсіз болса, онда ол *оқиғалардың стационар ағыны* деп аталады. Дербес жағдайда стационар ағынның қарқындылығы тұрақты шама болып табылады: $\lambda(t) = \lambda$. Мысалы, қала көшелеріндегі көлік ағыны тәулік бойына стационар ағын болмайды, бірақ бұл ағынды айталық, қауырт мезгілде, стационар ағын деп есептеуге болады. Соңғы жағдайда өтетін көліктің нақты саны уақыт бірлігінде (мысалы, әрбір минутта) бір бірінен елеулі ерекшеленеді, бірақ олардың орташа саны тұрақты және уақыттан тәуелсіз болады.

Егер кез келген екі қиылыспайтын τ_1 және τ_2 уақыт аралығы үшін – осы екі аралықтың біріне тиісті оқиғалар саны басқа аралыққа жататын оқиғалар санынан тәуелсіз болса, онда осындай оқиғалар ағыны *кейіннен әрекеті жоқ ағын* деп аталады. Мысалы, метроға кіретін жолаушылар ағынының кейіннен әрекеті жоқ десе де болады. Ал дүкеннен зат сатып алған сатып алушылар ағынының кейіннен әрекеті бар (кейбір сатып алушылар арасындағы уақыт аралығы олардың әрқайсысына қызмет көрсетудің минималды уақытына қарағанда аз болмайды).

Егер екі немесе одан да көп оқиғалардың аз уақыт (элементарлық) аралығына сәйкес келу ықтималдығы бір оқиғаның сәйкес келу ықтималдығына қарағанда аз болса, онда оқиғалар ағыны *кәдуілгі* деп аталады. Басқаша айтқанда, оқиғалар ағынында оқиғалар бір-бірден пайда болса, онда оқиғалар ағыны кәдуілгі болып табылады. Мысалы, станцияға жақындаған поезд ағыны кәдуілгі, ал вагондар ағыны кәдуілгі емес.

Егер оқиғалар ағыны бір мезгілде стационарлы, кәдуілгі және кейіннен әрекеті бар болса, онда оқиғалар ағыны *қарапайым* (немесе *пуассондық стационарлы*) деп аталады. «Қарапайым» ұғымы қарапайым ағыны бар ЖҚКЖ-сінің математикалық сипаты қарапайым түрде берілетінімен түсіндіріледі. Тұрақты ағынның кейіннен әрекеті (осындай ағында оқиғалардың пайда болу мезгілі қатаң түрде бекітілген) бар болатындықтан, ол «қарапайым» болып табылмайды.

Кездейсоқ үрдістер теориясында шектік ретіндегі қарапайым ағын ықтималдықтар теориясындағы қалыпты үлестірімнің кездейсоқ шамалардың қосындысы үшін шектік ретінде алынатыны сияқты пайда болады: тәуелсіз, стационар және кәдуілгі ағындардың (λ_i қарқындылығы бойынша өзара салыстырылатын) n жеткілікті үлкен саны (суперпозиция) берілген кезде енгізілетін ағындардың қарқындылықтарының қосындысына тең λ қарқындылығы бар қарапайым ағынға жақын болатын ағын алынады, яғни

$$\lambda = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

Ot уақыт осіндегі оқиғалардың қарапайым ағынын кездейсоқ нүктелердің шектелмеген тізбегі ретінде қарастырамыз.

Қарапайым ағын үшін τ еркін алынған аралықта жататын m оқиғалар (нүктелер) саны кездейсоқ шаманың математикалық күтуі оның дисперсиясына $a = \sigma^2 = \lambda\tau$ тең болатындай *Пуассон заңы* бойынша үлестіріледі

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau} . \qquad (16.1)$$

Дербес жағдайда, τ уақыт аралығында бірде бір оқиға болмайтын жағдайдың $(m = 0)$ ықтималдығы

$$P_0(\tau) = e^{-\lambda\tau} \qquad (16.2)$$

қатынасымен анықталады.

Қарапайым ағынның кез келген екі көршілес оқиғасының арасындағы T уақыт аралығының үлестіруін табамыз.

(16.2) қатынасқа сәйкес келесі оқиғалардың бірде біреуі ұзындығы t болатын уақыт аралығында пайда болмайтын жағдайдың ықтималдығы

$$P(T \geq t) = e^{-\lambda\tau} \qquad (16.3)$$

мәніне тең, ал қарама-қарсы оқиғаның, яғни кездейсоқ T шамасының үлестіру функциясы

$$F(t) = P(T < t) = 1 - e^{-\lambda\tau} \qquad (16.4)$$

мәніне тең.

Кездейсоқ шаманың тығыздығы оның үлестіру функциясының туындысына тең, яғни

$$\varphi(t) = F'(t) = \lambda e^{-\lambda t}. \qquad (16.5)$$

Ықтималдық (16.3) тығыздығымен немесе үлестіру функциясымен берілетін үлестіру *көрсеткіштік* (немесе экспоненциальды) деп аталады. Осылайша, кез келген екі көршілес оқиғалардың арасындағы уақыт аралығының математикалық күтуі кездейсоқ шаманың орташа квадраттық ауытқуына тең және λ ағын қарқындылығының шамасына кері

$$a = \sigma = \frac{1}{\lambda} \qquad (16.6)$$

көрсеткіштік үлестіруі бар болады.

Көрсеткіштік үлестірудің (тек қана көрсеткіштік үлестіруге қатысты) маңызды қасиеті: егер көрсеткіштік заң бойынша үлестірілген уақыт аралығы қандай да бір τ уақытқа созылса, онда ол қалған $(T-\tau)$ аралығындағы үлестіру заңына ешқандай әсер етпейді, ол барлық T аралығындағы үлестіру заңы сияқты болады.

Басқаша айтқанда, көрсеткіштік үлестіруі бар екі бірізді көршілес оқиғалар ағынының арасындағы T уақыт аралығы үшін осы аралық қанша уақытқа созылғандығы туралы кез келген мәлімет қалған бөліктің үлестіру заңына әсер етпейді. Көрсеткіштік заңның бұл қасиеті шындығында «кейіннен әрекеті жоқ болған жағдай» үшін басқа – қарапайым ағынның негізгі қасиетін береді.

λ қарқындылығы бар қарапайым ағын үшін кем дегенде бір оқиға ағыны Δt уақыттың элементарлық (аз) аралыққа сәйкес келетіндігінің ықтималдығы (16.4) қатынасқа сәйкес мына формула бойынша есептеледі:

$$P_{\Delta t} = P(T < \Delta t) = 1 - e^{-\lambda \Delta t} \approx \lambda \Delta t. \qquad (16.7)$$

16.4 Оқиғаның шектік ықтималдығы

Графы 16.1-суретте келтірілген 16.1-мысалдың кездейсоқ үрдісі негізінде дискретті жағдайдағы және үзіліссіз уақыттағы марковтық үрдістің математикалық сипаттауын қарастырайық. Жүйелердің S_i-жағдайынан S_j-жағдайына барлық көшулері оқиғалардың қарапайым ағынының λ_{ij} $(i = 0, 1, 2, 3)$ қарқындылығының әсерімен орындалады деп ұйғарайық; жүйенің S_0-жағдайынан S_1-жағдайына көшуі бірінші тораптың қабыл алмау ағынының әсерінен орындалады, ал S_1-жағдайынан S_0-жағдайына кері көшуі – бірінші тораптың «жөндеудің аяқталуы» ағынының әсерімен орындалады және т.б.

Көрсеткіштерге қарқындылық қойылған жүйе жағдайының графы *белгіленген* деп аталады. Қарастырылып отырған S жүйесінің төрт мүмкін болатын жағдайлары бар: S_0, S_1, S_2, және S_3. t мезгілінде жүйе S_i жағдайында болатындығының $p_i(t)$ ықтималдығы *i-ші жағдайдың ықтималдығы* деп аталады. Кез келген t мезгілі үшін барлық жағдайлардың ықтималдығының қосындысы бірге тең:

$$\sum_{i=0}^{3} p_i(t) = 1.$$

t мезгіліндегі жүйені қарастырайық. Δt кіші аралықты бере отырып $t + \Delta t$ мезгіліндегі жүйе S_0-жағдайында болатындығының $p_0(t + \Delta t)$ ықтималдығын анықтаймыз. Бұл әр түрлі тәсілдермен анықталады.

1. t мезгіліндегі $p_0(t)$ ықтималдығы бар жүйе S_0-жағдайында болып, ал Δt уақытында ол осы жағдайдан шыққан жоқ.

Осы жағдайдан жүйені $(\lambda_{01} + \lambda_{02})$ қарқындылығы бар жалпы қарапайым ағынмен, яғни (16.7) қатынасқа сәйкес жуықтап $(\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t$ мәніне тең болатын ықтималдықпен шығаруға болады. Ал жүйе S_0-жағдайынан шықпайтындығының ықтималдығы $[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t]$ шамасына тең. Жүйе бірінші тәсіл бойынша S_0-жағдайында болатындығының ықтималдығы ықтималдықтардың көбейту теоремасы бойынша

$$p_0(t)\,[1 - (\lambda_{01} + \lambda_{02})\Delta t]$$

мәніне тең.

2. $p_1(t)$ (немесе $p_2(t)$) ықтималдығы бар t мезгіліндегі жүйе S_1 немесе S_2 жағдайында болып және Δt уақытында S_0-жағдайына ауысады.

λ_{10} (немесе λ_{20}) қарқындылығы бар ағынымен жүйе S_0-жағдайына жуықтап $\lambda_{10}\Delta t$ (немесе $\lambda_{20}\Delta t$) мәніне тең ықтималдықпен ауысады. Жүйе осы тәсіл бойынша S_0-жағдайында болатындығының ықтималдығы $p_1(t)\lambda_{10}\Delta t$ (немесе $p_2(t)\lambda_{20}\Delta t$) мәніне тең.

Ықтималдықтардың қосындысының теоремасын қолдана отырып мына қатынасты аламыз:

$$p_0(t+\Delta t) = p_1(t)\lambda_{10}\Delta t + p_2(t)\lambda_{20}\Delta t + p_0(t)[1-(\lambda_{01}+\lambda_{02})\Delta t].$$

Осыдан

$$\frac{p_0(t+\Delta t)-p_0(t)}{\Delta t} = p_1(t)\lambda_{10} + p_2(t)\lambda_{20} - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0(t).$$

$\Delta t \to 0$ жағдайында ((16.7) формуланы қолданумен байланысты жуықталған теңдіктер дәл теңдіктерге айналады) шекке көше отырып теңдеудің сол жақ бөлігінде $p_0'(t)$ (қарапайымдылық үшін p_0' арқылы белгілейміз) туындысын аламыз:

$$p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0.$$

Бірінші ретті дифференциалдық теңдеу, яғни белгісіз функциясы бар сияқты, оның бірінші ретті туындысы бар теңдеу алынды.

Осылайша S жүйесінің басқа жағдайлары үшін де талдау жүргізе отырып жағдайлардың ықтималдықтары үшін *Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулер жүйесін* алуға болады:

$$\begin{cases} p_0' = \lambda_{10}p_1 + \lambda_{20}p_2 - (\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0 \\ p_1' = \lambda_{01}p_0 + \lambda_{31}p_3 - (\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1 \\ p_2' = \lambda_{02}p_0 + \lambda_{32}p_3 - (\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2 \\ p_3' = \lambda_{13}p_1 + \lambda_{23}p_2 - (\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3 \end{cases} \tag{16.9}$$

Колмогоров теңдеулерін құрудың ережесін жазайық. Олардың әрқайсысының сол жағында i-ші жағдайдың ықтималдығының туындысы болады. Оң жағында – барлық жағдайлардың ықтималдықтарын оқиға ағынының сәйкес қарқындылығына көбейтіндісінің қосындысынан берілген (i-ші) жағдайдың ықтималдығына көбейтілген жүйені берілген жағдайдан шығаратын барлық ағындардың қарқындылығының жалпы қосындысын алып тастағандағы мән жазылған.

(16.9) жүйеде тәуелсіз теңдеулер жалпы теңдеулер санынан бірге кем. Сондықтан жүйені шешу үшін (16.8) теңдеуді қосу қажет.

Дифференциалдық теңдеулерді шешу барысында бастапқы шарттарды беру қажет, яғни берілген жағдайда жүйе жағдайларының ықтималдығы бастапқы мезгілде нөлге тең: $t = 0$. Мысалы, (16.9) теңдеулер жүйесін бастапқы мезгілде екі торапта жөндеуден өткізілген және жүйе S_0-жағдайында болатын шартпен шығару керек, яғни $p_0(0)=1$, $p_1(0)=p_2(0)=p_3(0)=0$.

Колмогоров теңдеуі жағдайлардың барлық ықтималдықтарын *уақыт функциясы* ретінде табуға мүмкіндік береді. Бұл жерде шектік стационар режимде $t \to \infty$ кезде жағдайдың *шектік* (немесе қорытынды) *ықтималдығы* деп аталатын жүйенің $p_i(t)$ ықтималдығын табу ерекше орын алады.

Кездейсоқ үрдістер теориясында егер жүйе жағдайының саны ақырлы және олардың әрқайсысынан басқа жағдайға (ақырлы қадамда) ауысуға болатын болса, онда кәдуілгі ықтималдықтардың бар екені дәлелденеді.

S_i жағдайының кәдуілгі ықтималдығы жүйенің осы жағдайда болуының орташа салыстырмалы уақытын көрсетеді. Мысалы, егер кәдуілгі ықтималдық S_0-жағдайда, яғни $p_0 = 0{,}5$ болса, бұл жүйе орташа уақыттың жарты мерзімінде S_0-жағдайында болатынын білдіреді.

Шектік ықтималдықтар тұрақты болғандықтан, Колмогоров теңдеулерінде олардың туындыларын нөлдік мәндермен алмастыра отырып стационар режимді сипаттайтын сызықтық алгебралық теңдеулер жүйесін аламыз. 16.1-суретте бейнеленген граф жағдайы бар S жүйесі үшін мұндай теңдеулер жүйесі мына түрде жазылады:

$$\begin{cases}(\lambda_{01}+\lambda_{02})p_0=\lambda_{10}p_1+\lambda_{20}p_2\\(\lambda_{10}+\lambda_{13})p_1=\lambda_{01}p_0+\lambda_{31}p_3\\(\lambda_{20}+\lambda_{23})p_2=\lambda_{02}p_0+\lambda_{32}p_3\\(\lambda_{31}+\lambda_{32})p_3=\lambda_{13}p_1+\lambda_{23}p_2\end{cases}\qquad(16.10)$$

Егер келесі ережені жетекшілікке ала отырып (16.10) жүйені жағдайдың белгіленген графы бойынша жазуға болады: теңдеудің сол жағында берілген жағдайдан жүргізілетін барлық ағындардың қарқындылығының қосындысына көбейтілген берілген жағдайдың p_i шектік ықтималдығы, ал оң жағында i-ші жағдайға енетін барлық ағындардың қарқындылығының осы ағындар шығатын жағдайлардың ықтималдықтарына көбейтіндісінің қосындысы жазылады.

16.2-мысал.

16.1-мысалдағы S жүйе үшін шекті ықтималдықтарды табу керек. Жағдай графы 16.1-суретте келтірілген, бұл жерде $\lambda_{01}=1$, $\lambda_{02}=2$, $\lambda_{10}=3$, $\lambda_{13}=3$, $\lambda_{20}=2$, $\lambda_{23}=1$, $\lambda_{31}=2$, $\lambda_{32}=3$.

Шығарылуы. Берілген жүйе үшін стационар режимді сипаттайтын алгебралық теңдеулер жүйесі (16.10) түрде немесе мына түрде жазылады:

$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 2p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 2p_3, \\ 3p_2 = 2p_0 + 3p_3, \\ 5p_3 = 3p_1 + p_2. \end{cases} \tag{16.11}$$

$$\begin{cases} 3p_0 = 3p_1 + 2p_2, \\ 6p_1 = p_0 + 2p_3, \\ 3p_2 = 2p_0 + 3p_3, \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 1. \end{cases} \tag{16.11'}$$

Бұл жерде біз (16.10) теңдеудегі артық теңдеудің орнына (16.8) шартты жазып отырмыз.

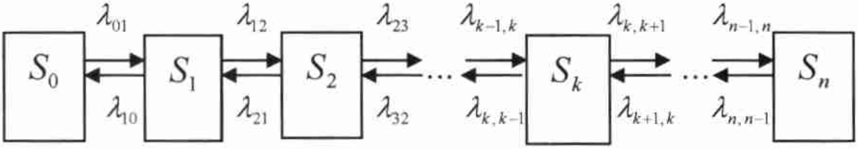
(16.11') жүйені шеше отырып, $p_0 = 0{,}40$, $p_1 = 0{,}11$, $p_2 = 0{,}38$, $p_3 = 0{,}11$ мәндерін аламыз.

Жауабы. $p_0 = 0{,}40$, $p_1 = 0{,}11$, $p_2 = 0{,}38$, $p_3 = 0{,}11$, яғни шекті, стационар режимде S жүйесі орташа алғанда уақыттың 40 %-ында S_0 жағдайында (екі торапта жөндеуден өткізілген), 11 %-ында S_1 жағдайында (бірінші торап жөндеуде, екінші торап жөндеуден өткізілген), 38%-ында S_2 жағдайында (екінші торап жөндеуде, бірінші торап жөндеуден өткізілген) және 11%-ында S_4 жағдайында (екі торапта жөндеуде) болады.

16.5. Жойылу және көбею үрдісі

Жаппай қызмет көрсету теориясында кездейсоқ үрдістердің арнайы класы – *жойылу және көбею үрдісі* деп аталатын үрдіс кеңінен таралған. Бұл үрдістің аталуы биологиялық есептермен байланысты, ол биологиялық қауымдас санының өзгеруінің математикалық моделі болып табылады.

Жойылу және көбею үрдісі жағдайының графы 16.2-суретте көрсетілген:



16.2-сурет

S_0, S_1, S_2, ..., S_k жүйе жағдайының реттелген жиынын қарастырамыз. Кез келген жағдайдан тек қана көршілес нөмірі бар жағдайға ғана көшу мүмкіндігі бар, яғни S_k жағдайынан не S_{k-1} жағдайына, не S_{k+1} жағдайына көшуге болады (популяция санын талдау кезінде S_k жағдайы k-ға тең популяция санына сәйкес келеді, және S_k жағдайынан S_{k+1} жағдайына көшу популяцияның бір мүшесінің тууымен пайда болады, ал S_{k-1} жағдайына көшуі популяцияның бір мүшесінің жойылуымен пайда болады деп есептеледі). Графтың көрсеткіші бойынша жүйеге көшетін оқиғаның барлық ағындары сәйкес $\boldsymbol{\lambda}_{k,k+1}$ немесе $\boldsymbol{\lambda}_{k+1,k}$ қарқындылықтарымен қарапайым болсын.

16.2-суретте келтірілген граф бойынша жағдайдың шектік ықтималдықтары (әрбір жағдайдан әрбір басқа жағдайға көшу мүмкіндігінен және жағдай санының ақырлығынан олардың бар болуы алынады) үшін алгебралық теңдеулерді құрамыз және оларды шешеміз.

Осындай теңдеулерді құру ережесіне сәйкес:

S_0 жағдайы үшін

$$\lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1;$$

S_1 жағдайы үшін

$$(\lambda_{12} + \lambda_{10}) p_1 = \lambda_{01} p_0 + \lambda_{21} p_2. \quad (16.12)$$

(16.12) қатынасты ескерсек соңғы теңдікті мына түрде жазуға болады:

$$\lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2. \quad (16.13)$$

Осылайша басқа жағдайлардың шектік ықтималдықтары үшін теңдеулерді жаза отырып, келесі теңдеулер жүйесін алуға болады:

$$\begin{cases} \lambda_{01} p_0 = \lambda_{10} p_1 \\ \lambda_{12} p_1 = \lambda_{21} p_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{k-1,k} p_{k-1} = \lambda_{k,k+1} p_k \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ \lambda_{n-1,n} p_{n-1} = \lambda_{n,n+1} p_n \end{cases} \quad (16.14)$$

Бұл жүйеге нормаланған шарт қосылады:

$$p_0 + p_1 + \ldots + p_n = 1. \quad (16.15)$$

(16.14), (16.15) жүйелерді шеше отырып, келесі өрнектерді аламыз:

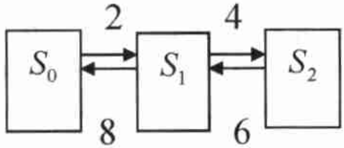
$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} + \ldots + \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}}\right)^{-1}, \quad (16.16)$$

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} p_0, \; p_2 = \frac{\lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{21}\lambda_{10}} p_0, \; \ldots, \; p_n = \frac{\lambda_{n-1,n} \ldots \lambda_{12}\lambda_{01}}{\lambda_{n,n-1} \ldots \lambda_{21}\lambda_{10}} p_0. \quad (16.17)$$

(16.17) формулалардағы $p_1, p_2, \ldots, p_n$ үшін p_0-дің коэффициенттері (16.16) формуладағы бір қосылғышынан кейінгі орналасқан қосылғыштар. Осы коэффициенттердің алымдары берілген S_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ жағдайға оңнан солға апаратын көрсеткіштерде жазылған барлық қарқындылықтардың көбейтіндісін, ал бөлімінде S_k жағдайға солдан оңға апаратын көрсеткіштерде жазылған барлық қарқындылықтардың көбейтіндісін береді.

16.3-мысал.

Жойылу және көбею үрдісі графпен берілсін (16.3-сурет)



16.3-сурет

Шығарылуы. (16.16) формула бойынша

$$p_0 = \left(1 + \frac{2}{8} + \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 8}\right)^{-1} = 0{,}71.$$

(16.17) формулалар бойынша

$$p_1 = \frac{2}{8} \cdot 0{,}71 = 0{,}178; \quad p_2 = \frac{4 \cdot 2}{6 \cdot 8} \cdot 0{,}71 = 0{,}118.$$

Жауабы. $p_0 = 0{,}71$; $p_1 = 0{,}178$; $p_2 = 0{,}118$, яғни орнатылған, стационар режимде жүйе орташа алғанда 71% уақыт S_0 жағдайында, 17,8% уақыт S_1 жағдайында және 11,8% уақыт S_2 жағдайында болады.

16.6. Қабыл алмайтын жаппай қызмет көрсету жүйелері

Қабыл алмайтын ЖҚКЖ тиімділік көрсеткіші ретінде мыналарды қарастырамыз:

A – ЖҚКЖ *абсолютті өткізу қабілеттілігі*, яғни уақыт бірлігінде қызмет көрсетілетін өтініштердің саны;

Q – *салыстырмалы өткізу қабілеттілігі,* яғни жүйе қызмет көрсететін қабылданған өтініштердің орташа үлесі;

$P_{\text{каб.алм.}}$ – *қабыл алмау ықтималдығы*, яғни өтініш орындалмай ЖҚКЖ-ден кетеді;

$\bar{k}$ – бос емес арналардың орташа саны (көпарналы жүйе үшін).

16.6.1. Қабыл алмайтын біреарналы жүйе

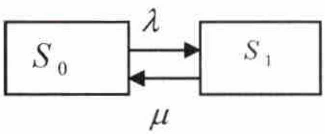
Осы тақырыпты есеп негізінде қарастырайық.

16.4-мысал.

Өтініштер ағыны түсетін арнаның қарқындылығы – λ, қызмет көрсету ағынының қарқындылығы – μ болсын. ЖҚКЖ бір жағдайдан екінші жағдайға көшіретін барлық оқиғалар ағынын қарапайым деп есептейміз. Оларға қызмет көрсету ағыны – бір үзіліссіз бос емес арнамен қызмет көрсетілетін өтініштер ағыны да жатады. $\overline{t}_{қыз}$ қызмет көрсетудің орташа уақыты μ қарқындылық шамасына кері болады, яғни $\overline{t}_{қыз} = \frac{1}{\mu}$.

Жүйе жағдайының шектік ықтималдығын және оның тиімділік көрсеткішін табу керек.

Шығарылуы. S (ЖҚКЖ) жүйесінің екі жағдайы бар болсын: S_0– арна бос; S_1– арна бос емес. Жағдайдың белгіленген графы 16.4-суретте келтірілген.



16.4-сурет

Шектік, стационарлық режимде жағдайдың ықтималдығы үшін алгебралық теңдеулер жүйесі мына түрді қабылдайды:

$$\begin{cases} \lambda p_0 = \mu p_1 \\ \mu p_1 = \lambda p_0 \end{cases} \tag{16.18}$$

яғни жүйе бір теңдеуді туындайды. Нормаланған $p_0 + p_1 = 1$ шартын ескеріп, (16.18) жүйеден жүйе S_0 (арна бос болғанда) жағдайында және S_1 (арна бос емес болғанда) жағдайында болатын орташа салыстырмалы уақытты өрнектейтін жағдайдың шектік ықтималдығын табамыз:

$$p_0 = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \quad p_1 = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}, \tag{16.19}$$

яғни жүйенің сәйкес Q салыстырмалы өткізу қабілеттілігі мен $P_{қаб.алм.}$ қабыл алмау ықтималдығын анықтаймыз.

$$Q = \frac{\mu}{\lambda+\mu}, \tag{16.20}$$

$$P_{қаб.алм.} = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}. \tag{16.21}$$

Q салыстырмалы өткізу қабілеттілігін қабыл алмау ағымдарының ықтималдығына көбейте отырып абсолютті өткізу қабілеттілігін табамыз:

$$A = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}. \tag{16.22}$$

16.5-мысал.

Тоңазытқыш шеберханасында телефонмен сағатына 84 өтініш берілетіні, өтініш λ қарқындылығымен түсетіні, ал телефон бойынша сөйлесудің орташа ұзақтығы $\bar{t}_{жал} = 2мин$ екені белгілі. Бір телефон нөмірі белгілі болғандағы ЖҚКЖ (телефон байланысы) жұмысының тиімділік көрсеткішін анықтау керек.

Шығарылуы. $\lambda = 80$ (1/сағ), $\bar{t}_{қыз} = 3мин$. Қызмет көрсету ағынының қарқындылығы

$$\mu = \frac{1}{\bar{t}_{қыз}} = \frac{1}{3}(1/\text{мин}) = 20\ (1/\text{сағ}).$$

(16.20) формула бойынша ЖҚКЖ салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = \frac{20}{80+20} = 0{,}2$, яғни орташа алғанда түскен өтініштердің 20%-ы ғана телефонмен қабылданады. Сәйкес қызмет көрсетудің қабыл алмау ықтималдығы (16.21) формула бойынша $P_{қаб.алм.} = \frac{80}{80+20} = 0{,}8$. (16.29) формула бойынша ЖҚКЖ абсолютті өткізу қабілеттілігін есептейік: $A = \frac{80 \cdot 20}{80+20} = 16$, яғни орташа алғанда телефонмен қабылданған өтініштердің сағатына тек қана 16 өтінішіне қызмет көрсетіледі.

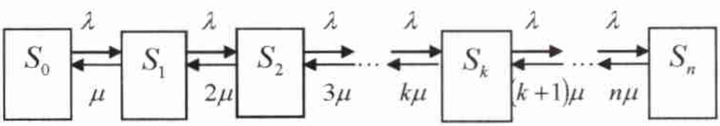
Жауабы. $P_{қаб.алм.} = 0,8$; $A = 16$. Бір ғана телефон нөмірі белгілі болғанда ЖҚКЖ өтініштер ағынын нашар орындайды.

16.6.2. Қабыл алмайтын көпарналы жүйе

Эрлангтың классикалық есебін қарастырайық.

λ қарқындылығы бар өтініштер түсетін n арна бар болсын. Қызмет көрсету ағынының қарқындылығы – μ . Жүйе жағдайының шектік ықтималдығын және оның тиімділік көрсеткішін табу керек.

S (ЖҚКЖ) жүйесінің келесі жағдайлары (оларды жүйедегі өтініштердің саны бойынша нөмірлейміз) бар: S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, мұндағы S_k – жүйе жағдайында k өтініш бар кез, яғни k арна бос емес. Жойылу және көбею үрдісіне сәйкес ЖҚКЖ графы 16.5-суретте келтірілген:



16.5-сурет

Өтініштер ағыны жүйені біртіндеп кез келген сол жақ жағдайдан көршілес оң жақтағы жағдайға бірдей λ қарқындылықпен көшіреді. Жүйені кез келген оң жақтағы жағдайдан сол жақтағы көршілес жағдайға көшіретін қызмет көрсету ағынының қарқындылығы үнемі жағдайға қатысты өзгеріп отырады. Шынында да, егер ЖҚКЖ S_2 жағдайында (екі арна бос емес) болса, онда ол S_1 жағдайына (бір арна бос емес) не бір арна, не екі арна қызмет көрсетуін аяқтағанда көше алады, яғни оларға қызмет көрсету ағынының жалпы қарқындылығы 2μ -ге тең болады. Осылайша, ЖҚКЖ-сін S_3 жағдайынан (3 арна бос емес) S_2 жағдайына көшіретін қызмет көрсету ағынының жалпы қарқындылығы 3μ -ге тең болады, яғни үш арнаның кез келгені босауы мүмкін және т.т.

(16.16) формуладан жойылу және көбею сұлбасы үшін жағдайдың шектік ықтималдығына арналған келесі өрнекті аламыз:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda^2}{2!\mu^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k!\mu^k} + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!\mu^n}\right)^{-1} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k}, \quad (16.23)$$

мұндағы λ, $\frac{\lambda^2}{2!\mu^2}$, ..., $\frac{\lambda^n}{n!\mu^n}$ көбею мүшелері $p_1, p_2, \ldots, p_k, \ldots, p_n$ шектік ықтималдықтарға арналған өрнектегі p_0 коэффициенттерін береді.

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} \quad (16.24)$$

– шамасы *өтініштер ағынының келтірілген қарқындылығы* немесе *арна жүктемесінің қарқындылығы* деп аталады.

Өтініштер ағынының келтірілген қарқындылығы бір өтінішті орындайтындай қызмет көрсететін орташа уақытқа келетін өтініштердің орташа санын өрнектейді. Енді

$$p_0 = \left(1 + \rho + \frac{\rho^2}{2!} + \ldots + \frac{\rho^k}{k!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!}\right)^{-1}, \quad (16.25)$$

$$p_1 = \rho p_0, \; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \ldots, \; p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \ldots, \; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (16.26)$$

Шектік ықтималдықтарға арналған (16.25) және (16.26) формулалар жаппай қызмет көрсету теориясын қалаушы дат инженері, математик А.К. Эрлангтың (XIXғ. соңы – XXғ. басы) құрметіне *Эрланг формулалары* деп аталады.

Жүйенің барлық *n* арналарының бос емес болуының шектік ықтималдығы ЖҚКЖ қабыл алмау ықтималдығы болып табылады, яғни

$$P_{қаб.алм.} = \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (16.27)$$

Түскен өтінішке қызмет көрсетілетін жағдайдың ықтималдығы салыстырмалы өткізу қабілеттілігі болып табылады:

$$Q = 1 - P_{қаб.алм.} = 1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0. \quad (16.28)$$

Абсолютті өткізу қабілеттілігі

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \qquad (16.29)$$

Бос емес арналар санының математикалық күтуі бос емес $\bar{k}$ арналардың орташа санына тең

$$\bar{k} = \sum_{k=0}^{n} k p_k ,$$

мұндағы p_k – (16.25), (16.26) формулалар бойынша анықталатын жағдайлардың шектік ықтималдықтары.

Әйтсе де, егер жүйенің A абсолютті өткізу қабілеттілігі жүйе түскен өтініштерге қызмет көрсету ағынының (уақыт бірлігінде) ықтималдығын берсе, онда бос емес арналардың орташа санын табу жеңілірек болады. Әрбір бос емес арна орташа алғанда μ өтінішке қызмет көрсететіндіктен (уақыт бірлігінде) бос емес арналардың орташа саны

$$\bar{k} = \frac{A}{\mu} \qquad (16.30)$$

немесе, (16.29) және (16.24) формулаларды ескерсек:

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^n}{n!} p_0\right). \qquad (16.31)$$

16.6-мысал.

16.5-мысал шартында егер тиімділік шарты ретінде телефонмен қабылданған әрбір 100 өтініштің 80 өтініштен кем емес өтініштің қанағаттануын қарастырған жағдайдағы тоңазытқыш шеберханасындағы телефон нөмірлерінің тиімді санын анықтау керек.

Шығарылуы. (16.25) формула бойынша арна жүктемесінің қарқындылығы $\rho = \frac{80}{20} = 4$, яғни телефонмен сөйлесудің $\bar{t}_{қыз} = 3мин$ орташа уақытында (ұзақтығы бойынша) орташа алғанда сөйлесу арқылы 4 өтініш түседі.

Біртіндеп арналар санын (телефон нөмірлерін) $n = 2, 3, 4, \ldots$ арттырамыз және (16.25), (16.28), (16.29) формулалар бойынша алынатын n-арналы ЖҚКЖ қызмет көрсету сипаттамаларын анықтаймыз.

Мысалы, $n = 3$ болса,

$$p_0 = \left(1 + 4 + \frac{4^2}{2!} + \frac{4^3}{3!}\right)^{-1} = \left(\frac{71}{3}\right)^{-1} = \frac{3}{71};$$

$$Q = 1 - \frac{4^3}{3!} \cdot \frac{3}{71} = \frac{39}{71} \approx 0{,}55;$$

$$A = 80 \cdot \frac{39}{71} \approx 43{,}94$$

және т.б. ЖҚКЖ сипаттамаларының мәндері 16.1-кестеде келтірілген.

16.1-кесте

Қызмет көрсету сипаттамалары	Арналар (телефон нөмірлерінің) саны					
	1	2	3	4	5	6
Q салыстырмалы өткізу қабілеттілігі	0,2	0,38	0,55	0,67	0,80	0,96
A абсолютті өткізу қабілеттілігі	16	30,77	43,94	55,15	64,07	76,88

Тиімділік шарты бойынша $Q \geq 0{,}8$, демек, тоңазытқыш шеберханасында 5 телефон нөмірін орнату қажет (бұл жағдайда $Q = 0{,}80$, 16.1-кестені қара). Бұл кезде сағатына орташа алғанда 64 өтініш ($A = 64{,}07$), ал бос емес телефонның орташа саны (арналардың) (16.30) формула бойынша $\bar{k} = \dfrac{64{,}07}{20} = 32{,}04$.

Жауабы. Тоңазытқыш шеберханасында 5 телефон нөмірін орнату қажет. Бұл кезде сағатына орташа алғанда 64 өтініш, ал бос емес телефонның орташа саны $\bar{k} = \dfrac{64{,}07}{20} = 32{,}04$.

16.7. Күтумен (кезекпен) берілген жаппай қызмет көрсету жүйелері

Күтумен берілген жаппай қызмет көрсету жүйелерінде өзімізге белгілі абсолютті (A) және салыстырмалы (Q) өткізу қабілеттілігі, қабыл алмау ықтималдығы ($P_{қаб.алм.}$), бос емес арналардың орташа саны ($\bar{k}$, көпарналы жүйе үшін) секілді көрсеткіштерімен қатар келесі тиімділік көрсеткіштері қарастырылады:

$L_{ж}$ – жүйедегі өтініштердің орташа саны;

$T_{ж}$ – өтініштердің жүйеде болуының орташа саны;

$L_{кез}$ – кезектердегі өтініштердің орташа саны (кезектің ұзындығы);

$T_{кез}$ – өтініштердің кезектердегі болуының орташа саны;

$P_{бос\,емес}$ – арнаның бос емес жағдайының ықтималдығы.

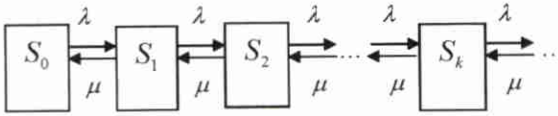
16.7.1. Шектелмеген кезекпен берілген бірарналы жаппай қызмет көрсету жүйесі

Практикада шектелмеген кезекпен берілген бірарналы ЖҚКЖ жиі кездеседі (мысалы, бір будкасы бар телефон-автомат). Мысал қарастырайық.

Ешқандай шектеу (кезек ұзындығы бойынша да, күту уақыты бойынша да) қойылмаған кезекпен берілген бірарналы ЖҚКЖ-сі бар болсын. ЖҚКЖ-сіне түсетін өтініштер ағынының қарқындылығы λ-ға, ал қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ-ға тең болсын. Жағдайдың шектік ықтималдықтары мен ЖҚКЖ-сінің тиімділік көрсеткіштерін табу қажет.

Жүйе өтініштер саны бойынша нөмірленген ЖҚКЖ-сіндегі жағдайлардың біреуінде болуы мүмкін: S_0 – арна бос; S_1 – арна бос емес (өтінішке қызмет көрсетілуде), кезек жоқ; S_2 – арна бос емес, кезекте бір өтініш бар; ... S_k – арна бос емес, кезекте $(k-1)$ өтініш бар және т.т.

ЖҚКЖ жағдайының графы 16.6-суретте берілген.



16.6-сурет

Бұл жойылу және көбею үрдісі, бірақ, өтініштер ағынының қарқындылығы λ-ға, ал қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ-ға тең болатын шексіз санды жағдай.

Шектік ықтималдықтар формуласын жазу үшін олардың бар болуына көзімізді жеткізуіміз керек, себебі уақыт шексіздікке ұмтылған ($t \to \infty$) кезде кезек шексіз артуы мүмкін.

Егер $\rho < 1$ болса, яғни түсетін өтініштердің орташа саны қызмет көрсететін өтініштердің орташа санынан (уақыт бірлігінде) кіші болса, онда шектік ықтималдықтар бар. Егер $\rho \geq 1$ болса, онда кезек шексіздікке дейін артады.

Жағдайлардың шектік ықтималдықтарын анықтау үшін жойылу және көбею үрдісінің (16.16), (16.17) формулаларын пайдаланамыз. Сонда

$$p_0 = \left[1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right]^{-1} =$$

$$= \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1} = \left(\sum_{i=0}^{\infty} \rho^k\right)^{-1}. \qquad (16.32)$$

$\rho < 1$ жағдайында ғана шектік ықтималдықтар болатындықтан, еселігі $\rho < 1$ болатын, (16.32) формуладағы жақшаның ішінде жазылған геометриялық қатар $\frac{1}{1-\rho}$ мәніне тең болатын қосындыға жинақталады. Сондықтан,

$$p_0 = 1 - \rho, \qquad (16.33)$$

және (16.17) қатынасты ескеріп

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k = \rho^k p_0,\ \ldots$$

Басқа жағдайлардың шектік ықтитмалдықтарын табамыз

$$p_1 = \rho(1-\rho),\ p_1 = \rho^2(1-\rho),\ \dots,\ p_k = \rho^k(1-\rho). \qquad (16.34)$$

$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \dots,\ p_k,\ \dots$ шектік ықтималдықтар еселігі $\rho < 1$ болатын кемімелі геометриялық прогрессияны құрайды, демек, p_0 ықтималдығы ең үлкен болады. Ал бұл, егер ЖҚКЖ өтініштер ағынымен ($\rho < 1$ болған кезде) жұмыс істеп үлгерсе, онда жүйеде өтініш болмайтын жағдайдың ықтималдығы жоғары болатынын білдіреді.

(16.34) қатынасты ескеріп жүйедегі өтініштердің $L_{ж}$ орташа санын математикалық күту формуласы бойынша есептейміз:

$$L_{ж} = \sum_{k=1}^{\infty} kp_k = (1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k \qquad (16.35)$$

(нөлінші мүше $0p_0 = 0$ болғандықтан, қосындылау 1-ден ∞-ке дейін жүзеге асырылады).

(16.35) формула ($\rho < 1$) келесі түрге түрлендіріледі:

$$L_{ж} = \frac{\rho}{1-\rho}\ . \qquad (16.36)$$

Кезектегі өтініштердің $L_{кез}$ орташа санын табамыз.

$$L_{кез} = L_{ж} - L_{жал} \qquad (16.37)$$

екені айқын, мұндағы $L_{жал}$ – қызмет көрсетіліп жатырған өтініштердің орташа саны.

Қызмет көрсетіліп жатырған өтініштердің орташа санын 0 (арна бос) немесе 1 (арна бос емес) мәндерін қабылдайтын қызмет көрсетіліп жатырған өтініштер санының математикалық күту формуласы бойынша анықтаймыз:

$$L_{жал} = 0 \cdot p_0 + 1 \cdot (1 - p_0),$$

яғни қызмет көрсетіліп жатырған өтініштердің орташа саны арналар бос емс болған кездегі ықтималдыққа тең:

$$L_{жал} = P_{бос\ емес} = 1 - p_0. \qquad (16.38)$$

(16.33) формуланы ескерсек

$$L_{жал} = P_{бос\ емес} = \rho. \qquad (16.39)$$

(16.36) және (16.39) қатынастарды ескеріп, (16.37) формула бойынша

$$L_{кез} = \frac{\rho^2}{1-\rho}. \tag{16.40}$$

Өтініштер ағынының кез келген сипатында, қызмет көрсету уақытының кез келген үлестірілуінде, қызмет көрсетудің кез келген ретінде өтініштің жүйеде (кезекте) болуының орташа уақыты жүйедегі (өтініштегі) өтініштердің орташа санының өтініштер ағынының қарқындылығына қатынасына тең, яғни

$$T_{ж} = \frac{L_{ж}}{\lambda}, \tag{16.41}$$

$$T_{кез} = \frac{L_{кез}}{\lambda}. \tag{16.42}$$

(16.41) және (16.42) формулалар *Литтл формулалары* деп аталады. Олар шектік, стационар режимде жүйеде болған өтініштердің орташа саны жүйені тастап кеткен өтініштердің орташа санына тең екенінен алынады. Екі жағдайдағы өтініштер ағынының қарқындылығы – λ.

(16.36) және (16.40) қатынастарды ескеріп (16.41) және (16.42) формулалардың негізінде өтініштердің жүйеде болуының орташа уақыты мына формула бойынша анықталады:

$$T_{ж} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}, \tag{16.43}$$

ал өтініштердің кезекте болуының орташа уақыты –

$$T_{кез} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}. \tag{16.44}$$

16.7-мысал.

Жағажайда кемедегі жүкті түсіруге арналған бір орындық аялдама бар. Кеме ағынының қарқындылығы 0,3-ке (тәулігіне) тең. Бір кемедегі жүкті түсірудің орташа уақыты 3 тәулік болады. Кезек шектелмеген ұзындықта болады деп ұйғарылсын. Кеме аялдайтын орынның жұмыс істеуінің тиімділік көрсеткіштерін және жүкті түсіру үшін кезекте үш кемеден артық кеме жоқ болатын жағдайдағы ықтималдықты табу керек.

Шығарылуы. $\overline{t}_{қыз} = 3$ *мин,* $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \overline{t}_{қыз.} = 0{,}3 \cdot 3 = 0{,}9$ $\rho = 0{,}9 < 1$ болғандықтан, жүкті түсіру кезегі ақырсыз өсуі мүмкін емес және шектік ықтималдықтар бар болады.

Кеме аялдайтын орынның бос болған жағдайдағы ықтималдығы $p_0 = 1 - 0{,}9 = 0{,}1$, ал оның бос емес жағдайындағы ықтималдығы $P_{бос\ емес} = 1 - 0{,}1 = 0{,}9$. (16.34) формула бойынша кеме аялдайтын орында 1, 2, 3, 4 кеме (яғни 0, 1, 2, 3 кемедегі жүкті түсіру күтілуде) болған жағдайлардағы ықтималдықтар:

$$p_1 = 0{,}9 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}09;$$

$$p_2 = 0{,}9^2 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}81 \cdot 0{,}1 = 0{,}081;$$

$$p_3 = 0{,}9^3 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}729 \cdot 0{,}1 = 0{,}0729;$$

$$p_4 = 0{,}9^4 \cdot (1 - 0{,}9) = 0{,}6561 \cdot 0{,}1 = 0{,}06561$$

мәндеріне тең.

Жүкті түсіру үшін кезекте үш кемеден артық кеме жоқ болатын жағдайдағы ықтималдық:

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = 0{,}09 + 0{,}081 + 0{,}0729 + 0{,}06561 = 0{,}30951$$

(16.40) формула бойынша жүкті түсіруді күтіп тұрған кезектегі кемелердің орташа саны:

$$L_{кез} = \frac{\rho^2}{1-\rho} = \frac{0{,}9^2}{1-0{,}9} = 8{,}1;$$

ал жүкті түсіруді күтудің орташа уақыты (16.42) формула бойынша

$$T_{кез} = \frac{L_{кез}}{\lambda} = \frac{8{,}1}{0{,}3 \cdot 3} = \frac{8{,}1}{0{,}9} = 9 \text{ (тәулік).}$$

(16.36) формула бойынша кеме аялдайтын орындағы кемелердің орташа саны:

$$L_{ж} = \frac{\rho}{1-\rho} = \frac{0{,}9}{1-0{,}9} = \frac{0{,}9}{0{,}1} = 9 \text{ (тәулік)}$$

(немесе (16.37) формула бойынша $L_{кез} = L_{ж} - L_{жал}$ немесе

$L_{ж} = L_{кез} + L_{жал} = 8{,}1 + 0{,}9 = 9$ (тәулік)), ал (16.41) формула бойынша кеме аялдайтын орында кемелердің болуының орташа саны:

$$T_{ж} = \frac{L_{ж}}{\lambda} = \frac{9}{0{,}3 \cdot 3} = \frac{9}{0{,}9} = 10 \text{ (тәулік)}.$$

Кемелердегі жүкті түсіру тиімділігі жоғары емес екені көрініп тұр. Оны арттыру үшін кемедегі жүкті түсірудің $\overline{t}_{қыз}$ орташа уақытын азайту қажет не аялдамадағы (жағажайдағы) n орын санын арттыру қажет.

Жауабы. $L_{кез} = 8{,}1$; $T_{кез} = 9$; $L_{ж} = 9$; $T_{ж} = 10$ жүкті түсіру үшін кезекте үш кемеден артық кеме жоқ болатын жағдайдағы ықтималдық: $P = 0{,}31$.

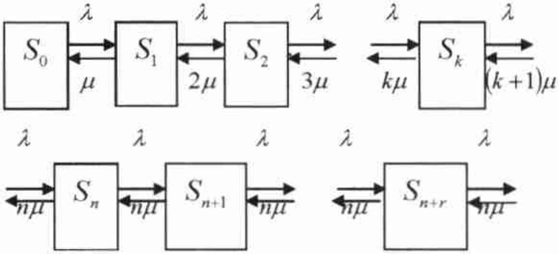
16.7.2. Шектелмеген кезекпен берілген көпарналы жаппай қызмет көрсету жүйесі

Ешқандай шектеу қойылмаған кезекпен берілген n-арналы ЖҚКЖ-сі бар есепті қарастырайық. ЖҚКЖ-сіне түсетін өтініштер ағынының қарқындылығы λ-ға, ал қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ-ға тең болсын. Жағдайдың шектік ықтималдықтары мен ЖҚКЖ-сінің тиімділік көрсеткішін табу қажет.

Жүйе өтініштер саны бойынша нөмірленген ЖҚКЖ-дегі S_0, S_1, S_2, ..., S_k, ..., S_n, ... жағдайлардың біреуінде болуы мүмкін: S_0– арналардың бәрі бос, жүйеде өтініш жоқ; S_1 – бір арна бос емес, қалғандары бос; S_2– екі арна бос емес, қалғандары бос; ..., S_k – k арна бос емес, қалғандары бос; ..., S_n– барлық n арна бос емес (кезек жоқ); S_{n+1}– барлық n арна бос емес, кезекте бір өтініш бар; ..., S_{n+r}– барлық n арна бос емес, кезекте r өтініш бар, ...

ЖҚКЖ жағдайының графы 16.7-суретте берілген.

Алдында қарастырған ЖҚКЖ-сінен өзгешелігі қызмет көрсету ағынының қарқындылығы (жүйені бір жағдайдан басқа жағдайға: оңнан солға қарай көшіретін) тұрақты болып қалмайды, ал ЖҚКЖ-сінде өтініштер санының мүмкіндігінше 0-ден n-ге дейін артуына байланысты қызмет көрсету арналары да артады және



16.7-сурет

қызмет көрсету ағынының қарқындылығы μ шамасынан $n\mu$ шамасына дейін артады. ЖҚКЖ-сінде өтініштер саны n-нен артық болған жағдайда қызмет көрсету ағынының қарқындылығы $n\mu$ -ге тең күйінде тұрақты болып қалады.

$\frac{\rho}{n}<1$ болғанда шектік ықтималдықтар бар болады. Егер $\frac{\rho}{n}\geq 1$ болса, кезек шексіздікке дейін артады. Жойылу және көбею үрдісінің (16.16) және (16.17) формулаларын пайдаланып шектелмеген кезекпен берілген n-арналы ЖҚКЖ-сінің жағдайларының шектік ықтималдығының келесі формулаларын алуға болады:

$$p_0=\left(1+\frac{\rho}{1!}+\frac{\rho^2}{2!}+\ldots+\frac{\rho^n}{n!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\right)^{-1}, \tag{16.45}$$

$$p_1=\frac{\rho}{1!}p_0,\ \ldots,\ p_k=\frac{\rho^k}{k!}p_0,\ \ldots,\ p_n=\frac{\rho^n}{n!}p_0, \tag{16.46}$$

$$p_{n+1}=\frac{\rho^{n+1}}{n\cdot n!}p_0,\ \ldots,\ p_{n+r}=\frac{\rho^{n+r}}{n^r\cdot n!}p_0. \tag{16.47}$$

Өтініш кезекте болатын жағдайдың ықтималдығы

$$P_{кез}=\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}p_0. \tag{16.48}$$

Шектелмеген кезекпен берілген n-арналы ЖҚКЖ үшін алдыңғы тәсілдерді пайдалана отырып, келесі көрсеткіштерді табамыз:

бос емес арналардың орташа саны

$$P_{кез}=\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}p_0, \tag{16.49}$$

кезектегі өтініштердің орташа саны

$$L_{кез} = \frac{\rho^{n+1} p_0}{n \cdot n! \left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2}, \tag{16.50}$$

жүйедегі өтініштердің орташа саны

$$L_{ж} = L_{кез} + \rho. \tag{16.51}$$

Өтініштердің кезекте болуының орташа уақыты мен өтініштердің жүйеде болуының орташа уақыты (16.42) және (16.41) Литтл формулалары бойынша табылады.

Ескерту. Шектелмеген кезекпен берілген ЖҚКЖ үшін жүйеге келетін кез келген өтінішке қызмет көрсетіледі, яғни қабыл алмау ықтималдығы нөлге тең: $P_{қаб.алма} = 0$, салыстырмалы өткізу қабілеттілігі $Q = 1$, ал абсолютті өткізу қабілеттілігі өтініштердің ену ағынының қарқындылығына тең, яғни $A = \lambda$.

16.8-мысал.

Дүкенде сатып алушылардың есептесу жеріне (кассаға) сағатына $\lambda = 72$ қарқындылығымен сатып алушылар ағыны келеді. Бақылаушы-кассир бір сатып алушыға қызмет көрсетуінің орташа ұзақтығы $\bar{t} = 3\,мин$.

1. Кезек шексіз арта бермейтіндей бақылаушы-кассирлердің $n_{\min}$ ең аз санын анықтау керек.

2. $n = n_{\min}$ болғанда қызмет көрсетудің сәйкес сипаттамаларын анықтау керек.

3. Қызмет көрсету арналарына жұмсалатын шығындармен және сатып алушылардың кезекте болуымен байланысты, мысалы, $C_{сал} = \frac{1}{\lambda} n + 4T_{кез}$ сияқты, шығынның $C_{сал}$ салыстырмалы шамасы ең аз болатындай, бақылаушы-кассирлердің $n_{тиім}$ тиімді санын және $n = n_{\min}$ мен $n = n_{тиім}$ болғандағы қызмет көрсету көрсеткіштерін салыстыру керек.

4. Кезекте төрт сатып алушыдан артық болмайтын жағдайдың ықтималдығын анықтау керек.

Шығарылуы. 1. Есептің шарты бойынша $\lambda = 72$ (1/сағ) немесе $\lambda = 72/60 = 1{,}2$ (1/мин). (16.24) формула бойынша $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = \lambda \bar{t}_{қыз} =$ $= 1{,}2 \cdot 3 = 3{,}6$. $\dfrac{\rho}{n} < 1$ шартында, яғни $n > \rho = 3{,}6$ кезек шексіздікке дейін артпайды. Сонымен, бақылаушы-кассирлердің ең аз саны $n_{\min} = 4$.

2. $n = 4$ болған кездегі ЖҚКЖ көрсеткіштерін табамыз.

(16.45) формула бойынша кассада сатып алушылар жоқ болған жағдайдағы ықтималдықты есептейміз:

$$p_0 = \left(1 + \frac{3{,}6}{1!} + \frac{3{,}6^2}{2!} + \frac{3{,}6^3}{3!} + \frac{3{,}6^4}{4!} + \frac{3{,}6^5}{4!(4-3{,}6)}\right)^{-1} = 0{,}011,$$

яғни орташа алғанда бақылаушы-кассирлер уақыттың 1,1%-ында жұмыссыз (кассада сатып алушылар жоқ) болады.

(16.48) формула бойынша кассада кезек болатын жағдайдың ықтималдығы:

$$P_{кез} = \frac{3{,}6^5}{4!(4-3{,}6)} \cdot 0{,}011 = 0{,}693.$$

(16.50) формула бойынша кезекте тұрған сатып алушылардың орташа саны

$$L_{кез} = \frac{3{,}6^5}{4 \cdot 4!\left(1 - \frac{3{,}6}{4}\right)^2} \cdot 0{,}011 = 7{,}09.$$

(16.42) формула бойынша күтудің орташа уақыты

$$T_{кез} = \frac{1}{1{,}2} \cdot 7{,}09 = 5{,}91 \text{ (мин)}.$$

Есептесу жерінде сатып алушылардың орташа саны (16.51) формула бойынша

$$L_{ж} = 7{,}09 + 3{,}6 = 10{,}15.$$

Сатып алушылардың есептесу жерінде (кассада) болуының орташа уақыты (16.41) формула бойынша

$$T_{ж} = \frac{1}{1{,}2} \cdot 10{,}15 = 8{,}46 \text{ (мин)}.$$

Сатып алушыларға қызмет көрсетіп тұрған бақылаушы-кассирлердің орташа саны (16.49) формула бойынша

$$\bar{k} = 3{,}6.$$

Қызмет көрсетумен айналысып тұрған бақылаушы-кассирлердің коэффициенті (үлесі)

$$k_{бк} = \frac{3{,}6}{4} = 0{,}9.$$

Есептесу жерінің абсолютті өткізу мүмкіндігі A=1,2 (1/мин), немесе 72 (1/сағ), яғни сағатына 72 сатып алушы.

Қызмет көрсету көрсеткіштеріне талдау жүргізу есептесу жерінде төрт бақылаушы-кассирлер болған кезде жүктеменің едәуір азаятынын көрсетеді.

3) n=4 болғанда шығынның салыстырмалы шамасы:

$$C_{сал} = \frac{1}{\lambda} n + 4T_{кез} = \frac{1}{1{,}2} \cdot 4 + 4 \cdot 5{,}91 = 26{,}97.$$

n-нің басқа мәндерінде шығынның салыстырмалы шамаларын есептейік (16.2-кесте)

16.2-кесте

Қызмет көрсету көрсеткіштері	Бақылаушы-кассирлердің саны				
	4	5	6	7	8
Бақылаушы-кассирлердің p_0 тұрып қалған жағдайдағы ықтималдығы	0,011	0,023	0,026	0,027	0,027
Кезектегі сатып алушылардың $T_{кез}$ орташа саны	5,91	0,88	0,25	0,08	0,02
Шығынның $C_{сал}$ салыстырмалы шамасы	26,97	7,68	5,98	6,14	6,76

16.2-кестеден көріп отырғанымыздай бақылаушы-кассирлердің саны $n=n_{тиім}=6$ болған кезде минималды шығын алынады.

$n=n_{тиім}=6$ болған кездегі есептесу жерінің қызмет көрсету көрсеткіштерін анықтайық.

$$P_{кез}=0{,}118; \quad L_{кез}=0{,}29; \qquad T_{кез}=0{,}25\,(\text{мин});$$

$$L_{ж}=3{,}89; \qquad T_{ж}=3{,}24\ (\text{мин});$$

$$\bar{k}=3{,}6; \qquad k_{бк}=0{,}6.$$

$n=4$ және $n=6$ мәндерінде алынған көрсеткіштерді салыстыра отырып мынандай айырмашылықтарды байқаймыз: $n=5$ болғанда кезектің $P_{кез}$ пайда болу ықтималдығы; кезектің $L_{кез}$ ұзындығы мен кезекте болудың $T_{кез}$ орташа уақыты және сәйкес сатып алушылардың $L_{ж}$ орташа саны мен есептесу жерінде болудың $T_{ж}$ орташа уақыты, сонымен қатар, қызмет көрсетумен айналысып жатырған бақылаушылардың үлесі $k_{кб}$ едәуір азайды. Бірақ, қызмет көрсетіп тұрған бақылаушы-кассирлердің $\bar{k}$ орташа саны мен есептесу жерінің A абсолютті өткізу мүмкіндігі, әрине өзгерген жоқ.

4. Кезекте төрт сатып алушыдан артық болмайтын жағдайдың ықтималдығы былайша анықталады:

$$P(r)\le 4=p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6+p_{6+1}+p_{6+2}+p_{6+3}+$$
$$+p_{6+4}=1-P_{кез}+p_{6+1}+p_{6+2}+p_{6+3}+p_{6+4}$$

мұндағы әрбір қосылғышты (16.45)-(16.48) формулалар бойынша табамыз;

$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6$ – 1-ден 6-ға дейін бақылаушы-кассирлердің бос емес болған жағдайы;

$p_{6+1}+p_{6+2}+p_{6+3}+p_{6+4}$ – кезекте 1-ден 4-ке дейін сатып алушылар тұрған кездегі жағдайы;

$n=6$ болғанда

$$P(r)\le 4=1-\frac{3{,}6^7}{6!(6-3{,}6)}\cdot 0{,}026+\frac{3{,}6^7}{6\cdot 6!}\cdot 0{,}026+$$

$$+\frac{3{,}6^8}{6^2\cdot 6!}\cdot 0{,}026+\frac{3{,}6^9}{6^3\cdot 6!}\cdot 0{,}026+\frac{3{,}6^{10}}{6^4\cdot 6!}\cdot 0{,}026=0{,}9847.$$

$n = 4$ болған кезде бақылаушы-кассирлердің ықтималдығы аз екенін аламыз $P(r) \leq 4 = 0{,}8738$.

Жауабы.

1. $n_{\min} = 4$;
2. $n = 4$ болған кездегі ЖҚКЖ көрсеткіштері:

$P_{кез} = 0{,}693$; $L_{кез} = 7{,}09$; $T_{кез} = 5{,}91$; (мин);

$L_{ж} = 10{,}15$; $T_{ж} = 8{,}46$; (мин);

$\bar{k} = 3{,}6$; $k_{бк} = \dfrac{3{,}6}{4} = 0{,}9$; $A = 1{,}2$ (1/мин), немесе 72 (1/сағ);

3. $C_{сал} = 5{,}98$, $n = n_{тиім} = 6$;

$n = 4$ және $n = 6$ мәндеріндегі көрсеткіштерді салыстырғандағы айырмашылықтар: $n = 6$ болғанда кезектің $P_{кез}$ пайда болу ықтималдығы; кезектің $L_{кез}$ ұзындығы мен кезекте болудың $T_{кез}$ орташа уақыты және сәйкес сатып алушылардың $L_{ж}$ орташа саны мен есептесу жерінде болудың $T_{ж}$ орташа уақыты, сонымен қатар, қызмет көрсетумен айналысып жатырған бақылаушылардың үлесі $k_{кб}$ едәуір азайды. Бірақ, қызмет көрсетіп тұрған бақылаушы-кассирлердің $\bar{k}$ орташа саны мен есептесу жерінің A абсолютті өткізу мүмкіндігі өзгерген жоқ.

4. $n = 6$ болғанда бақылаушы-кассирлердің ықтималдығы $P(r) \leq 4 = 0{,}9847$; $n = 4$ болғанда $P(r) \leq 4 = 0{,}8738$.

16.9-мысал.

Билет сататын екі терезесі бар темір жол кассасында *A* және *B* елді мекенге билеттер сатылады. Екі елді мекенге де билет сатып алушы жолаушылардың ағынының қарқындылығы бірдей: $\lambda_A = \lambda_B = 0{,}35$ (минутына, жолаушылар саны). Кассир жолаушыларға қызмет көрсетуге орташа алғанда 3 минут уақытын жоғалтады. Билет сатудың екі нұсқасы қарастырылады: біріншісі – екі терезесі бар бір кассада екі мекенге де (*A* және *B*) бір мезгілде билеттер сатылады; екіншісі – билеттер екі арнайыландырылған кассаларда (әрқайсысында бір-бір терезеден бар) – біреуі тек қана *A* мекеніне, екіншісі тек қана *B* мекеніне сатылады.

1. Қызмет көрсетудің негізгі көрсеткіштері бойынша билет сатудың екі нұсқасын салыстыру керек.

2. Сатудың екінші нұсқасы бойынша жолаушылар сатудың бірінші нұсқасына қарағанда орташа алғанда аз уақыт жұмсайтындай бір жолаушыға қызмет көрсетудің орташа уақытын қалай өзгертуге болатынын анықтау керек.

Шығарылуы. 1. Бірінші нұсқа бойынша өтініштер ағыны $\lambda = 0{,}35 + 0{,}35 = 0{,}70$ қарқындылықпен түсетін екіарналы ЖҚКЖ бар; қызмет көрсету ағынының қарқындылығы $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}7}{0{,}5} = 1{,}4$. $\frac{\rho}{n} = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7 < 1$ болғандықтан, шектік ықтималдықтар бар болады.

(16.45) формула бойынша екі кассирдің жұмыс істемей тұрып қалуының (уақытша) ықтималдығы:

$$p_0 = \left(1 + \frac{1{,}4}{1!} + \frac{1{,}4^2}{2!} \frac{1{,}4^3}{2!(2-1{,}4)}\right)^{-1} = 0{,}1765.$$

(16.50) формула бойынша кезекте тұрған жолаушылардың орташа саны

$$L_{кез} = \frac{1{,}4^3}{2 \cdot 2! \left(1 - \frac{1{,}4}{2}\right)} \cdot 0{,}1765 = 1{,}35.$$

(16.51) формула бойынша кассадағы жолаушылардың орташа саны

$$L_{ж} = 1{,}35 + 1{,}4 = 2{,}75.$$

Кезекті күтуге және билетті сатып алуға кететін орташа уақыт сәйкес (16.42) және (16.41) формулалар бойынша былай есептеледі:

$$T_{кез} = \frac{1{,}35}{0{,}7} = 1{,}93 (\text{мин}) \quad \text{және} \quad T_{ж} = \frac{2{,}75}{0{,}7} = 3{,}93 \ (\text{мин}).$$

Екінші нұсқа бойынша екі бірарналы ЖҚКЖ бар (екі арнайыландырылған терезе); әрқайсысына $\lambda = 0{,}35$ қарқындылықпен өтініштер ағыны түседі. $\mu = \frac{1}{2} = 0{,}5$; $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0{,}35}{0{,}5} = 0{,}7$.

$\frac{\rho}{n} = \frac{1{,}4}{2} = 0{,}7 < 1$ болғандықтан, шектік ықтималдықтар осы жағдайда да бар болады.

(16.40), (16.36), (16.42), (16.41) формулалар бойынша

$$L_{кез} = \frac{0{,}7^2}{(1-0{,}7)} = 1{,}6; \qquad L_{жс} = \frac{0{,}7}{(1-0{,}7)} = 2{,}3;$$

$$T_{кез} = \frac{1{,}6}{0{,}35} = 4{,}57 \text{ (мин)}; \quad T_{жс} = \frac{2{,}3}{0{,}35} = 6{,}57 \text{ (мин)}.$$

Сонымен, екінші нұсқа бойынша кезек ұзындығы да, оны күтудің орташа уақыты да және тұтасымен алғанда билет сатып алуға кететін орташа уақыт та артты. Осындай өзгешелік бірінші нұсқада (екіарналы ЖҚКЖ) әрбір екі кассирдің уақытша жұмыссыз бос отыратын уақытының орташа үлесі аз: егер ол *A* елді мекеніне билет сатып алушыға қызмет көрсетіп тұрмаса, ол *B* елді мекеніне билет сатып алушыға қызмет көрсете алады және керісінше. Екінші нұсқада мұндай өзара алмасушылық болмайды.

Екінші нұсқа бойынша билет сатып алуға кететін орташа уақыттың артқанын байқауға болады. Осындай елеулі өзгеріс ЖҚКЖ өзінің мүмкіндіктерінің шегінде ($\rho = 0{,}7$) жұмыс істейтінімен байланысты: қызмет көрсетудің $\overline{t}_{қыз}$ орташа уақыты жеткілікті елеусіз артты, яғни μ-ді азайтса, ρ – 1-ден артады, яғни кезек шексіз арта бастайды.

2. Жоғарыда, бірінші нұсқа бойынша бір жолаушыға билет сатуға қызмет көрсетілетін $\overline{t}_{қыз} = 3$ (мин) орташа уақытында билет сатып алуға жұмсалатын орташа уақыт $T_{жс_1} = 6{,}57$ (мин) уақытты құрайды. Сатудың екінші нұсқасы үшін көрсетілген шарт бойынша $T_{жс_2} < T_{жс_1}$ немесе (16.36) және (16.41) қатынастарды

ескерсек: $\frac{1}{\lambda}\cdot\frac{\rho}{1-\rho}<T_{жс_1}$.

$\rho=\frac{\lambda}{\mu}=\lambda\bar{t}_{қыз}$ деп ұйғарсақ, $-\frac{\bar{t}_{қыз}}{1-\lambda\bar{t}_{қыз}}<T_{жс_1}$ теңсіздігін аламыз,

осыдан $\bar{t}_{қыз}<\frac{T_{жс_1}}{1+\lambda T_{жс_1}}$ немесе $\bar{t}_{қыз}<\frac{6{,}57}{1+0{,}35\cdot 6{,}57}=1{,}99$ (мин).

Сонымен, егер бір жолаушыға қызмет көрсетілетін орташа уақыт 1,01 минуттан, немесе 66,3%-дан артық уақытқа азайса, онда екінші нұсқа бойынша билетті сатып алуға кететін уақыттың орташа шығыны азаяды.

Жауабы.

1. Бірінші нұсқа бойынша екі кассирдің жұмыс істемей тұрып қалуының (уақытша) ықтималдығы:

$$L_{кез}=1{,}35;\ L_{жс}=2{,}75.$$
$$T_{кез}=1{,}93\ (\text{мин});\ T_{жс}=3{,}93\ (\text{мин}).$$

Екінші нұсқа бойынша

$$L_{кез}=1{,}6; \qquad L_{жс}=2{,}3;$$
$$T_{кез}=4{,}57\ (\text{мин}); \qquad T_{жс}=6{,}57\ (\text{мин}).$$

Екінші нұсқа бойынша кезек ұзындығы да, оны күтудің орташа уақыты да және тұтасымен алғанда билет сатып алуға кететін орташа уақыт та артты. Осындай өзгешелік бірінші нұсқа бойынша егер ол *A* елді мекеніне билет сатып алушыға қызмет көрсетіп тұрмаса, ол *B* елді мекеніне билет сатып алушыға қызмет көрсете алады және керісінше.

Екінші нұсқа бойынша билет сатып алуға кететін орташа уақыт артты. Осындай өзгеріс ЖҚКЖ өзінің мүмкіндіктерінің шегінде жұмыс істейтінімен байланысты қызмет көрсетудің $\bar{t}_{қыз}$ орташа уақыты артты.

2. Егер бір жолаушыға қызмет көрсетілетін орташа уақыт 1,01 минуттан артық уақытқа азайса, онда екінші нұсқа бойынша билетті сатып алуға кететін уақыттың орташа шығыны азаяды.

16.8 Шектеулі кезекпен берілген жаппай қызмет көрсету жүйесі

Шектеулі кезекпен берілген ЖҚКЖ алдында берілген есептерден айырмашылығы – кезектегі өтініштер санының шектеулілігінде (қандай да бір берілген санынан артуы мүмкін емес). Егер кезектегі барлық орындар бос емес кезде өтініш түссе, онда ол өтініш ЖҚКЖ-сінен қызмет көрсетілмей қайтарылады, яғни өтініш қабылданбайды.

Осындай ЖҚКЖ-сіндегі жағдайлардың шектік ықтималдықтары мен тиімділік көрсеткіштерін есептеу үшін жоғарыда келтірілген тәсілдерді пайдалануға болады, тек қана (16.33) формуланы қорытқанда ақырсыз прогрессияны қосындыласақ, бұл жерде ақырлы прогрессияны қосындылаймыз.

16.8.1 Шектеулі кезекпен берілген бірарналы жаппай қызмет көрсету жүйесі

Шектеулі кезекпен берілген бірарналы ЖҚКЖ үшін:
шектік ықтималдықтар:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{m+2}},$$

$$p_1 = \rho p_0,\ p_2 = \rho^2 p_0,\ \ldots,\ p_k = \rho^k p_0;$$

қабыл алмау ықтималдығы:

$$P_{қаб.алм.} = P_{m+1} = \rho^{m+1} p_0;$$

абсолютті өткізу қабілеттілігі:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1-\rho^{m+1} p_0\right);$$

салыстырмалы өткізу қабілеттілігі:

$$Q = 1 - P_{қаб.алм} = 1-\rho^{m+1} p_0;$$

кезектегі өтініштердің орташа саны:

$$L_{кез} = \frac{\rho^2 \cdot [1-\rho^m(m+1-m\rho)]}{(1-\rho^{m+2})(1-\rho)};$$

қызмет көрсетіліп жатырған өтініштердің орташа саны (бос емес арналардың орташа саны):

$$L_{қыз} = 1 - p_0;$$

жүйедегі өтініштердің орташа саны:

$$L_{ж} = L_{кез} + L_{қыз}.$$

16.8.2 Шектеулі кезекпен берілген көпарналы ЖҚКЖ

Шектеулі кезекпен берілген көпарналы ЖҚКЖ үшін:
шектік ықтималдықтар:

$$p_0 = \left[1 + \frac{\rho}{1!} + \ldots + \frac{\rho^n}{n!} + \ldots + \frac{\rho^{n+1}\left(1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)} \right]^{-1},$$

$$p_1 = \frac{\rho}{1!} p_0, \; p_2 = \frac{\rho^2}{2!} p_0, \; \ldots, \; p_k = \frac{\rho^k}{k!} p_0, \; \ldots, \; p_n = \frac{\rho^n}{n!} p_0,$$

$$p_{n+1} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} p_0, \; \ldots, \; p_{n+r} = \frac{\rho^{n+r}}{n^r \cdot n!} p_0 \;\; (r = 1, 2, \ldots, m);$$

қабыл алмау ықтималдығы:

$$P_{қаб.алм.} = P_{n+m} = \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0;$$

абсолютті өткізу қабілеттілігі:

$$A = \lambda Q = \lambda\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right);$$

салыстырмалы өткізу қабілеттілігі:

$$Q = 1 - P_{қаб.алм.} = 1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0;$$

кезектегі өтініштердің орташа саны:

$$L_{кез} = \frac{\rho^{n+1} p_0 \left[1 - \left(m + 1 - m\frac{\rho}{n}\right)\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}{n \cdot n!\left(1 - \frac{\rho}{n}\right)^2};$$

қызмет көрсетіліп жатырған өтініштердің орташа саны (бос емес арналардың орташа саны):

$$\bar{k} = \rho\left(1 - \frac{\rho^{n+m}}{n^m \cdot n!} p_0\right);$$

жүйедегі өтініштердің орташа саны:

$$L_{ж} = L_{кез} + \bar{k}.$$

Өтініштердің кезекте және жүйеде болуының орташа уақыты Литтл формулалары бойынша есептеледі:

$$T_{ж} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}; \quad T_{кез} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}.$$

16.10-мысал.

Жағада кемедегі жүкті түсіретін кеме аялдайтын бір орын бар. Кеме ағынының қарқындылығы 0,3-ке (тәулігіне) тең. Бір кемедегі жүкті түсірудің орташа уақыты 3 тәулік болады. Егер жүкті түсіру кезегінде 4 кемеден артық кеме тұрса, онда кеме (жүкті түсірместен) жағадан кетеді.

Шығарылуы. Есептің шарты бойынша $m = 4$. Шектеулі кезекпен берілген көпарналы ЖҚКЖ-не арналған формулаларды пайдаланамыз.

Кеме тоқтайтын жағажайдағы орынның бос болған жағдайдағы ықтималдығы:

$$p_0 = \frac{1-0,9}{1-0,9^{4+2}} = 0,21342.$$

Келген кеме жүгін түсірместен жағажайдан кеткен жағдайдағы ықтималдық:

$$P_{қаб.алм.} = 0,9^{4+1} \cdot 0,213 = 0,126;$$

жағажайдағы орынның салыстырмалы өткізу қабілеттілігі:

$$Q = 1 - 0{,}126 = 0{,}874\,;$$

жағажайдағы орынның абсолютті өткізу қабілеттілігі:

$$A = \lambda Q = 0{,}3 \cdot 0{,}874 = 0{,}262\,,$$

яғни орташа алғанда тәулігіне 0,26 кемеге қызмет атқарылады;

кемедегі жүкті түсіруді күтіп тұрған кемелердің орташа саны:

$$L_{кез} = \frac{0,9^2 \cdot [1 - 0,9^4(4 + 1 - 4 \cdot 0,9)]}{(1 - 0,9^{4+2}) \cdot (1 - 0,9)} = 1,408;$$

(16.42) формула бойынша жүкті түсіруді күтуге кететін орташа уақыт

$$T_{кез} = \frac{1{,}408}{0{,}9} = 1{,}56 \text{ (тәулік)};$$

жағажайдағы орында тұрған кемелердің орташа саны:

$$L_{ж} = 1{,}408 + (1 - 0{,}213) = 2{,}195\,;$$

(16.41) формула бойынша кеменің жағажайдағы орында тұруының орташа уақыты:

$$T_{ж} = \frac{2{,}195}{0{,}9} = 2{,}44 \text{ (тәулік)}.$$

Жауабы. $T_{ж} = \dfrac{2{,}195}{0{,}9} = 2{,}44$; $P_{қаб.алм.} = 0{,}126$;
$Q = 0{,}874$; $A = 0{,}262$;
$L_{кез} = 1{,}408$; $T_{кез} = 1{,}56$ (тәулік);
$L_{ж} = 2{,}195$; $T_{ж} = 2{,}44$ (тәулік).

16.9 Күтуі шектеулі уақытпен берілген жаппай қызмет көрсету жүйесі

Практикада «шыдамсыз» деп аталатын өтінішпен берілген ЖҚКЖ жиі кезедседі. Егер күту уақыты қандай да бір шамадан асып кетсе, мұндай өтініштер қызмет көрсеткенін күтпей кезектен кетіп қалады. Дербес жағдайда, егер осы түрдегі өтініштер белгілі бір уақыт аралығында қызмет көрсетуге түспесе, жедел хабарлар өзінің құндылығын (немесе тіпті мағынасын) жоя бастағанда, осындай түрдегі өтініштер қызмет көрсетуді бастар алдында кідіру өнім сапасын жоғалтуға әкелетіндей тиімді басқару жүйелеріндегі әр түрлі технологиялық жүйелерде пайда болады.

Осындай жүйелердің қарапайым математикалық модельдерінде өтініш қандай да бір v параметрімен көрсеткіш заңы бойынша үлестірілген, яғни қызмет көрсетілуге кезекте тұрған әрбір өтініш жүйеден v қарқындылықпен кетеді деп шартты есептеуге болатын кезекте кездейсоқ уақытта болады деп ұйғарылады.

Шектелген уақытпен берілген ЖҚКЖ сәйкес тиімділік көрсеткіштері жойылу және көбею үрдісі үшін алынған нәтижелер базасында алынады.

Қорытындалай келе, практикада өтініштердің ену ағыны ЖҚКЖ-сінің өзінің жағдайынан тәуелді болатын қызмет көрсетудің тұйық жүйелері жиі кездеседі. Мысал ретінде жөндеу базасына өндіріс орындарынан қандай да бір машиналарды әкелгендегі жағдай: жөндеуде машина көп болған сайын, соншалықты олар пайдалануда аз болады және қайтадан жөндеуге келетін машиналардың қарқындылығы да соншалықты аз болатыны түсінікті.

Бақылау сұрақтары және есептер

1. Жаппай қызмет көрсету жүйелері, қызмет көрсету арналары, өтініштердің кездейсоқ ағыны.
2. Жаппай қызмет көрсету жүйесінің негізгі класы.
3. Қандай жүйе марковтық (салдарсыз кездейсоқ) үрдіс деп аталады?
4. Оқиғалар ағыны, олардың түрлері.
5. Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулер жүйесі.
6. Шектік ықтималдық деп қандай ықтималдықты айтамыз?
7. Жойылу және көбею үрдісі.
8. ЖҚКЖ тиімділік көрсеткіштері.
9. Эрланг формулаларының көмегімен не есептелінеді?
10. Литтл формулалары.
11. Автомай құю станциясы бір арналы (бір колонкасы бар) ЖҚКЖ болып табылады. Станцияда бір мезгілде үш көліктен артық көлік кезекке тұра алмайды, яғни автомай құюға келген келесі көлік

кезекке тұрмайды. Көлік ағынының қарқындылығы $\lambda = 1$ (минутына бір машина). Автомай құю үрдісі орташа алғанда 1,25 минутқа созылады. Қабыл алмау ықтималдығын, салыстырмалы және абсолютті өткізу қабілеттілігін, автомайды құюды күтіп тұрған көліктердің орташа санын, автомайды құю станциясындағы (қызмет көрсетілудегі көлік те қосылады) көліктердің орташа санын табу керек.

12. Екі колонкасы бар автомай құю станциясы $\lambda = 0,8$ (минутына) қарқындылығымен көлік ағынына қызмет көрсетеді. Бір машинаға қызмет көрсетудің орташа уақыты 2 минут. Осы төңіректе басқа автомай құю станциясы жоқ. Сондықтан осы станцияның алдында көліктердің кезегі шексіз артуы мүмкін. ЖҚКЖ-сінің сипаттамаларын анықтау керек.

13. Қабыл алмайтын екі арналы ЖҚКЖ бар. Жүйеге $\lambda = 4$ өтініш/сағ қарқындылықпен өтініштер ағыны келіп түседі. Бір өтінішке қызмет көрсетуге кететін орташа уақыт – 0,8 сағ. Кезектегі әрбір қызмет көрсетілген өтініш 120 тнг пайда әкеледі. Әрбір қызмет көрсетілген өтініш сағатына 80 тенге пайда әкеледі. ЖҚКЖ-сіндегі арналар санын үшке дейін арттыру экономикалық тиімді ме?

14. Қарқындылығы сағатына 4 өтініш және өтінішке қызмет көрсетуге кететін орташа уақыт 0,5 сағ. болатын үш орыны бар бірарналы ЖҚКЖ үшін салыстырмалы және абсолютті өткізу қабілеттілігін, ЖҚКЖ-сіндегі өтініштердің орташа санын, өтініштердің кезекте болуының орташа уақытын, өтініштердің ЖҚКЖ-де болуының орташа уақытын табу керек. Егер кезектегі орынды төртке дейін арттырсақ осы көрсеткіштер қалай өзгереді?

15. Сағат 12-ден 14-ке дейінгі түскі үзіліс мезгілінде өнеркәсіп қызметкерлері көршілес орналасқан кір жуатын орынның қызметін бөлімшелер бойынша бірқалыпты пайдаланады. Қызметкерлердің әрқайсысы кезекте орташа алғанда 20 минуттан артық тұра алмайды. Бір сағаттың ішінде келетін клиенттердің саны – 30, ал тапсырыстарды тіркеудің орташа уақыты – 3 минут. ЖҚКЖ-сінің көрсеткіштерін анықтау керек және егер тапсырыс қабылдаушының санын екіге арттырса көрсеткіштер қалай өзгереді?

ГЛОССАРИЙ

Абсолютті приоритет – маңызды өтініш әдеттегі өтінішті «ығыстырады».

Аддитивті функция – бірнеше айнымалылардан тұратын функцияның мәнін тек қана бір x_j айнымалысынан тұратын қандай да бір f_j функцияларының қосындысы ретінде қарастыруға болатын функция.

Ақпараттық жиын – ойыншы орналасқан және орналаса алатын позициялар жиыны.

Ақырлы коалициясыз ойын – ойыншылардың X_i таза стратегиялар жиыны ақырлы болатын ойын.

Ақырлы ойын – әрбір ойыншының стратегиялар жиыны ақырлы болған жағдайдағы ойын.

Ақырсыз ойын – кем дегенде бір ойыншының стратегиялар жиыны ақырсыз болған жағдайдағы ойын.

Антагонистикалық ойын – ойыншылар қарама-қарсы мақсатты көздеген жағдайдағы жұп ойын.

Аралас стратегия – таза стратегиялардың бірін кездейсоқ таңдаудан тұратын ойыншының стратегиясы.

Аралас стратегиясының спектрі – биматрицалық ойындар үшін $M_x = \{i|\xi_i > 0\}$ жиыны.

Ауқымды минимум нүктесі – $f(Y) \le f(X)$ теңсіздігі кез келген X үшін орындалатын жағдайдағы $f(X)$ функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Ауқымды максимум нүктесі – $f(Y) \ge f(X)$ теңсіздігі кез келген X үшін орындалатын жағдайдағы функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Ашық модельді тасымалдау есебі – жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығы мен тұтынушылардың жалпы сұранысының арасында баланс жоқ болған жағдайдағы тасымалдау есебі.

Әлді тепе-теңдік – кез келген $S \subset N$ коалициясы және $x_S \in \prod_{i \in S} X_i$ үшін $\sum_{i \in S} H_i(x^*) \ge \sum_{i \in S} H_i(x^* \| x_S)$ теңсіздігі орындалғандағы x^* жағдайы.

Әрекеттер коалициясы – бірлескен әрекеттері бірлесу мақсатындағы коалициялар.

Байланысқан граф – кез келген екі төбесін тізбекпен байланыстыруға болатын граф.

Балама – ойында әрбір позициядағы мүмкін болатын таңдаулар.

Белгіленген есептеу циклы – қайта есептеу циклының бос төбесінде «+» таңбасы, ал көршілес төбелерде қарама-қарсы таңба орналасқан цикл.

Биматрицалық ойын – екі ойыншы қатысатын ақырлы коалициясыз ойын.

Бос қор – жұмыстың ақырғы оқиғасының ерте мерзімін өзгертпей жұмыс ұзақтығын осы мөлшерге арттыруға болатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі.

Бұтақ **немесе** ***бұтақ тәріздес граф*** – кем дегенде екі төбесі бар циклсыз байланысқан граф.

Вальд критерийі – максиминді стратегияны қолдану ұсынылады. Критерий пессимистік болып табылады, табиғат адам үшін ең нашар түрде әрекет етеді деп есептелінеді.

Вербальды модельдеу – сөйлеу тілді пайдалану негізіндегі модельдеу.

Геометриялық модельдеу – макеттік немесе нысандық модельдерде жүзеге асырылады.

Градиент – координаталық осьтерге түсірілген проекциялары сәйкес дербес туынды болатын вектор, $\nabla F = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$.

Градиенттік әдістер – $x_{k+1} = x_k + \lambda_k \cdot \nabla Z(x_k)$, $\lambda > 0$ (егер $Z_{\max}$ ізделінсе) немесе $x_{k+1} = x_k - \lambda_k \cdot \nabla Z(x_k)$, $\lambda > 0$ (егер $Z_{\min}$ ізделінсе) формуламен табылатын және итерациялық тізбекті анықтайтын әдістер.

Гурвиц критерийі – бұл критерий $\max_i \left(\alpha \min_j a_{ij} + (1 - \alpha) \max_j a_{ij} \right)$ формуласы бойынша анықталатын стратегияны ұсынады, мұндағы α - оптимистік дәрежесі және $[0, 1]$ аралығында өзгереді.

Дау-жанжал – шешімді таңдау туралы мәселелер қарастырылатын көптеген әлеуметтік-экономикалық жағдайлардың әрқайсысы өзінің мақсатына жету үшін әр түрлі тәсілдермен әрекет ету мүмкіндігі бар, кейбір жағдайларда таңдаулары тайталас жақтардың әрекеттерінен тәуелді әр түрлі қызығушылықтарымен кем дегенде екі жақ қатысатындай қасиетті қамтитын жағдай.

Дәл әдіс – итерацияның ақырлы санында тиімді шешімге әкелетін әдіс.

Дербес жүріс – мүмкін болатын әрекеттердің біреуін ойыншының әдейі таңдауы.

Детерминирленген модельдер – қатаң функционалды байланыстармен берілген модельдер.

Динамикалық модельдер – уақытқа қатысты параметрлері өзгеретін модельдер.

Динамикалық программалау – шешімді қабылдау үрдісі бірнеше кезеңдерге бөлінуі мүмкін амалдарға бейімделген оңтайландыру әдістері.

Дискретті жағдайдағы үрдіс – үрдістің мүмкін болатын S_1, S_2, S_3, ... жағдайларын алдын ала атап өтуге болатын, ал жағдайдан жағдайға өту жүйесі лезде (секіріп) орындалатын үрдіс.

Дискретті модельдер – уақыт кванттталған модельдер.

Дөңес жиын – кез келген $x, y \in D$ үшін, $[x, y] \subset D$ болса, $D \subset E^n$ жиыны

Дөңес қабықша (D жиынының) – $D \subset E^n$ жиынындағы кез келген ақырлы санды векторлардың мүмкін болатын дөңес комбинациялар жиыны.

Дөңес программалау есебі – қандай да бір M жиынында барлық $f(x)$, $f_1(x)$, ..., $f_m(x)$ функциялары (шектеулер жүйесіндегі) дөңес, ал мақсат функциясы осы жиында не дөңес, не ойыс болатын сызықтық емес программалау есебі.

Дөңес функция – кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін $F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \leq \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2)$ теңсіздігі орындалған жағдайдағы n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция.

Елеулі ойындар – кез келген K және L коалициялары үшін $u(K)+u(L)<u(K \cup L)$ теңсіздігі орындалған жағдайдағы кооперативті ойындар.

Елеулі емес ойындар – кез келген K және L коалициялары үшін $u(K)+u(L)=u(K \cup L)$ теңдігі орындалған жағдайдағы кооперативті ойындар.

Ең кіші элемент (ең кіші құн) әдісі – тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімді табу әдісінің бірі. Бұл әдісте кестені толтырудың әрбір қадамында шығын шамасының ең аз мәні ескеріліп, кесте осы шама орналасқан тордан бастап толтырылады.

Ер нүктесі бар ойынның шешімі – тиімді стратегиялар жұбының және ойын құнының жиынтығы.

Жабық модельді тасымалдау есебі – жабдықтаушылардың жалпы қуаттылығы тұтынушылардың жалпы сұранысына тең болған жағдайдағы тасымалдау есебі.

Жағдай графтары – дискретті жағдайдағы кездейсоқ үрдісті талдау барысындағы геометриялық сұлба.

Жалпы түрде берілген программалау есебі – сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандыратын және шектеулер жүйесі теңдеулер мен теңсіздіктерден тұратын сызықтық программалау есебі.

Жанама төлемдері жоқ кооперативті ойындар* немесе *трансферабельді емес ұтыстармен берілген кооперативті ойындар – ойыншылардың бірлескен әрекеттер нәтижесі жалпы табыспен емес, ал компоненттері осы коалицияның кепілденген мүшелері бола алатын, қандай да бір ұтыс векторларының жиынымен өрнектелетін ойындар.

Жаппай қызмет көрсету жүйелері – амалдарды зерттеу барысында біртипті есептерді шығару кезінде көп рет пайдалануға арналған жүйелер.

Жаппай қызмет көрсету жүйесінің абсолютті өткізу қабілеттілігі – уақыт бірлігінде қызмет көрсетілетін өтініштердің саны.

Желілік модель – желінің арнайыландырылған формасында берілген, графикалық бейнеленуі *желілік графика* деп аталатын өзара байланысты жұмыстардың (амалдардың) орындалу жоспарының қандай да бір жиынтығын береді.

Жобаның сызықтық диаграммасы – желілік графиканы реттегеннен кейін үлкен емес жобаны толықтыру үшін ұсынылады.

Жол – желідегі тізбектің әрбір жұмысының ақырғы оқиғасы одан кейінгі жұмыстың бастапқы оқиғасымен беттесетін кез келген жұмыс тізбегі.

Жолдың R(L) уақыт қоры – сыншыл және қарастырылатын жолдардың арасындағы айырым ретінде анықталады.

Жуықтау әдісі – итерацияның ақырлы санында тиімді шешімге жуықтап әкелетін әдіс.

***Жұмыс жиынтығы* (*амалдар жиынтығы* немесе *жобасы*)** – орындау үшін көптеген жұмыс түрлерін жүзеге асыру талап етілетін кез келген мәселелер.

Жұп ойын – ойынға қатысатын жақтардың саны екіге тең болған жағдайдағы ойын.

Жүріс – белгілі бір ережелердің біреуін таңдау және жүзеге асыру.

Итеративті әдістер – берілген бастапқы $x_0 \in X$ нүктесінің көмегімен x^* тиімді шешімге жақындайтын жарамды $x_0, x_1, ..., x_k, x_{k+1}, ...$ нүктелер тізбегін алу әдісі.

Итерация – итеративті әдістерде x_k нүктесінен x_{k+1} нүктесіне өту.

Канондық немесе негізгі программалау есебі – сызықтық программалау есебінің барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандыратын және шектеулер жүйесі тек қана теңдіктерден тұратын сызықтық программалау есебі.

Кәдуілгі оқиғалар ағыны – оқиғалар ағынында оқиғалар бір-бірден пайда болатын оқиғалар ағыны.

Кездейсоқ жүріс – кездейсоқ таңдалынған әрекет.

Кездейсоқ (ықтималдық **немесе** ***стохастикалық) үрдіс*** – ықтималдық заңдылықтарға сәйкес қандай да бір жүйе жағдайының уақыт бойынша өзгеру үрдісі.

Кейіннен әрекеті жоқ ағын – кез келген екі қиылыспайтын τ_1 және τ_2 уақыт аралығы үшін осы екі аралықтың біріне тиісті оқиғалар саны басқа аралыққа жататын оқиғалар санынан тәуелсіз болатындай оқиғалар ағыны.

Кепілденген қор – жұмыстың бастапқы оқиғасының кеш мерзімін өзгертпей жұмыс ұзақтығын осы мөлшерге арттыруға болатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі.

Классикалық кооперативті ойындар **немесе** ***трансферабельді ұтыстармен берілген кооперативті ойындар*** – бөлінетін ұтыстармен берілген ойын.

Коалициялы ойындарда – ойыншылар коалицияға кіре алады және әрекеттер коалициясы мен қызығушылық коалициясы әр түрлі болады.

Коалициясыз ойындарда – әрбір ойыншының мақсаты – барынша көп мүмкін болатын жеке ұтысты иемдену.

Колмогоровтың дифференциалдық теңдеулер жүйесі – әрқайсысының сол жағында *i*-ші жағдайдың ықтималдығының туындысы, оң жағында барлық жағдайлардың ықтималдықтарын оқиға ағынының сәйкес қарқындылығына көбейтіндісінің қосындысынан берілген (*i*-ші) жағдайдың ықтималдығына көбейтілген жүйені берілген жағдайдан шығаратын барлық ағындардың қарқындылығының жалпы қосындысын алып тастағандағы мән жазылған теңдеулер жүйесі.

Көптік ойын – ойынға қатысатын жақтардың саны екіден артық болған жағдайдағы ойын.

Күтілетін ЖҚҚЖ – барлық арналар бос емес кезде түскен өтініш кетпейді, қызмет көрсету кезегіне тұрады.

Қабыл алмайтын ЖҚҚЖ – барлық арналар бос емес кезде түскен өтініш қабыл алынбайды, ЖҚҚЖ-сін тастап кетеді және әрі қарай қызмет көрсету үрдісіне қатыспайды.

Қабыл алмау ықтималдығы – өтініш орындалмай ЖҚКЖ-сінен кетеді.

Қадам ұзындығы – итерацияны құрудың $x_{k+1} = x_k + \lambda_k l_k$, $k = 0, 1, ...$ сұлбасындағы λ_k саны.

Қайта есептеу циклы – циклдың бір төбесі бос торда, қалған төбелері толтырылған торларда орналасатын тасымалдаудың базистік үлестіруімен берілген кестедегі цикл.

Қарапайым кооперативті ойын – кооперативті ойынның (0,1)-редуцирленген формасы.

Қарапайым (немесе пуассондық стационарлы) оқиғалар ағыны – оқиғалар ағыны бір мезгілде стационарлы, кәдуілгі және кейіннен әрекеті бар оқиғалар ағыны.

Қарапайым характеристикалық функция – 0 және 1 екі мәнін қабылдайтын *u* характеристикалық функциясы.

Қатаң дөңес функция – кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін $F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) < \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2)$ теңсіздігі орындалған жағдайдағы *n*-өлшемді кеңістіктің *M* дөңес жиынында анықталған $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция.

Қатаң ойыс функция – кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін $F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) > \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2)$ теңсіздігі орындалған жағдайдағы *n*-өлшемді кеңістіктің *M* дөңес жиынында анықталған $F(X) = F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция.

Қатаң төңіректік максимум нүктесі – кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін $X \neq Y$, $f(Y) > f(X)$ теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \le \varepsilon\}$ шар бар болған жағдайдағы $f(X)$ функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Қатаң төңіректік минимум нүктесі – кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін $X \neq Y$, $f(Y) < f(X)$ теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \le \varepsilon\}$ шар бар болған жағдайдағы $f(X)$ функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Қиғаш симметриялы матрица – квадраттық матрица элементтері үшін $a_{ij} = -a_{ji}$, $i, j = 1, 2, ..., n$ қатынастары орындалатын матрица.

Қолданбалы модельдер – нақты экономикалық нысандардың қызмет атқаратындай параметрлерін анықтау мен бағалауға және шаруашылық практикалық шешімдерді қабылдау үшін ұсыныстарды дұрыстап қабылдауға мүмкіндік беретін модельдер.

***Құн векторы* (*Шепли векторы*)** – Шепли аксиомаларын қанағаттандыратын $\varphi(u)=(\varphi_1(u), \varphi_2(u), \ldots, \varphi_n(u))$ n-өлшемді вектор.

Қызмет көрсету арналары – қызмет көрсету бірліктері.

Қызмет көрсету үрдістері – амалдарды зерттеу барысында біртипті есептерді шығару кезінде көп рет пайдалануға арналған жүйелерде пайда болатын үрдістер.

Лаплас критерийі – бұл критерийдің негізінде «жеткілікті емес негіздеу» принципі жатыр. Егер қандай да бір сұраныстың ықтималдығының бірқалыпты емес үлестіруі бар деп есептеудің жеткілікті негізі жоқ болса, онда олар бірдей деп қабылданады.

Макроэкономикалық модельдер – ірілендірілген материалдық-заттық және қаржы көрсеткіштерін: жалпы ұлттық өнімді, ұлттық табысты, біріктірілген сұранысты, біріктірілген тұтынуды, инвестицияларды, бос емес болуды, инфляция пайыздық мөлшерді, ақша санын және т.б. өзара байланыстыра отырып мемлекеттің экономикасын біртұтас ретінде сипаттайды

Максимин принципі – A ойыншының тиімді стратегиясын таңдау принципі.

Максимум критерийі – максиминді стратегияны қолдану ұсынылады. Критерий оптимистік болып табылады, табиғат адам үшін қолайлы түрде әрекет етеді деп есептелінеді. Табиғаттың әр түрлі жағдайы үшін үлестіру ықтималдығы белгілі деп қабылданады.

Марковтық* немесе *салдарсыз кездейсоқ үрдіс – кез келген t_0 уақыт мерзімі үшін үрдістің ықтималдық сипаты болашақта тек қана оның сол уақыттағы жағдайынан тәуелді болса және жүйе осы жағдайға қалай және қашан жеткеніне тәуелсіз болатын кездейсоқ үрдіс.

Матрицалық ойын – ұтыс матрицасымен сипатталатын ақырлы антагонистикалық ойын.

Микроэкономикалық модельдер – экономиканың құрылымдық және функционалдық құраушыларының, не кейбір құраушылардың шаруашылық ретінің өзара әрекетін сипаттайды.

Минимакс принципі – B ойыншының тиімді стратегиясын таңдау принципі.

Минимумды іздеудің белсенді әдістері (немесе біртіндеп іздеу әдістері) – есептеу барысында алдын ала алынған ақпараттар пайдаланылатын әдістер.

Минимумды іздеудің пассивті іздеу әдісі – табуляция нүктесі – N саны алдын ала анықталады және функцияның мәні барлық N нүктеде есептеледі.

Модель – нысанды қандайда бір тілдің көмегімен жуықтап жаңадан жасайтын осы нысанның шартты бейнесі.

Модельдеу – модельді құру үрдісі, нақты өмірдегі үрдістерді және құбылыстарды үйренудің әмбебап тәсілі.

Мүдде коалициясы – бірігу ойын нәтижесінің артықтығының сәйкестік белгісі бойынша құрылған коалиция.

Нөлдік кооперативті ойын – характеристикалық функцияларының барлық мәндері нөлге тең кооперативті ойындар.

Нүктедегі бағыт – итерацияны құрудың $x_{k+1} = x_k + \lambda_k l_k$, $k = 0, 1, \ldots$ сұлбасындағы $l_k \in R^n$ векторы.

Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайы – барлық $x_i \in X_i$ және $i = 1, 2, \ldots, n$ үшін $H_i(x^*) \geq H_i(x^* \| x_i)$ теңсіздігі ақиқат болғандағы $x^* = (x_1^*, \ldots, x_i^*, \ldots, x_n^*)$ жағдайы.

Ойын – дау-жанжал жағдайындағы математикалық модель.

Ойындар теориясы – дау-жанжал жағдайындағы тиімді шешімді қабылдайтын математикалық модельдеумен айналысатын амалдарды зерттеу теориясының бөлімі.

Ойынның жоғарғы құны (мәні) **немесе** ***минималды ұтысы (минимакс)*** – $\overline{v} = \min\limits_j \max\limits_i a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ формуласымен анықталады, мұндағы a_{ij} – ұтыс матрицасының элементтері, *А* ойыншының кез келген стратегиясындағы *В* ойыншының кепілденген ұтысы.

Ойынның мәні **немесе** ***таза құны*** – $v = \underline{v} = \overline{v}$ шамасы, яғни ойынның жоғарғы құны мен төменгі құны өзара тең мәні.

Ойынның құны – тиімді шешімге сәйкес ұтыс.

Ойынның төменгі құны (мәні) **немесе** ***максималды ұтысы (максимин)*** – $\underline{v} = \max\limits_i \min\limits_j a_{ij}$, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ формуласымен анықталады, мұндағы a_{ij} – ұтыс матрицасының элементтері. Бұл *В* ойыншының кез келген стратегиясындағы *А* ойыншының кепілденген ұтысы.

Ойыншылар – ойында мүдделі (қызығушылығы бар) жақтар.

Ойыншылардың тиімді стратегиялары – ойында $\underline{v} = \overline{v}$, яғни ойынның жоғарғы құны мен төменгі құны өзара беттескен жағдайдағы минимаксті және максиминді стратегиялар.

Ойыс функция – кез келген $X_1, X_2 \in M$ нүктелері және кез келген $\alpha \in [0, 1]$ саны үшін $F(\alpha X_1 + (1-\alpha)X_2) \geq \alpha F(X_1) + (1-\alpha)F(X_2)$ теңсіздігі орындалған жағдайдағы n-өлшемді кеңістіктің M дөңес жиынында анықталған $F(X)=F(x_1, x_2, ..., x_n)$ функция.

Оқиға – жобаның орындалуының жеке кезеңін бейнелейтін қандай да бір үрдістің аяқталу мерзімі.

Оқиғалар ағыны – уақыттың қандай да бір кездейсоқ мезгілінде бір бірінің артынан орналасқан біртекті оқиғалар тізбегі.

Оқиғалардың стационар ағыны – оқиғалар ағынының ықтималдық сипаты уақыттан тәуелсіз ағын.

Оқиғалардың тұрақты ағыны – оқиғалар бір бірінің артынан бірдей уақыт аралығында орындалатын оқиғалар ағыны.

Өте қарапайым характеристикалық функция – қарапайым u характеристикалық функциясында тек қана бекітілген бос емес R коалициялары ғана ұтушы болып табылатын жағдайдағы характеристикалық функция.

Өтініштердің (талаптардың) кездейсоқ ағыны – жаппай қызмет көрсету жүйесінде негізінен өтініштер тұрақты емес кездейсоқ түсуі.

Парето бойынша тиімді – барлық $i \in N$ үшін $H_i(x) \geq H_i(\bar{x})$ және кем дегенде бір $i_0 \in N$ үшін $H_{i_0}(x) > H_{i_0}(\bar{x})$ теңсіздігі орындалатындай $x \in X$ жағдайы болмаса, коалициясыз Γ ойынындағы $\bar{x}$ жағдай.

Партия – бұтақ басынан кез келген соңғы позицияға дейінгі циклдық емес жол.

Позиция – ойынның жағдайы.

Позициялық ойындар – ойыншылар стратегияларын біртіндеп таңдайтын ойын. Позициялық формада оқиғалар тізбегі жақсырақ ашылады және ол көрнекті болып келеді. Ойыншылар уақыт бойынша өзгеріп отыратын жағдайда шешімді біртіндеп қабылдау үрдісін модельдейтін коалициясыз ойын.

Позициялық ойынды қалыптастыру – позициялық ойынды ойынның қалыпты түрінде жазу.

Потенциал (берілген жолдың немесе бағанның) – тасымалдау есебіндегі белгіленген жолдың (бағанның) шығындар коэффициентіне қосылған қандай да бір сан.

Реттелген желілік графика – кез келген жұмыс үшін оның алдындағы оқиға солға қарай орналасқан және осы жұмысты аяқтаушы оқиғамен салыстырғанда нөмірі кіші болуы керек.

С-ядро – (N, u) кооперативті ойынының доминацияланбайтын бөлістер жиыны.

Салыстырмалы өткізу қабілеттілігі – жүйе қызмет көрсететін қабылданған өтініштердің орташа үлесі.

Салыстырмалы приоритет – маңызды өтініш кезектегі «жақсырақ» орынға жылжытылады.

Симплекс – n төбесі бар n-өлшемді дөңес көпжақ.

Симметриялы матрица – квадраттық матрица элементтері үшін $a_{ij} = a_{ji}$, $i, j = 1, 2, ..., n$, қатынастары орындалатын матрица.

Симметриялы ойын – ұтыс матрицасы қиғаш симметриялы матрицалық ойын.

«Солтүстік-батыс» бұрыш әдісі **немесе** ***диагональ әдісі*** – тасымалдау есебінің алғашқы базистік шешімді табу әдісінің бірі. Кестенің жоғарғы сол жақ торынан («солтүстік-батыс» бұрышы) бастап толтырылады.

Статикалық модельдер – барлық параметрлердің мәндерін уақыттың бір квантына (мезгілге немесе аралыққа) жатқызатын модельдер.

Стандартты немесе симметриялы программалау есебі – барлық айнымалылары теріс еместік шартты қанағаттандыратын және шектеулер жүйесі тек қана теңсіздіктерден тұратын сызықтық программалау есебі.

Стационар **немесе** ***күдікті нүктесі*** – $\nabla f(Y) = 0$ шартын қанағаттандыратын Y нүктесі.

Стохастикалық модельдер – зерттелетін көрсеткіштерге кездейсоқ әсердің болуы мүмкін және ықтималдықтар теориясы мен математикалық статистиканың ортасын пайдалануға болатын модельдер.

Стратегия – пайда болған жағдайға тәуелді ойыншының жүрісін таңдауды бірмәнді анықтайтын ережелер жүйесі.

Сыншыл жол – осы жолдағы жұмыстардың орындалуының ең көп ұзақтығымен сипатталатын бастапқы оқиғадан аяқтайтын оқиғаға дейінгі жол.

Сэвидж критерийі – стратегияларды таңдаған кезде едәуір артық шығынға әкелуі мүмкін стратегияларды таңдауға жол бермеу болып табылады.

Табиғатпен ойын – ойындарға келтірілетін кейбір есептерде белгілі бір амал орындалатын жағдай туралы ақпараттың болмауына әсер ететін мәселе анықталмағандық болып табылатын жағдайлар басқа ойыншының біліп отырып орындаған әрекетінен тәуелсіз, ал нақтылықтан тәуелді болатын ойындар.

Таза стратегия – кез келген жағдайға нақты таңдау сәйкес қойылған ойыншының әрбір бекітілген стратегиясы немесе ойында ойыншының кез келген мүмкін болатын әрекеті.

Таза стратегиядағы ойынның дербес шешімі – қандай да бір A_i және B_j таза стратегиялар жұбы мен ойынның v құнының жиынтығы.

Таза стратегиядағы ойынның толық шешімі – A және B ойыншыларының таза тиімді стратегиялар жиыны мен ойынның v құнынан тұратын – $\{S_A^{CO}, S_B^{CO}, \boldsymbol{v}\}$ жиынтығы.

Тактика – ойыншы ойында нақты жүрісті сол жүріс барысында ғана таңдауға шешім қабылдайды.

Тездетіп түсу әдісі – функцияның ΔZ өсімшесі x_k нүктесінен x_{k+1} нүктесіне өткен кезде ең үлкен ($Z_{\max}$) немесе ең кіші ($Z_{\min}$) болатындай λ_k таңдалынатын градиенттік әдіс.

Теориялық модельдер – қарастырылатын экономикалық жүйелердің жалпы заңдылықтары мен қасиеттерін оқып білуге арналған.

Теориялық-ойындық модельдер – стохастикалық дәрежеге қарағанда анықталмағандық дәрежесі жоғары факторлардың әсерін ескереді.

Тепе-теңдік стратегия – $x_i^* \in X_i$ стратегиясы Нэш бойынша тепе-теңдік жағдайдың кем дегенде біреуіне енгендегі x_i^* стратегиясы.

Тиімді стратегия – ойын бірнеше рет қайталанғанда ойыншыға барынша көп мүмкін болатын орташа ұтысқа (немесе барынша аз мүмкін болатын орташа ұтылысқа пара-пар) кепілдік беретін стратегия.

Тиімді шешім – тиімді стратегиялардың жиынтығы.

Толық ақпаратты ойын – әрбір ойыншының толық ақпараты бар ойын. Әрбір ойыншы өзінің жүрісінде бұтақтың қандай позициясында екенін біледі, яғни толық ақпаратты ойында әрбір ойыншы басқа ойыншылардың таңдаулары туралы біледі.

Толық ақпаратты ойыншы – ойыншының әрбір ақпараттық жиыны бұтақтың тек қана бір төбесін қамтиды.

Толық жол – бастапқы оқиғадан аяқтаушы оқиғаға дейінгі жұмыстардың орындалуының үзіліссіз тізбегі.

Толық емес ақпаратты ойындарда – жүретін ойыншы бұтақтың қандай позициясында екенін білмейді. Ойыншыға тек қана ақпараттық жиын – өзі тұрған позиция ғана емес, сонымен қатар өзі болуы мүмкін позицияларды қамтитын позициялардың кейбір жиындары белгілі болады.

Төңіректік максимум нүктесі – кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін $f(Y) \geq f(X)$ теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}\}$ шар бар болған жағдайдағы $f(X)$ функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Төңіректік минимум нүктесі – кез келген $X \in U_\varepsilon(Y)$ үшін $f(Y) \leq f(X)$ теңсіздігі орындалатындай $U_\varepsilon(Y) = \{X : \|X - Y\| \leq \boldsymbol{\varepsilon}\}$ шар бар болған жағдайдағы $f(X)$ функциясының $Y \in \Omega$ нүктесі.

Түзудің кесіндісі – a және b нүктелерін қосатын $\{x : x \in E^n,$ $x = ta + (1-t)b, t \in [0, 1]\}$ жиыны.

***Түйіндес бағыттар әдісінің* негізгі идеясы** $f(x)$ – функциясының минимум нүктесіне жуық $x^{(k+1)} = x^{(k)} - \boldsymbol{\alpha}_k p^{(k)}$, $k = 0, 1, \ldots$, $x^{(0)} \in R^n$ түрінде $\{x^{(k)}\}$ тізбегін құру.

Уақыт функциясы – Колмогоров теңдеуі жағдайлардың барлық ықтималдықтары.

Ұтушы коалиция – u характеристикалық функциясы қарапайым және $u(K) = 1$ мәнін қабылдайтын коалиция.

Ұтыс – дау-жанжал қорытындысы.

Ұтылушы коалиция – u характеристикалық функциясы қарапайым және $u(K) = 0$ мәнін қабылдайтын коалиция.

Үзіліссіз модельдер – уақыт үзіліссіз фактор ретінде қарастырылатын модельдер.

Үзіліссіз уақытты үрдіс – жағдайдан жағдайға өту жүйесінің мүмкін болатын мезгілі алдын ала бекітілмей, кездейсоқ болатын үрдіс.

Физикалық модельдеу – түпнұсқада пайда болатын физикалық-химиялық, технологиялық, биологиялық үрдістерді оқып білу үшін қолданылады.

Характеристикалық функция – коалициядан басқа барлық ойыншылардың әрекеттерінен тәуелсіз кепілдік беретін ұтыстың максималды шамасын көрсетеді.

Характеристикалық функция формасындағы ойын – $\Gamma = (N, u)$ жұбы, мұндағы N – ойыншылар жиыны, u – характеристикалық функция.

Цикл – бұл бір төбеден шығып сол төбеде аяқталатын ақырлы тізбек.

Шартсыз оңтайландыру есебі – $f(X)$ функциясының барлық төңіректік минимумын (максимумын) іздеу есебі.

Шепли аксиомалары – K – (N, u) ойынының кез келген тасуышы болса, онда $\sum_{i \in K} \varphi_i(u) = u(K)$; кез келген π ауыстыруы мен $i \in K$ үшін $\varphi_{\pi(i)}(\pi u) = \varphi_i(u)$; (N, u) және (N, v) екі кез келген кооперативті ойындар болса, онда $\varphi_i(u+v) = \varphi_i(u) + \varphi_i(v)$.

Штакельберг бойынша і-ші тепе-теңдік (екі қатысушысы бар Γ ойынында) – $(x_1, x_2) \in Z'$ және $\overline{H}_i = H_i(x_1, x_2) = \sup\limits_{(y_1, y_2) \in Z^j} H_i(y_1, y_2)$ теңдігі орындалса, онда $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ жағдайы, мұндағы $i = 1, 2$, $i \neq j$.

Экономикалық-математикалық модель – зерттелетін экономикалық үрдістің (нысанның) математикалық сипатталуы.

Экстремум нүктелері – $f(X)$ функциясының төңіректік минимум және максимум нүктелері.

Эрланг формулалары – шектік ықтималдықтарға арналған формулалар, жаппай қызмет көрсету теориясын қалаушы дат инженері, математик А.К. Эрлангтың (XIXғ. соңы – XXғ. басы) құрметімен аталған.

(0,1) - ***редуцирленген формадағы қарапайым*** (N, u) ***ойыны*** – кез келген $K \subset N$ үшін $u(K)$ – 0 және 1 мәндерінің біреуін ғана қабылдайтын ойын.

(0,1) - ***редуцирленген формамен берілген ойын*** – $u(i) = 0$, $i \in N$, $u(N) = 1$ қатынастары орындалған жағдайдағы u характеристикалық функциясы бар кооперативті ойын.

А ойыншының максиминді стратегиясы – максиминге сәйкес келетін стратегия, яғни $\underline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның жатық жолы.

A_i-ші стратегиясының тиімді көрсеткіші – $\alpha_i = \min\limits_{j=1,2,\dots,n} a_{ij}$, $i = 1, 2, \dots, m$ формуласымен анықталады, мұндағы a_{ij} – ұтыс матрицасының элементтері.

В ойыншының минимаксті стратегиясы – минимакске сәйкес келетін стратегия, яғни $\overline{v}$ санына сәйкес келетін матрицаның тік жолы.

B_j***-ші стратегиясының тиімді емес көрсеткіші*** – $\beta_j = \max_{i=1,2,\dots,m} a_{ij}$, $j = 1, 2, \dots, n$ формуласымен анықталады, мұндағы a_{ij} – ұтыс матрицасының элементтері.

mxn – ойыны – A ойыншының $(A_1, A_2, \dots, A_m)$ – m стратегиясы бар, B ойыншының $(B_1, B_2, \dots, B_n)$ – n стратегиясы бар ақырлы ойын.

i-ші оқиғаның орындалуының ерте (немесе күтілетін) мерзімі – осы оқиғаға дейінгі оқиғаның ең көп жолының ұзақтығымен анықталады.

i-ші оқиғаның орындалуының кеш мерзімі – $t_к(i) = t_{сын} - \max_{L_{i\,кж}} t(L_{i\,кж})$ формуламен есептелінеді, мұндағы $L_{i\,кж}$ – i-ші оқиғадан кейінгі кез келген жол.

i-ші оқиғаның R(i) уақыт қоры – оның орындалуының ерте және кеш мерзімдерінің айырымына тең:

i-ші жағдайдың ықтималдығы – t мезгілінде жүйе S_i жағдайында болатындығының $p_i(t)$ ықтималдығы.

(i, j) жұмыстың $t_{еб}(i, j)$ ***ерте мерзімде басталуы*** – бастапқы (алдындағы) i-ші оқиғаның орындалуының ерте мерзімімен беттеседі.

(i, j) жұмыстың $t_{еа}(i, j)$ ***ерте аяқталуы*** – $t_{еа}(i, j) = t_е(i) + t(i, j)$ формуласымен есептеледі.

(i, j) жұмыстың аяқталуының $t_{ка}(i, j)$ ***кеш мерзімі*** – $t_{ка}(i, j) = t_к(j)$ қатынасымен анықталады.

(i, j) жұмыстың басталуының $t_{кб}(i, j)$ ***кеш мерзімі*** – $t_{кб}(i, j) = t_к(j) - t(i, j)$ қатынасымен анықталады.

(i, j) жұмыс уақытының $R_{тол}(i, j)$ ***толық қоры*** – бұл жобаның жалпы мерзімін өзгертпей жұмыстың басталуын қанша уақытқа жылжытуға немесе ұзақтығын қанша уақытқа арттыруға болатынын көрсететін уакыт мөлшері.

(i, j) жұмыс уақытының тәуелсіз қоры – барлық алдындағы жұмыстар кеш мерзімде аяқталатындай, ал барлық келесі жұмыстар ерте мерзімде басталатындай жағдай үшін алынатын жұмыс уақытының толық қорының бөлігі.

(i, j) жұмысының қарбаластық коэффициенті K_k – жолдардың беттеспейтін бөліктерінің ұзақтығының қатынасы.

ӘДЕБИЕТТЕР

1. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Бакалавриат. 050111-Информатика. ҚР МЖМБС 3.08.261-2006. – Астана.: Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі. Ресми басылым. 2006.

2. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Бакалавриат. 5В011100-Информатика. ҚР МЖМБС 6.08.015-2009. – Астана.: Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі. Ресми басылым. 2009.

3. Қазақстан Республикасының мемлекеттік жалпыға міндетті білім беру стандарты. Магистратура. 6М011100-Информатика. ҚР МЖМБС 7.09.101-2009. – Астана.: Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігі. Ресми басылым. 2009.

4. Типтік оқу бағдарламалары. Жоғары кәсіптік білім. Бакалавриат. 050111 «Информатика» мамандығы. II-бөлім. – Алматы 2007.

5. *Айсагалиев С.А., Бияров Т.Н., Калимолдаев М.Н., Мамытбеков Е.К.* Задачи по методам оптимизации и вариационному исчислению.–Алматы: Қазақ университеті, 1996.

6. *Акулич И.Л.* Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986.

7. *Вентцель Е.С.* Исследование операций. Москва: Высшая школа, 2001.

8. *Гусманова Ф.Р.* Амалдарды зерттеу. Алматы, 2010.

9. *Гусманова Ф.Р.* Оңтайландыру әдістері. Алматы, 2007.

10. *Гусманова Ф.Р., Беркімбаева С.Б., Сақыпбекова М.Ж.* Оңтайландыру әдістерінен жаттығулар мен есептер. Алматы, 2007.

11. *Грицюк С.Н., Мирзоева Е.В., Лысенко В.В.* Математические методы и модели в экономике. Ростов-на-Дону: Феникс, 2007.

12. Исследование операций в экономике / Под ред. *Н.Ш.Кремера.* – Москва, ЮНИТИ, 2000.

13. Математические методы и модели исследования операций. / Под ред. *В.А. Колемаева.* – Москва, ЮНИТИ, 2008.

14. *Конюховский П.* Математические методы исследования операций в экономике. Санкт-Петербург: Питер, 2000.

15. *Корнеенко В.П.* Методы оптимизации. Москва «Высшая школа» 2007.

16. Қазақстан Республикасының Үкіметі жанындағы Мемлекеттік терминология комиссиясы бекіткен Қазақша-орысша Орысша-қазақша терминологиялық сөздік. Математика. Алматы: Республикалық мемлекеттік «Рауан» баспасы, 1999.

17. *Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О.* Игровые методы в управлении экономикой и бизнесом. Москва, издательство «Дело», 2001.

18. *Петросян Л.А.,Зенкович Н.А., Семина Е.А.* Теория игр. Москва, «ВШ», 1998.

19. *Протасов И.Д.* Теория игр и исследование операций. Москва, «Гелиос АРВ», 2003.

20. *Ракитин В.И., Первушин В.Е.* Практическое руководство по методам вычислений с приложением программ для персональных компьютеров. Москва, «Высшая школа», 1998.

21. *Таха Х.* Введение в исследование операций. В 2-томах. Мир, 1985.

22. *Фролькис В.А.* Введение в теорию и методы оптимизации для экономистов. Санкт-Петербург: Питер, 2002.

23. *Харчистов Б.Ф.* Методы оптимизации: Учебное пособие. – Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2004.

24. *Шикин Е.В.* Исследование операций. Москва, 2006.

25. Экономико-математическое методы и модели. Задачник: учебно-практическое пособие / кол. Авторов; под ред. *С.И. Макарова, С.А. Севастьяновой.* – М.: КНОРУС, 2008.

МАЗМҰНЫ

II - б ө л і м

СЫЗЫҚТЫҚ ЕМЕС ОҢТАЙЛАНДЫРУ ӘДІСТЕРІ

III - б ө л і м

ОЙЫНДАР ТЕОРИЯСЫ

Ф.Р. Гусманова

АМАЛДАРДЫ ЗЕРТТЕУДІҢ НЕГІЗДЕРІ

Оқулық

Басуға 18.10.2011 ж. қол қойылды. Пішімі 60х90$^{1}/_{16}$.
Офсеттік басылыс. Қаріп түрі «Times». Көлемі 29,5 б.т.
Таралымы 1200 дана. Тапсырыс № 1333.

Тапсырыс берушінің дайын файлдарынан басылып шықты.

ЖШС РПБК «Дәуір», 050009,
Алматы қаласы, Гагарин д-лы, 93а.
E-mail: rpik-dauir81@mail.ru

ГУСМАНОВА ФАРИДА РАВИЛЬҚЫЗЫ

Абай атындағы Қазақ ұлттық педагогикалық университеті физика-математика факультетінің қолданбалы информатика кафедрасының доценті, физика-математика ғылымдарының кандидаты.

1980 жылы Алматы қаласында Республикалық физика-математика мектебін бітірген. 1985 жылы С. М. Киров атындағы Қазақ ұлттық университетінің математика факультетін аяқтап, сол жылы жолдамамен Гурьев педагогикалық институтында жас маман ретінде жұмысқа қабылданды.

60-тан астам ғылыми-әдістемелік еңбектері, соның ішінде 1 монографиясы, 6 оқу құралы жарық көрді. 1996 жылы 01.01.11 – Жүйелі талдау және автоматтық басқару мамандығы бойынша физика-математика ғылымдарының кандидаты ғылыми дәрежесін алу мақсатында «Аутоматикалық басқарудағы сызықтық емес гидравликалық жүйелердің динамикасын зерттеу» тақырыбында диссертацияны сәтті қорғады.

«Информатика» мамандықтары үшін типтік бағдарламаны дайындау бойынша жұмыс тобының құрамында болды.

Қазіргі кезде Т. Рысқұлов атындағы Қазақ ұлттық экономикалық университетінің «Инженерлік-экономикалық» факультетінің деканы қызметін атқаруда.