ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ-517.956.223

Қолжазба құқығында

**Алимханов Шукур Фуркатович**

# КӨЛБЕУ ТУЫНДЫЛЫ КЕЙБІР ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МӘСЕЛЕЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

6М060100-МАТЕМАТИКА мамандығы бойынша математика ғылымдарының магистрі академиялық дәреже алу үшін магистрлік диссертация

ТҮРКІСТАН 2018

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ-517.956.223

Қолжазба құқығында

**Қорғауға жіберілді:**
Математика кафедрасының
меңгерушісі, техн.ғ.к,доцент м.а,
__________Қошанова М.Д.
«_____»_______________2018 ж.

**Магистрлік диссертация**

КӨЛБЕУ ТУЫНДЫЛЫ КЕЙБІР ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МӘСЕЛЕЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

мамандығы: 6М060100-МАТЕМАТИКА

Магистрант ______________________________Ш.Ф.Алимханов
(қолы) (аты-жөні, тегі)
Ғылыми жетекшісі,
физика-математика
ғылымдарының докторы
профессор _______________________________ Б.Х.Турметов
(қолы) (аты-жөні, тегі)

ТҮРКІСТАН 2018

**МАЗМҰНЫ**

## КІРІСПЕ

**Зерттеу тақырыбынының көкейтестілігі.** Физика және техниканың стационарлық процесстермен байланысты көптеген есептері эллипстік теңдеулер, атап айтқанда Лаплас және Пуассон теңдеулер арқылы сиппаталады. Қарастырылатын есептер қисынды қойылған болуы үшін оның шешімі бар, жалғыз және орнықты болуы қажет. Шешім жалғыз болуы үшін бұл есепетерге қосымша шарттар, мысалы үшін шекаралық шарттар қойылады. Бұл шарттар физикалық процестердің талабын қанағаттандыратын болып, олар Дирихле, Нейман және Робен (үшінші түрдегі) шекаралық шарттармен беріледі. Сондай-ақ, шекаралық шарттар көлбеу туындылы шарт немесе периодтты шарттармен берілуі де мүмкін. Бұл мәселелер туралы мәліметтерді [1-20]сияқты монография және шолу мақалаларынан көруге болады.

Соңғы жылдары эллипстік теңдеулер үшін дөңгелек аймақтарда қисынды қойылған есептердің жаңа түрі, периодтты шарттармен берілген есептерге қызығушылық арта түскен[21-40]. Мұндай шарттармен берілген есептер стационарлық процесстерде периодты шарттар берілген жағдайда туындайды.

**Нәтижелердің ғылыми жаңалығы**. Бұл бағытта негізгі нәтижелер шекаралық шартына нормал бағытта туынды қатысқан есептер үшін алынған. Көлбеу туынды қатысқан есептер үшінмұндай есептер басқа жұмыстарда қарастырылмаған.

**Жұмыстың мақсаты мен міндеті.** Лаплас теңдеуі үшін қисынды қойылған есептердің жаңа кластарын зерттеу. Негізгі міндеттеріне өтсек, спектралдық әдіс, интегралдық түрлендіру және де функционалдық әдістерді қолданып шекаралық шарттарында көлбеу туынды қатысқан периодты шарттармен берілген септердің шешімі бар, жалғыз болуы туралы теоремаларды дәлелдеу. Шешімнің интегралдық түрін алу.

**Зерттеу әдістері.** Бұл ғылыми жұмысты жүргізуде математикалық физика теңдеулері, математикалық талдау, функционалдық талдау, спектралдық әдіс, интегралдық теңдеулер әдістері қолданылады.

**Автордың жеке үлесі.** Есептердің қойылуы автордың ғылыми жетекшісіне тиісті. Теориялық есептеулер мен негізгі ғылыми қорытындылар, диссертанттың жан-жақты көлемді зерттеулері негізінде шығарылды. Алынған нәтижелер мен оларды өңдеу, материалдарды баспаға шығару және конференцияларда жасалған баяндамаларды дайындау жұмыстарын диссертант өзі орындады.

**Жұмыстың сынақтан өтуі.**Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша ХҚТУ-нің “Математика” кафедрасы ғылыми семинарында, 2017 жыл 10-12 апрел күндері Алматы қаласында болып өткен ғылыми-конференция жұмысында баяндамалар жасалынды.

**Жұмыстың жариялылығы.** Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша 1 ғылыми мақалажәне 1 конференция материалдарында тезис жарияланған.

**Диссертациялық жұмыстың көлемі мен құрылымы.** Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 2 тараудан, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Негізгі материал 63 бетпен берілген, 60 қолданылған әдебиеттер атаулары келтірілген.

**Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:**

Енді диссертациялық жұмыста қарастырылған есептерді баяндауға өтейік.

Айталық $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - бірлік шар, $n \geq 3, \partial\Omega$ - бірлік сфера болсын. Пуассон теңдеуі

$$\Delta u(x) = F(x), x \in \Omega, \tag{0.1}$$

үшін классикалық шеттік есептердің қойылымы төмендегіде болады:

1) Дирихле есебі

$$u(x) = g(x), x \in \partial\Omega \tag{0.2}$$

шекаралық шартымен;

2) Нейман есебі

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{0.3}$$

шекаралық шартымен,мұнда $\nu$ - $\partial\Omega$ сфераға сыртқы жүргізілген нормал векторы;

3) көлбеу туындылы шеттік есеп

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \ell} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{0.4}$$

шекаралық шартымен. Мұндағы $\ell$ $\nu$-нормал векторымен бағыттас болмаған вектор. Мысал үшін $\ell$ векторы $x_n$ өсімен бағыттас болған жағдайда, өзгешеленген шеттік есеп

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{0.5}$$

шекаралық шартымен.

Дирихле және Нейман есептері үшін негізгі нәтижелер (мысал үшін қараңыз, [17] ):

**Теорема 1.**Айталық $0 < \lambda, \lambda -$ бүтін емес, $F(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ болсын. Онда (0.1),(0.2) Дирихле есебінің шешімі бар, жалғызжәне $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ кеңістігіне тиісті болады.

**Теорема 2.**Айталық $0<\lambda, \lambda-$ бүтін емес, $F(x)\in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g(x)\in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ болсын. Онда (0.1),(0.3) Нейманесебінің шешімі бар болуы үшін

$$\int_{\Omega} F(x)dx=\int_{\partial\Omega} g(x)dS_x \tag{0.6}$$

шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті. Егер есептің шешімі бар болса ол тұрақты дәлдігінде жалғыз және $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ кеңістігіне тиісті болады.

(0.1),(0.5) түріндегі есеп біртекті теңдеу үшін, яғни $F(x)=0$болған жағдайда алғашқы рет [15]жұмыста зерттелінген. Бұл жұмыста (0.1),(0.5) есептің Нейман есебінен өзгешелігі көрсетіліп, онда бір текті есептің шешімі $\tilde{x}=(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ айнымалысына тәуелді болған, кез – келген гармониялық функция болатыны көрсетілген. Сол себептен бұл есеп бір мәнді шешілімді болуы үшін қандайда бір $S\subset\partial\Omega$ көпбейнелікте қосымша шарт берілуі қажет болады. Мысал үшін осындай шарт есебінде

$$u(x)\big|_S=0, \tag{0.7}$$

шартты қарастыруға болады. Мұнда$S=\{\tilde{x}\in R^{n-1}:|\tilde{x}|=1\}$. Осындайқосымша шарт берілсе, онда (0.1),(0.5) есеп бір мәнді шешілімді болады.

Диссертациялық жұмыста осы түрде берілген шеттік есептер зерттелінеді. Бұл сияқты есептердің екі түрдегі қойылымы қаратсырылады. Бұл есептердің шешімі бар және жалғыз болу шарттары айқындалады.

Бірінші түрдегі шартты периодты есепті ұарастырамыз

$\Omega$ облысында мынандай екі есепті қарастырамыз:

**1-Есеп.** $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ класында жататын және

$$-\Delta u(x)=0, x\in\Omega \tag{0.8}$$

$$u(x)-u(x^*)=\varphi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{0.9}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}+\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=\psi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{0.10}$$

$$u(x)=0, x\in S \tag{0.11}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

**2-Есеп**. $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ класында жататын, (0.8), (0.9) және

$$u(x)+u(x^*)=\varphi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{0.12}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=\psi\left(x\right), x\in\partial\Omega_+ \qquad (0.13)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

Екінші түрдегі шартты периодты есепті ұарастырамыз

$\Omega$ облысында мынандай екі есепті қарастырамыз:

**1-Есеп.** $u\left(x\right)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын және

$$\Delta u\left(x\right)=0, x\in\Omega, \qquad (0.14)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)=g(x), x\in\partial\Omega, \qquad (0.15)$$

$$u(\tilde{x})+u(\tilde{x}^*)=\varphi_0(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+, \qquad (0.16)$$

$$\frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial \nu}-\frac{\partial u(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}=\varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+, \qquad (0.17)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын. Мұнда $\nu$ - $S$ - сфераға сыртқы жүргiлiген нормал векторы.

**2-Есеп.** $u\left(x\right)\in C^2\left(\Omega\right)\cap C^1\left(\overline{\Omega}\right)$ класында жататын, (0.14), (0.15) және

$$u(\tilde{x})-u(\tilde{x}^*)=\varphi_0(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+, \qquad (0.18)$$

$$\frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial \nu}+\frac{\partial u(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}=\varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+, \qquad (0.19)$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

## АҢДАТПА

Бұл жұмыста Лаплас теңдеуі үшін қисынды қойылған периодты шартты шеттік есептердің жаңа класы қарастырылады. Көлбеу туындылы өзгешеленген шеттік есептер зерттеледі. Зерттелетін есептің шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденеді. Қарастырылатын есептердің шешімділігінің нақты шарттары және шешімнің Гельдер класындағы тегістігі зерттелінеді.

**Кілт сөздер:** Лаплас теңдеуі, өзгешеленген шеттік есеп, периодты шарттар, жалғыздығы, бар болуы, шешімділігі.

## АННОТАЦИЯ

В работе для уравнения Лапласа рассматривается новый класс корректных краевых задач с периодическими условиями. Изучаются вырождающейся краевые задачи с косой производной. Доказываются теоремы о существования и единственности решения исследуемых задач. Найдены точные условия разрешимости рассматриваемых задач и изучены гладкости решения в классах Гельдера.

**Ключевые слова:** уравнение Лапласа, вырождающейся краевая задача, периодические условия, единственность, существование, разрешимость.

## ÖZET

Makalede, Laplace denklemi için periyodik koşullarla iyi bir şekilde konumlandırılmış sınır değer problemlerinin yeni bir sınıfı düşünülmektedir. Biz, oblik türevlerle dejenere sınır değer problemlerini inceliyoruz. İncelenen problemlerin çözümünün varlığı ve tekliği hakkındaki teoremler kanıtlanmıştır. Ele alınan problemlerin çözülebilirliği için kesin koşullar bulunur ve Tutucu sınıflarındaki çözümün düzgünlüğü incelenir.

**Anahtar Kelimeler:** Laplace denklemi, dejenere sınır değer problemi, periyodik koşullar, teklik, varoluş, çözülebilirlik.

## ABSTRACT

In the paper, a new class of well-posed boundary-value problems with periodic conditions is considered for the Laplace equation. We study degenerate boundary value problems with oblique derivatives. Theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problems under study are proved. Exact conditions for the solvability of the problems under consideration are found and the smoothness of the solution in the Holder classes is studied.

**Keywords:** Laplace equation, degenerate boundary value problem, periodic conditions, uniqueness, existence, solvability.

# 1 КӨЛБЕУ ТУЫНДЫЛЫ ӨЗГЕШЕЛЕНГЕН ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІ ЗЕРТТЕУ

## 1.1 Пуассон теңдеуі үшін негізгі шеттік есептер туралы

Айталық $\Omega = \{x \in R^n : |x| < 1\}$ - бірлік шар, $n \geq 3, \partial\Omega$ - бірлік сфера болсын. Пуассон теңдеуі

$$\Delta u(x) = F(x), x \in \Omega, \tag{1.1.1}$$

үшін классикалық шеттік есептер:

1) Дирихле есебі

$$u(x) = g(x), x \in \partial\Omega \tag{1.1.2}$$

шекаралық шартымен;

2) Нейман есебі

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \nu} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{1.1.3}$$

шекаралық шартымен, мұнда $\nu$ - $\partial\Omega$ сфераға сыртқы жүргізілген нормал векторы;

3) көлбеу туындылы шеттік есеп

$$\frac{\partial u(x)}{\partial \ell} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{1.1.4}$$

шекаралық шартымен. Мұндағы $\ell$ $\nu$-нормал векторымен бағыттас болмаған вектор. Мысал үшін $\ell$ векторы $x_n$ өсімен бағыттас болған жағдайда, өзгешеленген шеттік есеп

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = g(x), x \in \partial\Omega \tag{1.1.5}$$

шекаралық шартымен.

Дирихле және Нейман есептері үшін негізгі нәтижелер (мысал үшін қараңыз, [1-Гилбарг-Трудингер] ):

**Теорема 1.1.1.** Айталық $0 < \lambda, \lambda -$ бүтін емес, $F(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ болсын. Онда (1.1.1),(1.1.2) Дирихле есебінің шешімі бар, жалғыз және $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ кеңістігіне тиісті болады.

**Теорема 1.1.2.** Айталық $0 < \lambda, \lambda -$ бүтін емес, $F(x) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega}), g(x) \in C^{\lambda+2}(\partial\Omega)$ болсын. Онда (1.1.1),(1.1.3) Нейман есебінің шешімі бар болуы үшін

$$\int_{\Omega} F(x)dx = \int_{\partial\Omega} g(x)dS_x \tag{1.1.6}$$

шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті. Егер есептің шешімі бар болса ол тұрақты дәлдігінде жалғыз және $C^{\lambda+2}(\overline{\Omega})$ кеңістігіне тиісті болады.

(1.1.1),(1.1.5) түріндегі есеп біртекті теңдеу үшін, яғни $F(x)=0$ болған жағдайда алғашқы рет [2-Бицадзе] жұмыста зерттелінген. Бұл жұмыста (1.1.1),(1.1.5) есептің Нейман есебінен өзгешелігі көрсетіліп, онда бір текті есептің шешімі $\tilde{x}=(x_1,x_2,...,x_{n-1})$ айнымалысына тәуелді болған, кез – келген гармониялық функция болатыны көрсетілген. Сол себептен бұл есеп бір мәнді шешілімді болуы үшін қандайда бір $S\subset\partial\Omega$ көпбейнелікте қосымша шарт берілуі қажет болады. Мысал үшін осындай шарт есебінде

$$u(x)\big|_S = 0, \tag{1.1.7}$$

шартты қарастыруға болады. Мұнда $S=\{\tilde{x}\in R^{n-1}:|\tilde{x}|=1\}$. Осындай қосымша шарт берілсе, онда (1.1.1),(1.1.5) есеп бір мәнді шешілімді болады.

Біз келесі бөлімде көлбеу туындылы осы түрдегі есепті жалпы жағдайда зерттейміз.

### 1.2 Көлбеу туындылы өзгешеленген шеттік есепті зерттеу

Айталық $\Omega_m\subset R^n$ облысында анықталған

$$\Omega_m=\left\{x\in R^n : x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+\left|x_n\right|^m<1\right\}, m>1,$$

шекарасы $\partial\Omega_m$ және экваторы $S=\left\{x\in\partial\Omega_m : x_n=0\right\}$ болатын біркелкі эллиптикалық оператор

$$A\left(x,D\right)=\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}+\sum_{j,k=1}^{n-1}a_{jk}\frac{\partial^2}{\partial x_j\partial x_k}+\sum_{k=1}^{n-1}b_k\frac{\partial}{\partial x_k}+c,$$

коэффициенттері $a_{jk},b_k,c\le 0$ тек қана $\left(x_1,x_2,...,x_{n-1}\right)$ ден тәуелді және жеткілікті тегіс.

Бұл жұмыста төмендегідей шеттік есеп қарастырылады:

$$A\left(x,D\right)u\left(x\right)=0, x\in\Omega_m, \tag{A}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}\left(x\right)=\varphi\left(x\right), x\in\Omega_m, \tag{B}$$

$$u(x)=0, x\in S. \qquad \text{(C)}$$

(A)-(C) теңдеуінің шешімі ретінде $C^2(\Omega_m)\cap C^1(\bar{\Omega}_m)$ класынан алынған, классикалық мағынада (A)-(C) шарттарын қанағаттандыратын функцияны айтамыз.

Көлбеу туындылы есепті $n$ - өлшемді кеңістікте $n\geq 3$ жағдайында туындайтын жанама жазықтықты дифференциалдау бағытын зерттеу А.В.Бицадзе [1] (қосымша [2]) және Р.Борреллидің [3] жұмыстарында басталған және [4,5] жұмыстарда жалғасын тапқан; ары қарай жалпы жағдайда [6-11] және басқада жұмыстарда жалғасын тапқан.

Бұл жұмыста (A)-(C) теңдеуінің шешімінің Гельдер класында $C^\lambda(\bar{\Omega}_m), \bar{\Omega}_m=\Omega_m+\partial\Omega_m$ тегістігі мәселесі қарастырылады.

Төмендегідей тұжырым дұрыс.

***Теорема 1.2.1.*** Айталық $\lambda>1-\dfrac{1}{m}$ болсын, мұндағы $\lambda+\dfrac{1}{m}$ бүтін емес. Кез – келген $\varphi\in C^\lambda(\partial\Omega_m)$ функциясы үшін (A)-(C) теңдеуінің шешімі бар болады және $C^{\lambda+\frac{1}{m}}(\bar{\Omega}_m)$ классына тиісті болады.

Теорема 1.2.1. – дің дәлелдеуі біртекті эллиптикалық теңдеудің шешімін шекара маңайындағы туындысын шекараға дейінгі қашықтыққа қатысты зерттеуге негізделген. Дирихле есебі үшін Грин функциясы туындысының бағалауы қолданылады.

Теорема 1.2.1. Б.Винцелдің [11] бір шешімінің нақтылануы болып табылады. Келесі теорема жоғарыда теорема 1.2.1.-де табылған тегістік көрсеткішін айқындайды.

***Теорема 1.2.2.*** Айталық $\lambda>0$ болсын, мұндағы $\lambda+\dfrac{1}{m}$ бүтін емес. Кез келген $\varepsilon>0$ мәнінде (A)-(C) есебінің шешімі $C^{\lambda+\frac{1}{m}+\varepsilon}(\bar{\Omega}_m)$ класына тиісті болмайтындай $\varphi\in C^\lambda(\partial\Omega_m)$ функциясы табылады.

Ескере кететін жағдай, егер $\lambda+\dfrac{1}{m}$ бүтін болса, онда теорема 1.2.1 тұжырымы дұрыс болмайды.

**Дирихле есебінің шешімін шекара маңында бағалау**

Бұл бөлімде дәлелденетін негізгі тұжырымдар, көмекші сипатқа ие және олар белгілі бір деңгейде танымал (см.[12,19]).

Айталық $\Omega$ - кез-келген $n$ - өлшемді дөңес облыс, $\partial\Omega$ - жеткілікті тегіс шекара болсын. Кез – келген $x\in\Omega$ нүктесі үшін $\partial\Omega$ нүктесін $\bar{x}$ символымен белгілейміз. Осылайша, кез – келген $x\in\Omega$ нүктесі және кез – келген $y\in\partial\Omega$ нүктесі үшін келесі теңсіздік орындалады

$$|x-\bar{x}|\leq|x-y|. \qquad (1.2.1)$$

Бұдан байқайтынымыз, шекараға жақын $x$ нүктелері үшін, $x-\bar{x}$ векторының бағыты $\bar{x}$ нүктесінде $\partial\Omega$ - ға бағытталған ішкі нормалдің бағытымен бағыттас.

Жеткілікті тегіс коэффициентті бірқалыпты эллиптикалық операторды $\Omega$ облысында қарастырайық

$$L(x,D)=\sum_{j,k=1}^{n} c_{jk}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k}+\sum_{j=1}^{n} c_j(x)\frac{\partial}{\partial x_j}+c(x), \tag{1.2.2}$$

$$c \le 0.$$

Айталық $G(x,\mathrm{y})$ - $L(x,D)$ операторы үшін Дирихле есебінің Грин функциясы:

$$L(x,D)G(x,\mathrm{y})=\delta(x-y), x\in\Omega, y\in\Omega,$$

$$G(x,\mathrm{y})=0, x\in\partial\Omega, y\in\Omega.$$

Айталық $x\in\Omega, y\in\partial\Omega$ үшін

$$P(x,\mathrm{y})=\frac{\partial G}{\partial \nu_y}(x,y), \tag{1.2.3}$$

мұндағы $\nu$ - конормал векторы. Онда

$$L(x,D)u(x)=0,$$

теңдеуінің шешімі болып табылатын кез – келген $u\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ функциясын келесі түрде жазуға болады

$$u(x)=\int_{\partial\Omega} P(x,y)u(y)ds(y). \tag{1.2.4}$$

Грин функциясының туындылары үшін келесі бағалау дұрыс (см.[14]):

$$\left|D_x^{\alpha}G(x,y)\right|\le C\left|x-y\right|^{2-n-|\alpha|}, \tag{1.2.5}$$

Мұндағы $\alpha$ - мультииндекс , ал $x$ және $y$ $\bar{\Omega}$ - дан алынған.

Бұл бағалаудың дербес жағдайы ретінде

$$\left|D_x^\alpha P(x,y)\right| \le C|x-y|^{1-n-|\alpha|}, x\in\Omega, y\in\partial\Omega \tag{1.2.6}$$

теңсіздігін аламыз.

Әрі қарай С символы – оң тұрақты ретінде қарастырылады, бірақ барлық жағдайда бірдей болуы шарт емес.

***Лемма 1.2.1.*** Айталық $Q(\mathrm{y},\mathrm{h})$ - функциясы $0<h<1$ аралығында анықталған және $y\in R^{n-1}$ және $|y|<1$ болғанда келесі шартты қанағаттандырады

$$\left|Q(y,h)\right| \le C\left(h+|y|\right)^{1-n-\mu}, \mu>0.$$

Айталық кез – келген шарда шектеусіз дифференциалданатын $\overline{B}_{n-1}=\{|y|\le 1\}$ функцияның $\varphi$ интегралы

$$\int\limits_{B_{n-1}} Q(\mathrm{y},\mathrm{h})\varphi(y)dy$$

$h$ - та шектелген. Бұдан, егер $0\le h<\mu$ болса, онда кез – келген $\varphi\in C^\lambda\left(\overline{B}_{n-1}\right)$ функциясы үшін

$$\left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(\mathrm{y},\mathrm{h})\varphi(y)dy\right| \le Ch^{\lambda-\mu}$$

теңсіздігі орындалады.

***Дәлелдеу:*** Айталық $0\le h<\mu$ және $\varphi\in C^\lambda\left(\overline{B}_{n-1}\right)$ болсын. Айталық

$$\psi(y)=\varphi(y)-\sum_{|\alpha|\le[\lambda]}\frac{D^\alpha\varphi(0)}{|\alpha|}y^\alpha.$$

Бұдан $|\psi(y)|\le C|y|^\lambda$ екендігі анық. Бұл жағдайда

$$\left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(\mathrm{y},\mathrm{h})\varphi(y)dy\right| \le \left|\int\limits_{B_{n-1}} Q(\mathrm{y},\mathrm{h})\psi(y)dy\right| + C \le$$

$$\le C\int\limits_{B_{n-1}}\left(h+|y|\right)^{1-n-\mu}|y|^\lambda dy + C \le Ch^{\lambda-\mu}$$

болады. Әрі қарай осы тараудың соңына дейін $u(x)$ - функциясы $C^2(\Omega)\cap C\left(\overline{\Omega}\right)$ тиісті деп болжаймыз.

***Лемма 1.2.2.*** Айталық $\lambda \geq 0$ және $|\alpha| > \lambda$ мұндағы $\alpha$ - мультииндекс. Айталық $L(x,D)u(x)=0, x \in \Omega$ болсын. Егер $u \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$ болса, онда

$$\left|D^{\alpha}u(x)\right| \leq C\left|x-\overline{x}\right|^{\lambda-|\alpha|}. \tag{1.2.7}$$

***Дәлелдеу:*** Жоғарыдағы (1.2.4) теңдігінен

$$D^{\alpha}u(x)=\int_{\partial\Omega} D^{\alpha}P(x,y)u(y)ds(y)$$

теңдігі келіп шығады.

Енді $\overline{x} \in \partial\Omega$ нүктесін белгілейміз және осы нүкте арқылы жазықтық жүргіземіз және $\partial\Omega$ жазықтығына жанама жүргіземіз.Енді жанама жазықтыққа проекциясы центрі $\overline{x}$ нүктесінде шеңбер құрайтын $\overline{x}$ нүктесінің $V \subset \partial\Omega$ маңайын қарастырамыз. Айталық $h=|x-\overline{x}|$ болсын және $Q(\mathrm{y},\mathrm{h})=D^{\alpha}P(x,\mathrm{y})$ функциясы лемма 1.2.1 –дің $\mu=|\alpha|$ болғандағы шартын қанағаттандыратынын көрсетеміз. Байқайтынымыз, төмендегі теңсіздіктерден

$$|x-\overline{x}| \leq |x-y|, x \in \Omega, y \in \partial\Omega,$$

$$|\overline{x}-y| \leq |\overline{x}-x|+|x-y| \leq 2|x-y|$$

келесі теңсіздік келіп шығады:

$$|x-\overline{x}|+|\overline{x}-y| \leq 3|x-y|.$$

Бұл теңсіздіктен және (1.2.6) теңсіздігінен келесі бағалауды аламыз

$$\left|D^{\alpha}P(x,y)\right| \leq C\left(h+|y-\overline{x}|\right)^{1-n-|\alpha|}, h=|x-\overline{x}|.$$

Соңында байқайтынымыз, егер $\varphi \in C^{\infty}(\partial\Omega)$ болса, онда

$$\left|\int_{\partial\Omega} D^{\alpha}P(x,y)\varphi(y)ds(y)\right| \leq C.$$

Осылайша, (1.2.7) бағалауын қажет ететін лемма 1.2.1 – ді қолдануға болады.

***Лемма 1.2.3.*** Айталық $0<\lambda<1$ болсын. Егер $|\nabla u| \leq C|x-\overline{x}|^{\lambda-1}$ болса, онда

$$\left|u(x)-u(\overline{x})\right| \leq C|x-\overline{x}|^{\lambda}$$

болады.

***Дәлелдеу:*** Айталық $h=|x-\overline{x}|, l=\frac{1}{h}(x-\overline{x})$ болсын. Онда

$$u(x)-u(\overline{x})=u(\overline{x}+hl)-u(\overline{x})=\int_0^h l\frac{\partial u}{\partial l}(\overline{x}+tl)dt\ .$$

Бұдан

$$|u(x)-u(\overline{x})|\le C\int_0^h t^{\lambda-1}dt=Ch^{\lambda}\ .$$

***Лемма 1.2.4.*** Айталық $0<\lambda<1$ болсын. Егер $|\nabla u(x)|\le C|x-\overline{x}|^{\lambda-1}$ болса, онда $u\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$ болады.

***Дәлелдеу:*** Айталық $\overline{x}$ және $\overline{y}$ - $\partial\Omega$- дан алынған кез – келген екі нүкте, $h=|\overline{x}-\overline{y}|$ болсын. Оларға сәйкес $x\in\Omega$ және $y\in\Omega$ нүктелерін келесі теңсіздік орындалатындай етіп таңдап аламыз

$$|x-\overline{x}|=|y-\overline{y}|=h.$$

Онда

$$|u(x)-u(y)|\le|\nabla u(\xi)||x-y|\le Ch^{\lambda-1}|x-y|\le Ch^{\lambda}.$$

Әрі қарай, лемма 1.2.3 бойынша

$$|u(x)-u(\overline{x})|\le Ch^{\lambda},|u(y)-u(\overline{y})|\le Ch^{\lambda}.$$

Бұдан, $|u(\overline{x})-u(\overline{y})|\le Ch^{\lambda}$.

***Лемма 1.2.5.*** Айталық $0<\lambda<1$ болсын. Егер $|\nabla u(x)|\le C|x-\overline{x}|^{\lambda-1}$ болса, онда $u\in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$ болады.

***Дәлелдеу:*** Айталық $x\in\Omega$, $y\in\Omega$ - $\partial\Omega$ және $|x-y|=h$ болсын. Онда

$$|u(x)-u(y)|\le Ch^{\lambda}$$

теңсіздігін дәлелдеу қажет болады.

Енді $|y-\overline{y}|\ge|x-\overline{x}|$ деп болжайық, яғни $y$ нүктесі $x$ - ке қарағанда шекарадан қашықта орналасқан. Екі жағдайды қарастырамыз.

1) $|x-\overline{x}|\ge h$. Бұл жағдайда $|u(x)-u(y)|\le|\nabla u(\xi)||x-y|\le Ch^{\lambda-1}|x-y|=Ch^{\lambda}$.

2) $|x-\bar{x}|<h$. Бұл жағдайда $|y-\bar{y}|\le|y-\bar{x}|\le|y-x|+|x-\bar{x}|\le 2h.$

Онда, лемма 1.2.3 бойынша

$$|u(x)-u(\bar{x})|\le Ch^{\lambda}, |u(y)-u(\bar{y})|\le Ch^{\lambda}.$$

Әрі қарай, лемма 1.2.4 бойынша

$$|u(\bar{x})-u(\bar{y})|\le C|\bar{x}-\bar{y}|\le Ch^{\lambda}.$$

Бұл жерден қажетті бағалау келіп шығады.

***Лемма 1.2.6.*** Айталық $0<\lambda<l$ болсын, мұндағы $l$ - натурал сан, ал $\lambda$ - бүтін емес. Айталық, кейбір $u\in C^{l}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$

$$\sum_{|\alpha|=l}|D^{\alpha}u(x)|\le C|x-\bar{x}|^{\lambda-l}. \qquad (1.2.8)$$

Онда $u(x)\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$.

***Дәлелдеу:*** Ең алдымен, егер (1.2.8) бағалауы орындалатын болса, онда кез – келген $\alpha$ мультииндексі үшін, мұндағы $\lambda<|\alpha|\le l$,

$$|D^{\alpha}u(x)|\le C|x-\bar{x}|^{\lambda-|\alpha|} \qquad (1.2.9)$$

теңсіздігі орындалады.

Расында да, егер $|\alpha|=l-1$ және $|\alpha|>\lambda$ болса, онда $[\bar{x},x]$ кесіндісі созындысында жататын $x_0\in\Omega$ нүктесін белгілеу арқылы,

$$|D^{\alpha}u(x)-D^{\alpha}u(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x}\frac{\partial}{\partial l}D^{\alpha}u(y)\,dl\right|\le C\int_{|x-\bar{x}|}^{1}t^{\lambda-1}dt\le C|x-\bar{x}|^{\lambda-l+1}$$

теңсіздігін аламыз.

Бұдан, кез – келген $\alpha$ үшін ұқсас (1.2.9) бағалауын аламыз, $\lambda<|\alpha|\le l$. Енді $|\alpha|=[\lambda]$ болатын еркіті $\alpha$ мультииндексін белгілейміз. Бұл $\alpha$ үшін (1.2.9) бағалауынан

$$|\nabla D^{\alpha}u(x)|\le C|x-\bar{x}|^{\lambda-|\alpha|-1}$$

Және $0<\lambda-|\alpha|<1$ болғандықтан, лемма 1.2.5 – ке сәйкес, $D^{\alpha}u\in C^{\lambda-|\alpha|}(\bar{\Omega})$. Яғни, осыдан, $u\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ дұрыс екенін көреміз.

***Лемма 1.2.7.*** Айталық $\lambda$ - бүтін емес оң сан болсын. Айталық $L(x,D)u(x)=0$ болсын. Егер $u\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$, онда $u\in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$.

***Дәлелдеу:*** Бұл лемманың дәлелдеуі лемма 1.2.2 және лемма 1.2.6 – дан келіп шығады.

Келесі төрт лемма

$$L(x,D)u(x)=f(x), x\in\Omega; u|_{\partial\Omega}=0 \tag{1.2.10}$$

есебі шешімінің шекара маңайындағы мәніне қатысты болады. Бұл шеттік есептің шешімі келесі түрде жазылады:

$$u(x)=\int_{\Omega}G(x,y)f(y)dy, \tag{1.2.11}$$

мұндағы $G(x,y)$ - $L(x,D)$ операторы үшін Дирихле есебінің Грин функциясы.

***Лемма 1.2.8.*** Айталық $x\in\Omega$, $\xi\in\Omega$ болсын. Онда

$$\int_{\Omega}\left|\nabla G(x,y)-\nabla G(\xi,y)\right|\le C|x-\xi|\ln\frac{C}{|x-\xi|}. \tag{1.2.12}$$

***Дәлелдеу:*** Айталық $h=|x-\xi|$ және (1.2.12) теңсіздігінің сол жақ бөлігін екі интегралға бөліктейміз

$$\int_{\Omega}=\int_{|x-y|\le 2h}+\int_{|x-y|>2h}=I_1+I_2.$$

Алдымен $I_1$ - ді бағалайық:

$$I_1\le\int_{|x-y|\le 2h}\left|\nabla G(x,y)\right|dy+\int_{|x-y|\le 2h}\left|\nabla G(\xi,y)\right|dy.$$

Енді (1.2.5) бағалауының $|\alpha|=1$ болғандағы жағдайын қолдана отырып, келесі теңсіздікті аламыз

$$\int_{|x-y|\le 2h}\left|\nabla G(x,y)\right|dy\le C\int_{|x-y|\le 2h}|x-y|^{1-n}dy\le Ch.$$

Ендеше, $|\xi-y|\le|\xi-x|+|x-y|\le 3h$ болғандықтан, қайтадан (1.2.5) бағалауын қолдану арқылы, келесі теңсіздікті аламыз

$$\int_{|x-y|\le 2h}\left|\nabla G(\xi,y)\right|dy\le\int_{|\xi-y|\le 3h}\left|\nabla G(\xi,y)\right|dy\le C\int_{|\xi-y|\le 3h}|\xi-y|^{1-n}dy\le Ch.$$

Демек, $I_1 = O(h)$.

Енді $I_2$ - ні бағалайық. Лагранж формуласын қолдану арқылы,

$$\left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right| \le \sum_{|\alpha|=2} \left|D^{\alpha} G(z,y)\right| \left|x-\xi\right|$$

теңсіздігін аламыз, мұндағы $z$ - $[x,\xi]$ кесіндісінен алынған кейбір нүкте. Оң жағындағы қосындыға (1.2.5) теңсіздігін қолдану арқылы бағалауға болады. Нәтижесінде келесі теңсіздікті аламыз

$$\left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right| \le C\left|z-y\right|^{-n} h. \tag{1.2.13}$$

Ескерту, мұндағы $h = |x-\xi|$. Сондықтан $|x-y| \ge 2h$ теңсіздігінен $|\xi - y| \ge h$ теңсіздігі келіп шығады. Онда

$$h + |x-y| \le |\xi - z| + |z-y| + |x-z| + |z-y| = h + 2|z-y|.$$

Бұдан $|x-y| \le 2|z-y|$ және (1.2.13) теңсіздігінен келесі нәтижені аламыз

$$\left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right| \le C\left|x-y\right|^{-n} h.$$

Осылайша,

$$I_2 \le C \int_{|x-y|\ge 2h} |x-y|^{-n} h dy \le Ch \ln\frac{C}{h}.$$

Лемма 1.2.8 дәлелденді.

***Лемма 1.2.9.*** Айталық $h > 0$ және $0 < t < h$ болсын. Айталы $S_t = \left\{ y \in \Omega : |y - \overline{y}| = t \right\}$ болсын.

Осыдан, егер $|x - \overline{x}| \ge 2h$ болса, онда

$$\int_{S_t} \left|\nabla G(x,y)\right| ds(y) \le C \ln\frac{C}{h}.$$

***Дәлелдеу:*** Айталық $x \in \Omega$ және $|x - \overline{x}| \ge 2h$. $[x, \overline{x}]$ кесіндісінің $S_t$ жазықтығымен қиылысу нүктесін $x_t$ символымен белгілейміз. Бұл жерден кез – келген $y \in S_t$ нүктесі үшін келелсі теңсіздіктің орындалатыны анық

$$|x - x_t| \le |x - y|. \tag{1.2.14}$$

Бұдан,

$$\left|x_t - y\right| \le \left|x_t - x\right| + \left|x - y\right| \le 2\left|x - y\right| \qquad (1.2.15)$$

теңсіздігі келіп шығады.

Осылайша $\left|x - x_t\right| \le \left|x - \overline{x}\right| - \mathrm{t} \ge 2\mathrm{h} - t \ge \mathrm{h}$, онда (1.2.14) теңсіздігінен келесі нәтижені аламыз $h \le \left|x - y\right|$. Бұл теңсіздікті (1.2.15) теңсіздігіне қосу арқылы, келесі нәтижені аламыз

$$h + \left|x_t - y\right| \le 3\left|x - y\right|.$$

Бұл теңсіздіктен және $|\alpha| = 1$ болғандағы (1.2.5) бағалауынан

$$\left|\nabla G(x, y)\right| \le C\left|x - y\right|^{1-n} \le C\left(h + \left|x_t - y\right|\right)^{1-n}, y \in S_t$$

Бұдан,

$$\int\limits_{S_t} \left|\nabla G(x, y)\right| ds(y) \le C \int\limits_{S_t} \left(h + \left|x_t - y\right|\right)^{1-n} ds \le C \int\limits_0^1 (h + r)^{1-n} r^{n-2} dr \le C \ln \frac{C}{h}.$$

***Лемма 1.2.10.*** Айталық $0 < \mu < 1$ болсын. Айталық $U \in C\left(\overline{\Omega}\right)$ және кез – келген $x \in \Omega$ , $y \in \Omega$ үшін, $\left|x - \overline{x}\right| \ge \left|x - y\right|$, $\left|y - \overline{y}\right| \ge \left|x - y\right|$, келесі бағалау орындалсын

$$\left|u(x) - u(y)\right| \le C\left|x - y\right|^{\mu}.$$

Онда $u \in C^{\mu}\left(\overline{\Omega}\right)$.

***Дәлелдеу:*** Кез – келген $x \in \Omega$ нүктесі үшін

$$\left|u(x) - u(\overline{x})\right| \le C\left|x - \overline{x}\right|^{\mu}$$

теңсіздігі орындалатынын дәлелдесек жеткілікті.

Айталық $x_k = 2^{-k}\left(x - \overline{x}\right) + \overline{x}$ болсын. Онда $\left|x_k - x_{k+1}\right| = \left|x_{k+1} - \overline{x}\right|$, сондықтан

$$\left|u(x_k) - u(x_{k+1})\right| \le C\left|x_k - x_{k+1}\right|^{\mu} = C2^{-\mu k}\left|x - \overline{x}\right|^{\mu} \qquad (1.2.16)$$

Осылайша,

$$u(x)-u(\bar{x})=\sum_{k=0}^{\infty}\left[u(x_k)-u(x_{k+1})\right].$$

Бұл жағдайда, (1.2.16) бағалауын қолдану арқылы, келесі нәтижені аламыз

$$\left|u(x)-u(\bar{x})\right|\le C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|x-\bar{x}|^{\mu}}{2^{\mu k}}=C\,|x-\bar{x}|^{\mu}.$$

***Лемма 1.2.11.*** Айталық $0<\lambda<1$ болсын. Айталық $u(x)$

$$\left|f(x)\right|\le C\,|x-\bar{x}|^{\lambda-1} \tag{1.2.17}$$

шартын қанағаттандыратын, $f$ функциясымен (1.2.10) есебінің шешімі болсын.

Онда кез – келген $\mu<\lambda$ функция және $C^{1+\mu}(\bar{\Omega})$ класына тиісті.

***Дәлелдеу:*** Айталық $x$ және $\xi$ - $\Omega$ облысынан алынған еркіті екі нүкте болсын. Сонымен, $h\le|x-y|$ белгілейік және $|x-\bar{x}|\ge 2h$, $|\xi-\bar{\xi}|\ge 2h$ деп болжайық. Егер келесі теңсіздіктің дұрыс екенін дәлелдесек

$$\left|\nabla u(x)-\nabla u(\xi)\right|\le Ch^{\lambda}\ln\frac{1}{h}, \tag{1.2.18}$$

онда лемма 1.2.11 – дің тұжырымы лемма 1.2.10 – нан келіп шығады.

Сонымен, (1.2.18) бағалауын дәлелдеу жеткілікті. Ол үшін (1.2.11) теңдігінен пайдаланамыз. Бұл теңдіктен келесі нәтижені аламыз

$$\nabla u(x)-\nabla u(\xi)=\int_{\Omega}\left[\nabla G(x,y)-\nabla G(\xi,y)\right]f(y)\,dy.$$

Осылайша,

$$\left|\nabla u(x)-\nabla u(\xi)\right|\le\int_{\Omega}\left|\nabla G(x,y)-\nabla G(\xi,y)\right|\cdot\left|f(y)\right|dy.$$

Бұл интегралды бағалау үшін, $\Omega$ облысын екі бөлікке бөлеміз:

$$\Omega_1=\left\{y\in\Omega:|y-\bar{y}|\ge h\right\},$$

$$\Omega_2=\left\{y\in\Omega:|y-\bar{y}|<h\right\}.$$

Алдымен, интегралды $\Omega_1$ жиыны бойынша бағалаймыз. Сонымен, (1.2.17) шартын және лемма 1.2.18 – ді қолдана отырып, келесі бағалауды аламыз

$$\int_{\Omega_1} \left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right|\left|f(y)\right| dy \le Ch^{\lambda-1} \int_{\Omega} \left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right| dy \le$$

$$\le Ch^{\lambda-1} h \ln \frac{C}{h} = Ch \ln \frac{C}{h}.$$

Енді, интегралды $\Omega_2$ жиыны бойынша бағалаймыз. Қайтадан (1.2.17) шартын және лемма 1.2.19 – ды қолдана отырып, келесі бағалауды аламыз

$$\int_{\Omega_2} \left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right|\left|f(y)\right| dy \le \int_0^h dt \int_{S_t} \left|\nabla G(x,y) - \nabla G(\xi,y)\right|\left|f(y)\right| ds(y) \le$$

$$\le C\int_0^h t^{\lambda-1} dt \int_{S_t} \left(\left|\nabla G(x,y)\right| + \left|\nabla G(\xi,y)\right|\right) ds(y) \le C\int_0^h t^{\lambda-1} \ln \frac{1}{h} dt = Ch^{\lambda} \ln \frac{1}{h}.$$

Сонымен, Лемма 1.2.11 дәлелденді.

### 1.3 Көмекші теңсіздік

Алдыңғы бөлімде $\Omega_m$ арқылы

$$\Omega_m = \left\{ x \in R^n : x_1^2 + \ldots + x_{n-1}^2 + \left|x_n\right|^m < 1 \right\}, \tag{1.3.1}$$

облысын белгілеген болатынбыз.

Егер $x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ болса, онда $\tilde{x}$ символы арқылы $\tilde{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in R^{n-1}$ нүктесін белгілейміз. Бұл жағдайда $x = (\tilde{x}, x_n)$ белгілеуіде пайдаланылады. $\Omega_m$ облысының бұндай мәндерінде $\partial\Omega_m$ шекарасының теңдеуі келесі түрде болады:

$$\partial\Omega_m = \left\{ x \in R^n : \left|\tilde{x}\right|^2 + \left|x_n\right|^m = 1 \right\}. \tag{1.3.2}$$

Кез – келген $x \in \Omega_m$ нүктесі үшін $\tilde{x}$ символын, алдыңғы бөлімдегідей $\Omega_m$ облысының $\partial\Omega_m$ шекарасындағы $x$ мәніне ең жақын нүкте ретінде қарастырамыз.

***Лемма 1.3.1.*** Кез – келген $x \in \Omega_m$ нүктесі үшін келесі теңсіздік орынды

$$C_1\left|x - \bar{x}\right| \le 1 - \left|x_n\right|^m - \left|\tilde{x}\right|^2 \le C_2\left|x - \bar{x}\right|. \tag{1.3.3}$$

***Дәлелдеу:*** Кез –келген $x \in \Omega_m$ нүктесін белгілейміз және кез –келге $y \in \partial\Omega_m$ нүктесін қарастырамыз. Сонымен (1.3.2) теңдеуіне сәйкес, $g(y) \equiv |\tilde{y}|^2 + |y_n|^m = 1$ болады. Онда

$$1 - g(x) = g(y) - g(x) = \nabla g(\xi)(y - x).$$

Енді, $\nabla g$ шектеулі болғандықтан (1.3.3) теңсіздігінің оң жақ бөлігі келіп шығады.

Жоғарыдағы (1.3.3) теңсіздігінің сол жақ бөлігі үшін $x \in \Omega_m$ нүктелері үшін $g(x) \geq \frac{1}{2}$ теңсіздігін дәлелдеу жеткілікті. Яғни, бұл шарт бойынша

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{x}{|x|}\nabla g(x) = \frac{1}{|x|}\left(2|\tilde{x}|^2 + m|x_n|^m\right) \geq \frac{g(x)}{|x|} \geq C_0.$$

Бұл жағдайда, $x$ - пен бірдей бағытталған $y \in \partial\Omega_m$ нүктесін алып, келесі нәтижені аламыз

$$1 - g(x) = \nabla g(\xi)(y - x) = |y - x|\frac{\partial g}{\partial x}(\xi) \geq C_0|y - x| \geq C_0|\overline{x} - x|.$$

***Лемма 1.3.2.*** Айталық $0 < x^m < a, \mu > \frac{1}{m}$ болсын. Онда

$$I_\mu(a) \equiv \int_0^x \left(a - t^m\right)^{-\mu} dt \leq C_{m,\mu}\left(a - x^m\right)^{-\mu + \frac{1}{m}} \tag{1.3.4}$$

мұндағы $C_{m,\mu}$ - $a$ және $x$ - тен тәуелді емес.

***Дәлелдеу:*** Алдымен, $\mu > 1$ деп болжайық. Енді $\varepsilon = \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}}$ белгілейміз және екі жағдайды қарастырамыз.

1) Айталық $x \leq \varepsilon$ болсын. Онда

$$I_\mu(a) \leq \int_0^\varepsilon \left(a - t^m\right)^{-\mu} dt \leq \left(a - \varepsilon^m\right)^{-\mu}\varepsilon =$$

$$= \left(\frac{a + x^m}{2}\right)^{-\mu}\left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} \leq \left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{-\mu}\left(\frac{a - x^m}{2}\right)^{\frac{1}{m}} = C\left(a - x^m\right)^{-\mu + \frac{1}{m}}$$

2) Айталық, енді $x > \varepsilon$ болсын. Онда

$$I_\mu(a) = \int_0^\varepsilon + \int_\varepsilon^x \le C\left(a - x^m\right)^{-\mu+\frac{1}{m}} + \int_\varepsilon^x \left(a - t^m\right)^{-\mu} dt.$$

Соңғы интегралды келесі түрде бағалауға болады:

$$\int_\varepsilon^x \left(a - t^m\right)^{-\mu} dt \le \varepsilon^{1-m} \int_\varepsilon^x \left(a - t^m\right)^{-\mu} t^{m-1} dt < \frac{\varepsilon^{1-m}}{m(\mu-1)}\left(a - x^m\right)^{-\mu+1} = C\left(a - x^m\right)^{-\mu+\frac{1}{m}}.$$

Осылайша, $\mu > 1$ болғанда (1.3.4) бағалауы дәлелденді. Айталық, енді $\frac{1}{m} < \mu \le 1$ болсын. Осылайша белгіленген $x$ үшін $a \to \infty$ ұмтылғанда $I_\mu(a) \to 0$ ұмтылатындығы анық, онда

$$I_\mu(a) = -\int_a^\infty I'_\mu(s)\, ds.$$

Енді, $I'_\mu(s) = -\mu I_{\mu+1}(s)$ байқаймыз. Ендеше $\mu + 1 > 1$ болғандықтан, бұл жағдайда дәлелденген (1.3.4) бағалауын қолданып, келесі нәтижені аламыз

$$I_\mu(a) \le C\int_a^\infty \left(s - x^m\right)^{-\mu-1+\frac{1}{m}} ds = C\left(a - x^m\right)^{-\mu+\frac{1}{m}}.$$

***Лемма 1.3.3.*** Айталық $x = (\tilde{x}, x_n) \in \Omega_m$ және $x_t = (\tilde{x}, \mathrm{t}), 0 < t < x_n$. Айталық $\overline{x}_t$ және $\overline{x}$ - $\partial\Omega_m$ нүктелері, сәйкесінше $x_t$ және $x$ - ке сәйкес ең жақын нүктелер. Онда $\mu > \frac{1}{m}$ үшін

$$\int_0^{x_n} \left|x_t - \overline{x}_t\right|^{-\mu} dt \le C\left|x - \overline{x}\right|^{-\mu+\frac{1}{m}}. \tag{1.3.5}$$

***Дәлелдеу:*** Лемма 1.3.1 – ге сәйкес, $\left|x_t - \overline{x}_t\right| \le C\left(1 - \left|\tilde{x}\right|^2 - t^m\right)$. Сондықтан

$$\int_0^{x_n} \left|x_t - \overline{x}_t\right|^{-\mu} dt \le C\int_0^{x_n} \left(1 - \left|\tilde{x}\right|^2 - t^m\right)^{-\mu} dt.$$

Соңғы интегралға лемма 1.3.2 – нің $a = 1 - \left|\tilde{x}\right|^2$ мәнін қолданып, келесі нәтижені аламыз

$$\int_0^{x_n} |x_t - \overline{x}_t|^{-\mu} dt \le C\left(1 - |\tilde{x}|^2 - x_n^m\right)^{-\mu + \frac{1}{m}}.$$

Лемма 1.3.1 – ді тағы бір рет қолдану арқылы, қажетті (1.3.5) бағалауын аламыз.

### 1.4 Теорема 1.2.1 дәлелдеуі

Айталық $\tilde{x} \in R^{n-1}$. $B_{n-1} = \left\{\tilde{x} \in R^{n-1}; |\tilde{x}| < 1\right\}$ шарында бірқалыпты эллиптикалық дифференциалдық операторын қарастырамыз

$$A_0(\tilde{x}, D) = \sum_{j,k=1}^{n-1} c_{jk}(\tilde{x}) \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_k} + \sum_{j=1}^{n-1} b_j(\tilde{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} + c(\tilde{x}). \tag{1.4.1}$$

Айталық $x = (\tilde{x}, x_n) \in R^n$ болсын. $\Omega_m \subset R^n$ облысында (1.3.1) қатынасы бойынша анықталатын эллиптикалық операторды қарастырамыз

$$A(x, D) = \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} + A_0(\tilde{x}, D). \tag{1.4.2}$$

Біздің мақсатымыз кіріспеде тұжырымдалған (A)-(C) есебін $\Omega_m$ облысында $A(x, D)$ операторы үшін зерттеу болып табылады.

А.В.Бицадзе (см. [2]) зерттей келе, Дирихле есебін қарастырамыз

$$A(x, D)\upsilon(x) = 0, x \in \Omega_m; \upsilon(x) = \varphi, x \in \partial\Omega_m. \tag{1.4.3}$$

(A)-(C) есебінің шешімін келесі түрде іздейміз:

$$u(x) = \int_0^{x_n} \upsilon(\tilde{x}, t) dt - \omega(\tilde{x}) \tag{1.4.4}$$

мұндағы $\omega(\tilde{x})$ функциясы анықталуға жатады. Берілген (1.4.4) теңдігінің оң жақ және сол жақ бөлігіне (1.4.2) операторын қолдану арқылы (4.4.3) есебінің көмегімен, келесі теңдікті аламыз.

$$A(x, D)u(x) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}(\tilde{x}, 0) - A_0(\tilde{x}, D)\omega(\tilde{x}).$$

Осылайша, $\omega(\tilde{x})$ үшін келесі шеттік есепті аламыз:

$$A_0\left(\tilde{x}, D\right)\omega\left(\tilde{x}\right) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}\left(\tilde{x}, 0\right), \left|\tilde{x}\right| < 1; \omega\Big|_{\left|\tilde{x}\right|=1} = 0. \qquad (1.4.5)$$

Айталық $\lambda$ - оң сан және $\lambda + \dfrac{1}{m}$ бүтін сан емес. Егер $\varphi \in C^{\lambda}\left(\partial\Omega_m\right)$ болса, онда (1.4.4) теңдігімен анықталған $u$ функциясы $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$ класына тиесілі болатынын дәлелдейміз.

Келесі функцияны енгіземіз

$$g\left(x\right) = \int\limits_0^{x_n} \upsilon\left(\tilde{x}, \mathrm{t}\right)dt. \qquad (1.4.6)$$

Енді $\left|\alpha\right| = \left[\lambda + \dfrac{1}{m}\right]$ - дан ерікті $\alpha = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right)$ мультииндексін таңдаймыз және

$$D^{\alpha}g \in C^{\lambda+\frac{1}{m}-\left|\alpha\right|}\left(\bar{\Omega}_m\right) \qquad (1.4.7)$$

болатынын дәлелдейміз.

Егер $\alpha_n > 0$ болса, онда $D^{\alpha}g = D^{\beta}\upsilon$ болатынын байқаймыз, мұндағы $\left|\beta\right| = \left|\alpha\right| - 1$. Лемма 1.2.6 – ға сәйкес, $\upsilon \in C^{\lambda}\left(\bar{\Omega}_m\right)$, сондықтан $D^{\beta}\upsilon \in C^{\lambda-\left|\alpha\right|+1}\left(\bar{\Omega}_m\right)$. Бұдан $D^{\alpha}g \in C^{\lambda+1-\left|\alpha\right|}\left(\bar{\Omega}_m\right)$ және нақтырақ $D^{\alpha}g \in C^{\lambda+\frac{1}{m}-\left|\alpha\right|}\left(\bar{\Omega}_m\right)$ келіп шығады.

Осылайша, (1.4.7) қосымшасын $\alpha$ үшін, $\alpha_n = 0$, дәлелдеу жеткілікті. (1.4.6) функция анықтамасындағы $\alpha$ үшін

$$D^{\alpha}g\left(x\right) = \int\limits_0^{x_n} D^{\alpha}\upsilon\left(\tilde{x}, \mathrm{t}\right)dt.$$

Осылайша, лемма 1.2.5 – ті қолдану арқылы, (1.4.7) қосымшасын келесі бағалаудан шығатынын көреміз:

$$\left|\nabla D^{\alpha}g\left(x\right)\right| \le C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda-\left|\alpha\right|+\frac{1}{m}-1}.$$

Бұл бағалауды дәлелдеу үшін келесі бағалауды алу жеткілікті

$$\left|\tilde{\nabla} D^{\alpha}g\left(x\right)\right| \le C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda-\left|\alpha\right|+\frac{1}{m}-1}. \qquad (1.4.8)$$

мұндағы $\tilde{\nabla}$ - $\tilde{x} = \left(x_1, x_2, ..., x_{n-1}\right)$ бойынша градиент. Осыдан,

$$\tilde{\nabla} D^{\alpha} g(x) = \int_{0}^{x_n} \tilde{\nabla} D^{\alpha} \upsilon(\tilde{x}, \mathrm{t}) dt. \tag{1.4.9}$$

Ендеше, $\varphi \in C^{\lambda}(\partial\Omega_m)$ болғанда (1.4.3) есебінің шешімі $\upsilon$ болады, онда лемма 1.2.2 – ге сәйкес

$$\left|\tilde{\nabla} D^{\alpha} \upsilon(x)\right| \leq C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda - |\alpha| - 1}. \tag{1.4.10}$$

Бізге $|\alpha| = \left[\lambda + \frac{1}{m}\right]$ екені белгілі, сондықтан $\lambda - |\alpha| - 1 < -\frac{1}{m}$.

Осылайша, лемма 1.3.3 – ті қолдануға болады. (1.4.9) теңдігінің оң жағындағы интегралды, лемма 1.3.3 және (1.4.10) теңсіздігінің көмегімен бағалап, келесі нәтижені аламыз

$$\left|\tilde{\nabla} D^{\alpha} g(x)\right| \leq C \int_{0}^{x_n} \left|x_t - \overline{x}_t\right|^{\lambda - |\alpha| - 1} dt \leq C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda - |\alpha| - 1 + \frac{1}{m}}.$$

Бұл (1.4.8) бағалауымен пара-пар, демек (1.4.7) қосымшасы дәлелденді. Осылайша, $g \in C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\overline{\Omega}_m)$.

Теорема 1.4.1 дәлелдеуін аяқтау үшін, (1.4.5) шеттік есебінің шешімі болатын $\omega$ функциясының $C^{\lambda + \frac{1}{m}}(\overline{\Omega}_m)$ класына тиісті болатынына көз жеткізу жеткілікті.

Егер $\lambda > 1$ болса, онда бұл тұжырым Шаудер (см.[15]) бағалауынан келіп шығады. Расында да, егер $\lambda$ бүтін емес және барлық жағдайда кез – келген $\lambda > 0$ және $\varepsilon > 0$ үшін $C^{\lambda - \varepsilon}(\overline{\Omega}_m)$ болса, онда $\upsilon \in C^{\lambda}(\overline{\Omega}_m)$ болады. Сондықтан $\frac{\partial \upsilon}{\partial x_n} \in C^{\lambda - 1 - \varepsilon}$. Осылайша, Шаудер бағалауынан $\omega \in C^{\lambda + 1 - \varepsilon}(\overline{B}^{n-1})$ нәтижесін аламыз.

Егер $0 \leq \lambda < 1$ болса, онда лемма 1.2.2 бойынша $\upsilon$ функциясы келесі бағауды қанағаттандырады

$$\left|\frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}(x)\right| \leq C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda - 1}$$

Бұл жағдайда да, $f(\tilde{x}) = \frac{\partial \upsilon}{\partial x_n}(\tilde{x}, 0)$ болғанда лемма .1.2.10 – ды қолдану арқылы, $\omega \in C^{\lambda + 1 - \varepsilon}(\overline{B}^{n-1})$ нәтижесін аламыз.

Осылайша, кез – келген $\varepsilon > 0$ үшін (1.4.5) есебінің шешімі $\lambda + 1 - \varepsilon$ көрсеткішті Гелдер класына тиісті. Егер $\varepsilon = 1 - \dfrac{1}{m}$ деп алсақ, онда бізге қажетті $\omega \in C^{\lambda + \frac{1}{m}}\left(\overline{\Omega}_m\right)$ қосымшасын аламыз. Теорема 1.4.1 дәлелденді.

## 1.5 Теорема 1.2.2 дәлелдеуі

Айталық $A_0\left(\tilde{x}, D\right)$ - (1.4.1) теңдігімен анықталған $B_{n-1} = \left\{\tilde{x} \in R^{n-1} : \left|\tilde{x}\right| < 1\right\}$ шеңберінде дифференциалданатын бірқалыпты эллиптикалық оператор болсын. Айталық $\psi$ функциясы - $\partial B_{n-1} = \left\{\tilde{x} : \left|\tilde{x}\right| = 1\right\}$ сферада анықталған және үздіксіз.

***Лемма 1.5.1.*** Айталық $\lambda > 0$ және $\lambda$ бүтін емес. Айталық $\upsilon \in C^2\left(B_{n-1}\right) \cap C\left(\overline{B}_{n-1}\right)$ функциясы

$$A_0\left(\tilde{x}, D\right)\upsilon\left(\tilde{x}\right) = 0, \tilde{x} \in B_{n-1}; \upsilon\big|_{\partial B_{n-1}} = \psi \qquad (1.5.1)$$

шеттік есебінің шешімі болсын.

Егер

$$u\left(x\right) = x_n \upsilon\left(\tilde{x}\right) \qquad (1.5.2)$$

Функциясы $C^{\lambda + \frac{1}{m}}\left(\overline{\Omega}_m\right)$ класына тиісті болса, онда $\psi \in C^{\lambda}\left(\partial B_{n-1}\right)$ болады.

***Дәлелдеу:*** Ең алдымен (1.5.2) теңдігімен анықталған $u$ функциясы $A\left(x, D\right)u\left(x\right) = 0$ теңдеуін қанағаттандыратынын байқаймыз, мұндағы $A\left(x, D\right)$ - (1.4.2) эллиптикалық операторы. Болжам бойынша $u \in C^{1 + \frac{1}{m}}\left(\overline{\Omega}_m\right)$, онда лемма 1.2.2 – ге сәйкес кез – келген $\alpha$ мультииндексі үшін $\left|\alpha\right| > \lambda + \dfrac{1}{m}$ келесі бағалау орындалады

$$\left|D^{\alpha}u\left(x\right)\right| \le C\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda + \frac{1}{m} - \left|\alpha\right|}. \qquad (1.5.3)$$

Егер $\alpha_n = 0$ болса, онда $D^{\alpha}u\left(x\right) = x_n D^{\alpha}\upsilon\left(\tilde{x}\right)$. Сондықтан, $\alpha_n = 0$ және $\left|\alpha\right| > \lambda + \dfrac{1}{m}$ болатын кез – келген $\alpha$ үшін (1.5.3) теңсіздігінен келесі бағауды аламыз

$$\left|D^{\alpha}\upsilon\left(\tilde{x}\right)\right| \le C\left|x_n\right|^{-1}\left|x - \overline{x}\right|^{\lambda + \frac{1}{m} - \left|\alpha\right|}. \qquad (1.5.4)$$

Айталық $\tilde{x}$ - $B_{n-1}$ - ден алынған еріктi нүкте. Ендеше,

$$x_n = \frac{1}{2}\left(1-|\tilde{x}|^2\right)^{\frac{1}{m}} \tag{1.5.5}$$

деп болжайық.

Онда $1-|\tilde{x}|^2-|x_n|^m=\left(1-|\tilde{x}|^2\right)\left(1-2^{-m}\right)$ болады.

Бұл теңсіздіктен және лемма (1.3.1) бойынша келесі теңсіздікті аламыз,

$$c_1|x-\overline{x}|\le 1-|\tilde{x}|^2\le c_2|x-\overline{x}|$$

бұл теңсіздік (1.5.5) шарты орындалғанда орынды болады. Егер (1.5.5) орындалса онда (1.5.4) теңсіздігінен келесі нәтижені аламыз

$$\left|D^{\alpha}\upsilon(\tilde{x})\right|\le C\left(1-|\tilde{x}|^2\right)^{\lambda-|\alpha|}$$

бұл теңсіздік $x_n$ - нен тәуелді емес және кез – келген $\tilde{x}\in B_{n-1}$ үшін дұрыс. Лемма 1.2.6 – ға сәйкес бұл теңсіздіктен $\upsilon\in C^{\lambda}\left(\overline{B}_{n-1}\right)$ белгілі болады. Лемма 1.5.1 дәлелденді. Лемма 1.5.1 – ден тікелей теорема 2 келіп шығады. Расында да, (1.5.1) есебінің шешімі $C^{\lambda}\left(\overline{B}_{n-1}\right)$ тәуелді болатын және $\psi\notin C^{\lambda+\varepsilon}\left(\partial B_{n-1}\right),\varepsilon>0$ болатындай $\psi\in C^{\lambda}\left(\partial B_{n-1}\right)$ функциясын таңдап аламыз. Онда (1.5.2) функциясы теорема 1.5.2 – нің барлық шарттарын қанағаттандырады.

Қорытындылай келе, теорема 1.5.2 – нің бекітілуінде қамтылған $\lambda+\frac{1}{m}$ - нің бүтін саннан айырмашылығы маңызды болып табылатынын айрықша атап өтеміз. Бұл төменде дәлелденетін леммадан келіп шығады.

$R^{n-1}$ - ге сфералық $\tilde{x}=(r,\theta)$ координаталарын енгіземіз, мұндағы $r=|\tilde{x}|$, ал $\theta$ - сфералық бұрыш. $D_{\theta}$ символы арқылы $\theta$ бұрышының градиент векторын белгілейміз.

***Лемма 1.5.2.*** Айталық $l$ натурал сан және $\upsilon$ - (1.5.1) есебінің шешімі болсын. Егер $u(x)=x_n\upsilon(\tilde{x})$ функциясы $C^{l}\left(\overline{\Omega}_m\right)$ класына тиісті болса, онда $|\alpha|=l-1$ болатын кез – келген $\alpha$ мультииндексі үшін келесі теңдік орынды

$$D_{\theta}^{\alpha}\psi(\tilde{x})-D_{\theta}^{\alpha}\psi(\tilde{y})=o(1)|\tilde{x}-\tilde{y}|^{1-\frac{1}{m}}. \tag{1.5.6}$$

***Дәлелдеу:*** Айталық $\alpha$ - $|\alpha|=l-1$ болатын ерікті мультииндекс болсын. Шарт бойынша $\nabla D^{\alpha}u\in C\left(\overline{\Omega}_m\right)$. Лемма 1.5.1 – де белгілегеніміздей, $\tilde{\nabla}$ символымен $\tilde{x}$ бойынша градиентті белгілейміз. Егер $\alpha_n=0$ болса, онда $\tilde{\nabla}D^{\alpha}u(x)=x_n\tilde{\nabla}D^{\alpha}\upsilon(\tilde{x})$ және бұл функцияның үздіксіздігінен

$$x_n \tilde{\nabla} D^{\alpha} \upsilon(\tilde{x}) = o(1), |\tilde{x}| \to 1 \qquad (1.5.7)$$

теңдігі шығады. (1.5.7) теңдігіне $x_n = \frac{1}{2}\left(1-|\tilde{x}|^2\right)^{\frac{1}{m}}$ қойсақ

$$\tilde{\nabla} D^{\alpha} \upsilon(\tilde{x}) = o(1)\left(1-|\tilde{x}|\right)^{-\frac{1}{m}}. \qquad (1.5.8)$$

Бұл теңдіктен келесі қатынастың шығатыны айқын

$$\tilde{\nabla} D_{\theta}^{\alpha} \upsilon(\tilde{x}) = o(1)\left(1-|\tilde{x}|\right)^{-\frac{1}{m}}$$

және $|\alpha| = l-1$ үшін дұрыс. Бұл жерден, 1.4.3 және 1.4.4 леммаларда қолданылған, қажетті (1.5.6) теңдігі толық түрде шығады.

***Салдар.*** Айталық $\lambda > 0$ және $\lambda + \frac{1}{m}$ бүтін емес болсын. (A)-(C) есебінің шешімі $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$ класына жатпайтындай, $\varphi \in C^{\lambda}\left(\partial\Omega_m\right)$ функциясы табылады.

Расында да, $|\alpha| = [\lambda]$ болғанда

$$D_{\theta}^{\alpha} \psi(\tilde{x}) - D_{\theta}^{\alpha} \psi(\tilde{y}) \neq o(1)|\tilde{x}-\tilde{y}|^{\lambda-|\alpha|}$$

болатындай, $\psi \in C^{\lambda}\left(\partial B_{n-1}\right)$ функциясын таңдаймыз.

Лемма 1.2.7 – ге сәйкес (1.5.1) есебінің шешімі болатын $\upsilon$ функциясы $C^{\lambda}\left(\bar{B}_{n-1}\right)$ класына тиісті, $\varphi = \upsilon$ болғанда (A)-(C) есебінің шешімі болатын $u(x) = x_n \upsilon(\tilde{x})$ функциясы $C^{\lambda+\frac{1}{m}}\left(\bar{\Omega}_m\right)$ класина тиісті емес.

## 1.6 Бірінші ретті көлбеу туындылы шеттік есептер

$\Omega = \{x \in R^n : \ |x| < 1\}$ бірлік шарда

$$\Delta u(x) = 0, \ x \in \Omega \qquad (1.6.1)$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l} = f(x), \ x \in \partial\Omega \qquad (1.6.2)$$

есепті қарастырамыз. Бұл жерде $l$ векторы

$$l = (x_1, x_2, ..., x_{n-1}, x_n - a), \ a \in R$$

түрінде анықталған.

Егер $\nu$ - $\partial\Omega$-ның сыртқы нормалы болса $\alpha(x)=(l,\nu)$ деп есептеп $\Gamma=\{x\in\partial\Omega:\alpha(x)=0\}$ жиынын қарастырамыз.

Егер $\Gamma\neq\varnothing$ болса (1.6.1), (1.6.2) есепке қосымша

$$u(x)=0,\ x\in\Gamma \tag{1.6.3}$$

шартта берілген деп есептейміз. $\alpha(x)$ функциясын анықтайық

$$(l,\nu)=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n(x_n-a)=x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2-ax_n=1-ax_n$$

Сонда $\alpha(x)=1-ax_n$, $\alpha(x)=0\Leftrightarrow x_n=\dfrac{1}{a}$.

Біздің жағдайда $x\in\partial\Omega$, яғни $x_1^2+\ldots+x_{n-1}^2+x_n^2=1$. Бұдан $\forall j=\overline{1,n}$ үшін $-1\le x_j\le 1$ теңсіздігі орынды болады.

Олай болса $x_n=\dfrac{1}{a}$ сфера нүктесі болуы үшін $-1\le\dfrac{1}{a}\le 1$ теңсіздігі немесе $|a|\ge 1$ болуы қажет.

Демек, $l=(x_1,x_2,\ldots,x_{n-1},x_n-a)$ векторы үшін $\alpha(x)=0$, яғни $l$ векторы $\tau$ векторымен бағыттас болуы үшін $|a|\ge 1$ болуы қажет.

Егерде $|a|<1$ болса, онда $(l,\nu)\neq 0$ және $\Gamma=\varnothing$ болады.

Демек, $|a|\ge 1$ болса (1.6.1), (1.6.2) шарттарға қосымша (1.6.3) шарттында қарастырамыз.

1). $|a|<1$ болсын және (1.6.1), (1.6.2) есептің шешімі бар дейік. Онда бұл функцияны $u(x)$ деп белгілесек

$$v(x)=x_1\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}+\ldots+x_{n-1}\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}+(x_n-a)\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \tag{1.6.4}$$

функциясын қарастыруға болады.

$v(x)$ функциясына $\Delta$-Лаплас операторының әсерін көрейік. Ол үшін $\dfrac{\partial v}{\partial x_j}$ және $\dfrac{\partial^2 v}{\partial x_j^2}$ туындыларды есептейміз:

$$\frac{\partial v}{\partial x_1}=x_1\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\frac{\partial u}{\partial x_1}+\sum_{j=2}^{n-1}x_j\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\partial x_1}+(x_n-a)\frac{\partial^2 u}{\partial x_n\partial x_1}$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_1^2}=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\sum_{j=2}^{n-1}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+(x_n-a)\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}$$

Осы сияқты қалған аргументтер бойынша

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=\sum_{j=1,j\neq i}^{n-1}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}+(x_n-a)\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2},\ i=2,n-1$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_n}=\sum_{j=1}^{n-1}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+(x_n-a)\frac{\partial}{\partial x_n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+2\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$$

Олай болса

$$\Delta v(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2 v}{\partial x_i^2}=x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2}+\ldots+x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}+\ldots$$

$$\ldots+(x_n-a)\frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}\right]+2\Delta u(x)=0$$

Сонымен $u(x)$-гармониялық функция болса $v(x)$ гармониялық функция болады. Есептің шарты бойынша

$$v(x)\big|_{\partial\Omega}=\frac{\partial u(x)}{\partial l}\bigg|_{\partial\Omega}=f(x)$$

Сонымен $v(x)$ функциясы

$$\Delta v(x)=0,\ x\in\Omega \tag{1.6.5}$$

$$v(x)\big|_{\partial\Omega}=f(x) \tag{1.6.6}$$

Дирихле есебінің шешімі болады. Егер $x\in\partial\Omega$, $|a|<1$ болса, онда

$$x_a=(0,0,\ldots,0,a)\in\Omega$$

нүктесінде (1.6.4) теңдіктің оң жағы 0 ге тең болады. Сонда $x=x_a$ нүктесінде

$$v(x_a)=0 \tag{1.6.7}$$

шарт орындалуы қажет.

Егер $f(x)\in C(\partial\Omega)$ болса (1.6.5), (1.6.6) шарттарды қанағаттандыратын жалғыз $v(x)$ функция бар және ол

$$v(x)=\frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|x|^2}{|x-y|^n}f(y)dS_y$$

Пуассон интегралымен өрнектеледі. Бұл функция (1.6.7) шарттыда қанағаттандыруы үшін

$$0 = v(x_a) = \frac{1}{\omega_n}\int_{\partial\Omega}\frac{1-|a|^2}{|x_a - y|^n} f(y)dS_y$$

теңдігі орындалуы қажет.

$$\left|x_a - y\right|^2 = (0-y_1)^2 + \ldots + (0-y_{n-1})^2 + (a-y_n)^2 = |\tilde{y}|^2 + (a-y_n)^2, \ \tilde{y} = (y_1, \ldots, y_{n-1})$$

теңдігін есепке алсақ

$$\int_{\partial\Omega}\frac{1-|a|^2}{\left[|\tilde{y}|^2 + (a-y_n)^2\right]^{\frac{n}{2}}} f(y)dS_y = 0 \qquad (1.6.8)$$

шарт келіп шығады.

Демек, $|a|<1$ болғанда (1.6.1), (1.6.2) есептің шешімі бар болса, онда (1.6.8) шарт орындалуы қажетті болады.

Енді осы шарт орындалғанда (1.6.1), (1.6.2) есептің шешімі бар болуында көрсетейік.

Егер $y_j = x_j,\ j = \overline{1, n-1};\ y_n = x_n - a$ түрлендіруін қарастырсақ онда $x_j = y_j,\ j = \overline{1, n-1};,\ x_n = y_n + a$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial l} = \sum_{j=1}^{n-1} x_j \frac{\partial u(x)}{\partial x_j} + (x_n - a)\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \sum_{j=1}^{n-1} y_j \frac{\partial u}{\partial y_j} + y_n \frac{\partial u}{\partial y_n}$$

Бұдан

$$v(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u}{\partial y_j}$$

теңдігін аламыз.

Егер $s \in [0,1]$ болса

$$v(y) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u(y)}{\partial y_j}$$

теңдігінен

$$v(sy) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u(sy)}{\partial y_j}$$

теңдігі келіп шығады.

Соңғы теңдіктің оң жағын төмендегідей түрлендіруге болады: $u = u(s \cdot y)$ функциясы үшін $\xi = s \cdot y$ десек

$$\frac{du(sy)}{ds} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial \xi_j} \frac{\partial \xi_j}{\partial s} = \left(\xi_j = sy_j\right) = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u(sy)}{\partial \xi_j} = \sum_{j=1}^{n} y_j \frac{\partial u(sy)}{\partial y_j}$$

Сонда

$$s \frac{du(sy)}{ds} = \sum_{j=1}^{n} sy_j \frac{\partial u(sy)}{\partial y_j}$$

Олай болса

$$v(sy) = \sum_{j=1}^{n} sy_j \frac{\partial u(sy)}{\partial y_j}$$

теңдігі

$$v(sy) = s \frac{\partial u}{\partial s}$$

теңдігіне эквивалент.

Соңғы теңдіктен $\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{v(sy)}{s}$ келіп шығады.

Бұл теңдікті $s$ бойынша [0,1] аралығында интегралдайық. Онда

$$\int_0^1 \frac{du(sy)}{ds} = \int_0^1 \frac{v(sy)}{s} ds,$$

$$\int_0^1 \frac{du(sy)}{ds} = u(y) - u(0), \; u(0) = C$$

Сонда

$$u(y) = C + \int_0^1 \frac{v(sy)}{s} ds$$

Егер $y_j = x_j$, $j = 1, n-1$, $y_n = x_n - a$ кері түрлендіруді орындасақ, онда

$$u(x_1,...,x_{n-1},x_n-a)=C+\int_0^1\frac{v(s\tilde{x},s(x_n-a))}{s}ds$$

теңдігін аламыз, $\tilde{x}=(x_1,...,x_{n-1})$.

Бұдан

$$u(x)=C+\int_0^1\frac{v(s\tilde{x},a+s(x_n-a))}{s}ds$$

Сонымен мына теорема дәлелденді

**Теорема 1.6.1** Егер $|a|<1,\ f\in C(\partial\Omega)$ болса онда (1.6.1), (1.6.2) есептің шешімі бар болуы үшін

$$\int_{\partial\Omega}\frac{1-|a|^2}{\left[|\tilde{y}|^2+(a-y_n)^2\right]^{\frac{n}{2}}}f(y)ds_y=0$$

теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

Егер (1.6.1), (1.6.2) есептің шешімі бар болса, ол тұрақты дәлдігінде жалғыз болады және

$$u(x)=\int_0^1\frac{v(s\tilde{x},a+s(x_n-a))}{s}ds$$

интеграл түрінде өрнектеледі.

Бұл жерде $v(x)$

$$\begin{cases}\Delta v(x)=0, & x\in\Omega\\ v(x)=f(x), & x\in\Omega\\ v(x_a)=0, & x_a=(0,0,...,0,a)\end{cases}$$

есебінің шешімі.

**Ескерту:** Егер $a=0$ болса, онда

$$\left.\frac{1-|a|^2}{\left[|\tilde{y}|^2+(a-y_n)^2\right]^{\frac{n}{2}}}\right|_{a=0}=\frac{1}{\left[|\tilde{y}|^2+(y_n)^2\right]^{\frac{n}{2}}}=1.$$

Бұдан (1.6.1), (1.6.2) есебінің шешімі бар болуы шарты

$$\int_{\partial\Omega} f(y)ds_y = 0$$

түрінде жазылады. Бұл Нейман есебінің шешімі бар болуы шартына сәйкес келеді.

# 2 БІРІНШІ ЖӘНЕ ЕКІНШІ ТҮРДЕГІ ПЕРИОДТЫ ШЕТТІК ЕСЕП

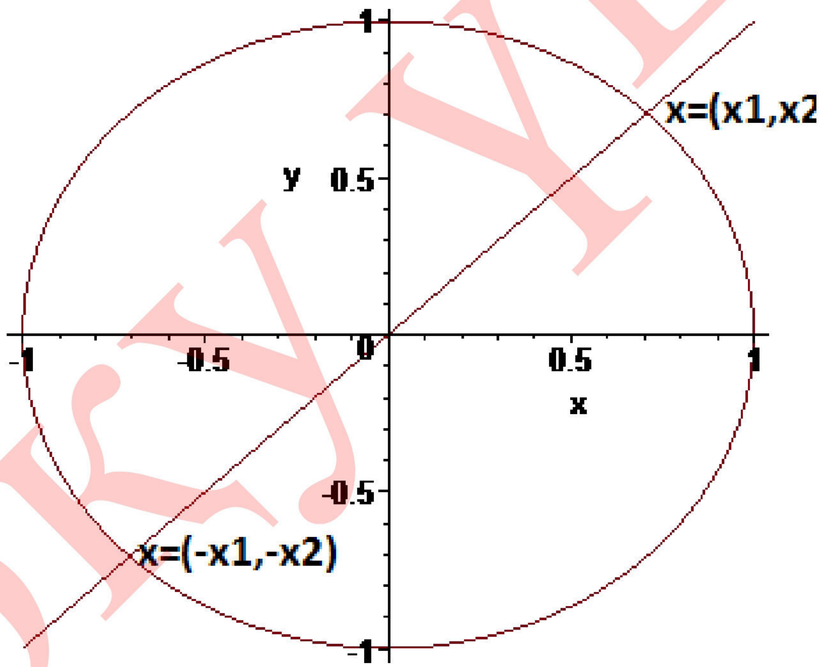
## 2.1 Бірінші түрдегі периодты шартты есеп

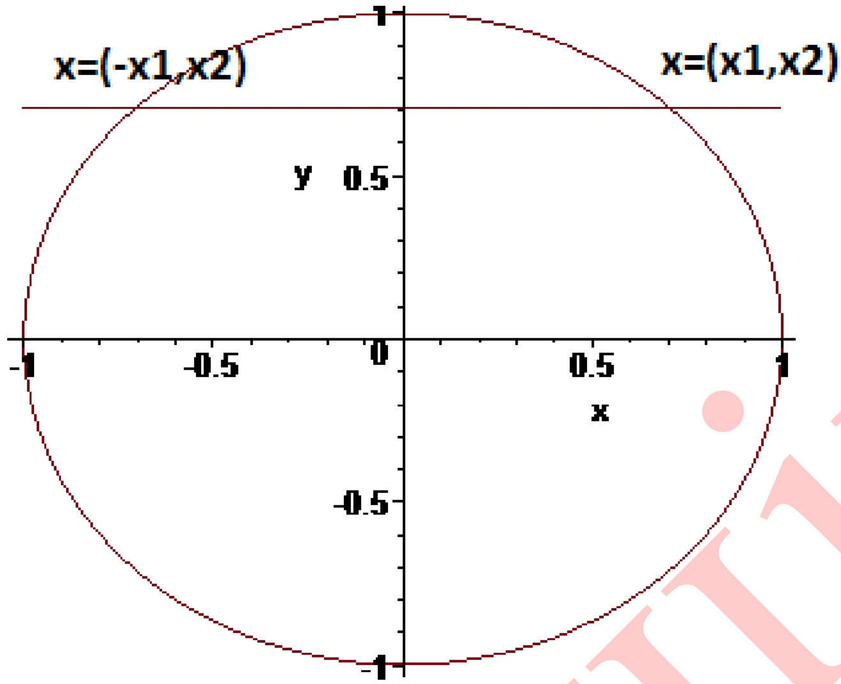
$\Omega = \left\{ x \in R^n : |x| < 1 \right\}$ - бірлік шар, $\partial\Omega = \left\{ x \in R^n : |x| = 1 \right\}$ - бірлік сфера болсын. $x_1$ бойынша сфераның жоғарыдағы жарты бөлігін $\partial\Omega_+ = \partial\Omega \cap \left\{ x \in R^n : x_1 \geq 1 \right\}$, ал төменгі жарты бөлігін $\partial\Omega_- = \partial\Omega \cap \left\{ x \in R^n : x_1 \leq 1 \right\}$ түрінде белгілейік. Сондай-ақ, $I = \partial\Omega \cap \left\{ x \in R^n : x_1 = 0 \right\}$ белгілеуінде енгізейік.

$\alpha_1 = -1, \alpha_2 = \pm 1, ..., \alpha_n = \pm 1$ сандары берілген деп есептеп, $\bar{\Omega}$ тұйық шардың әрбір $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \bar{\Omega}$ нүктесіне оған "қарсы" болған $x^* = (\alpha_1 x_1, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n,) \in \bar{\Omega}$ нүктесін сәйкес қоямыз.

Мысал үшін $n = 2$ болған жағдайда:

Егер $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = -1$ болса, онда $x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega_+$ нүктесіне $x = (-x_1, -x_2) \in \partial\Omega_-$ сәйкес келеді. Ал егерде $\alpha_1 = -1, \alpha_2 = 1$ болса, онда $x = (x_1, x_2) \in \partial\Omega_+$ нүктесіне $x = (-x_1, x_2) \in \partial\Omega_-$ сәйкес келеді.Бұл жағдайлар суретте төмендегідей болады:






$\bar{\Omega}$ тұйық шардың $x=(x_1,x_2,...,x_n)$ нүктелері үшін $|x|^2=x_1{}^2+x_2{}^2+...+x_n{}^2$, $r=|x|$ және $S=\{x\in\partial\Omega : x_n=0\}$ белгілеулерін енгізейік.

$\Omega$ облысында мынандай екі есепті қарастырамыз:

**1-Есеп.** $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ класында жататын және

$$-\Delta u(x)=0, x\in\Omega \tag{2.1.1}$$

$$u(x)-u(x^*)=\varphi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{2.1.2}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}+\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=\psi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{2.1.3}$$

$$u(x)=0, x\in S \tag{2.1.4}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

**2-Есеп**. $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega})$ класында жататын, (2.1.1), (2.1.4) және

$$u(x)+u(x^*)=\varphi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{2.1.5}$$

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=\psi(x), x\in\partial\Omega_+ \tag{2.1.6}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

Егер $x \in I$ болса, онда $x = (0, x_2, ..., x_n)$ және бұл нүктеге сәйкес келетін $x^*$ нүкте $x^* = (0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_n x_n)$ түрінде , яғни $I$ жиынына тиісті болады ( $x^* \in I$ ). Сол себептен, егерде ұзындығы $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ болатындай $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ мультииндекс үшін $u(x) \in C^{m+\lambda}(\bar{\Omega}), m = 1, 2, ..., 0 < \lambda < 1$ класына тиісті болуы үшін, яғни бірінші және екінші есептердің тегіс функциялар классына тиісті шешімінің бар болуы үшін келесі үйлесімділік шартарының орындалуы қажет екендігі белгілі:

$$\partial^\beta \varphi(\tilde{x}) = (-1)^k \partial^\beta \varphi(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in I, |\beta| \le m \tag{2.1.7}$$

$$\partial^\beta \psi(\tilde{x}) = (-1)^k \partial^\beta \psi(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in I, |\beta| \le m-1 \tag{2.1.8}$$

$$\varphi(x) = \psi(x), x \in S \cap I \Leftrightarrow \varphi(0, x_2, ..., x_{n-1}, 0) = \psi(0, x_2, ..., x_{n-1}, 0) \tag{2.1.9}$$

мұнда $\tilde{x} = (x_2, x_3, ..., x_n); \partial^\beta = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} ... \partial x_n^{\beta_n}}$.

Бұдан кейін кез келген жерде бұл шарттарды орындалады деп есептейміз.

Алдымен 1 және 2 есептердің шешімдері жалғыз болуы туралы теоремаларды баяндайық.

**Теорема 2.1.1.** Егер 1- есептің шешімі бар болса, онда бұл шешім жалғыз болады.

**Дәлелдеу.** Кері жорып, 1- есептің шешімі екеу болсын дейік. Оларды $u_1(x), u_2(x)$ және айырымын $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ деп белгілеп алайық. $u(x)$ функциясы қанағаттандыратын шарттарды анықтайық. Бұл функцияның $\Omega$ облысында гармониялық функция болатыны айқын.

Егер $x \in \partial\Omega_+$ болса, онда (2.1.2) шеттік шарттан

$$u(x) - u(x^*) = 0, x \in \partial\Omega_+$$

теңдік келіп шығады. Ал егерде $x \in \partial\Omega_-$ болса, онда $x^* \in \partial\Omega_+$, сол себептен тағыда (2.1.2) шеттік шарттан

$$u(x) - u(x^*) = -\left[u(x^*) - u(x)\right] = 0, x \in \partial\Omega_-$$

нәтижеге ие боламыз.

Осылайша, сфераның кез - келген $x \in \partial\Omega$ нүктелері үшін

$$u(x) - u(x^*) = 0, x \in \partial\Omega \tag{2.1.10}$$

Енді (2.1.3) шеттік шарттан пайдаланайық. Егер $x \in \partial\Omega_+$ болса, онда (2.1.3) шеттік шарттан

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega_+$$

Сол сияқты

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega_- .$$

Олай болса,

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega . \tag{2.1.11}$$

(2.1.10) шарт бойынша $u(x) = u(x^*), x \in \partial\Omega$. Онда $u(x)$ функция тегістігі $u(x) \in C^1(\bar{\Omega})$ болғандықтан $\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}, x \in \partial\Omega$. Бірақ, (2.1.11) шарттан $\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = -\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}, x \in \partial\Omega$. Соңғы екі шартты салыстырсақ, яғни

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = -\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}, x \in \partial\Omega .$$

Бұл шарттардың бір уақытта орынды болуы үшін шекара нүктелерінде

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega ,$$

болуы қажет. Сонымен $u(x)$ функциясы

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega; \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega ,$$

есебінің шешімі. Бұл есептің шешімі $B = \left\{x \in R^n : |\tilde{x}| < 1\right\}$ - $n-1$ өлшемді шарда гармониялық болатын $u(x) = w(\tilde{x})$ функция ға тең. Егер (2.1.7) шартты есепке алсақ, онда $u(x) = w(\tilde{x})$ функциясы

$$\Delta w(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in B, w(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in S$$

Дирихле есебінің шешімі болады. Дирихле есебінің шешімі жалғыз болуынан $w(\tilde{x})\equiv 0, \tilde{x}\in \bar{B} \Rightarrow u(x)=0, x\in \bar{\Omega}$.Сонымен, қарастырылып жатқан есептің шешімі екеу, яғни $u_1(x), u_2(x)$ функциялары болса, онда $u_1(x)\equiv u_2(x), x\in\bar{\Omega}$. Теорема дәлелденді.

**Теорема 2.1.2.** Егер 2 - есептің шешімі бар болса ол жалғыз болады.

**Дәлелдеу.** Алдынғы теорема сияқты 2- есептің шешіміде екеу болсын дейік. Оларды $u_1(x), u_2(x)$ деп есептеп, айырымын $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ түрінде белгілийк. $u(x)$ функциясы қанағаттандыратын шарттарды табайық. Бұл функцияда $\Omega$ облысында гармониялық функция болатыны айқын.

Егер $x\in\partial\Omega_+$ болса, онда (2.1.8) шекаралық шарттан

$$u(x)+u(x^*)=0, x\in\partial\Omega_+$$

нәтижеге ие боламыз. Егерде $x\in\partial\Omega_-$ болса, онда $x^*\in\partial\Omega_+$, сондықтан тағыда (2.1.8) шекаралық шарттан

$$u(x+u(x^*)=\left[u(x^*)-u(x)\right]=0, x\in\partial\Omega_-$$

нәтиже келіп шығады.

Сонда сфераның кез - келген $x\in\partial\Omega$ нүктелері үшін

$$u(x)+u(x^*)=0, x\in\partial\Omega.$$

Осы сияқты, егер $x\in\partial\Omega_+$ болса, онда (2.1.9) шекаралық шарттан

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=0, x\in\partial\Omega_+.$$

Екінші жақтан

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=-\left[\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right]=0, x\in\partial\Omega_-.$$

Сол себептен

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n}-\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}=0, x\in\partial\Omega.$$

Егер жоғарыда алынған $u(x)+u(x^*)=0, x\in\partial\Omega \Leftrightarrow u(x)=-u(x^*), x\in\partial\Omega$ және $u(x)\in C^1(\bar{\Omega})$ шарттарды есепке алсақ, онда сфераның $x\in\partial\Omega$ нүктелері үшін бір уақытта

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = -\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} \text{ және } \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}.$$

шарттар орынды болатынына көз жеткіземіз. Ал бұл шарттардың біріншісінен екіншісін алып тасатасақ, онда

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega,$$

теңдік келіп шығады. Сонымен $u(x)$ функциясы

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega; \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} = 0, x \in \partial\Omega,$$

есебінің шешімі. Бұл есептің шешімі $B = \left\{ x \in R^n : |\tilde{x}| < 1 \right\}$ - $n-1$ өлшемді шарда гармониялық болатын $u(x) = w(\tilde{x})$ функция ға тең. Егер (2.1.7) шартты есепке алсақ, онда $u(x) = w(\tilde{x})$ функциясы

$$\Delta w(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in B, w(\tilde{x}) = 0, \tilde{x} \in S$$

Дирихле есебінің шешімі болады. Дирихле есебінің шешімі жалғыз болуынан $w(\tilde{x}) \equiv 0, \tilde{x} \in \bar{B} \Rightarrow u(x) = 0, x \in \bar{\Omega}$. Сонымен біз қарастырған 2 - есептің шешімі екеу деп, яғни $u_1(x), u_2(x)$ деп есептесек, онда $u_1(x) \equiv u_2(x), x \in \bar{\Omega}$. Теорема дәлелденді.

Келесі теоремаларда 1 және 2 есептердің шешімдері бар болуы шарттары айқындалады.

**Теорема 2.1.3.** Егер $\lambda > \frac{1}{2}, \lambda -$ бүтін емес, $\varphi(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega_+)$, $\psi(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega_+)$ және (2.1.8) - (2.1.10) шарттар орындалса, онда 1,2– есептердің шешімдері бар, жалғыз және $C^\infty(\Omega) \cap C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады.

**Дәлелдеу**. Алдымен 1 - есепті зерттейік. $u(x)$ функциясы 1 - есептің шешімі болсын деп жорып, келесідей көмекші функцияларды қарастырайық:

$$u_-(x) = \frac{u(x) - u(x^*)}{2}$$

және

$$u_+(x) = \frac{u(x) + u(x^*)}{2}.$$

Бұл функциялар үшін $u_-(x) + u_+(x) = u(x)$ болатыны айқын көрініп тұр.

$u_-(x), u_+(x)$ функциялары қанағаттандыратын теңдеуді және ол үшін шекаралық шарттарды анықтайық.

$u_-(x)$ функциясына $\Delta$ операторын қолданатын болсақ, онда

$$\Delta u_-(x) = \frac{1}{2}\left[\Delta u(x) - \Delta u(x^*)\right] = 0$$

яғни, $u_-(x)$ гармониялық функция. Шекаралық шарттардың біріншісінен

$$u_-(x)\Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}\left[u(x) - u(x^*)\right]\Big|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}\varphi(x)$$

Егер $x \in \partial\Omega_-$ болса, оған “қарсы” болған нүкте $x^* \in \partial\Omega_+$. Сол себептен

$$u_-(x)\Big|_{\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}\left[u(x) - u(x^*)\right]\Big|_{\partial\Omega_-} = -\frac{1}{2}\left[u(x^*) - u(x)\right]\Big|_{\partial\Omega_-} = -\frac{1}{2}\varphi(x^*), x \in \partial\Omega_-$$

келіп шығады. Енді мынандай функцияны қарастырайық:

$$\tilde{\varphi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi(x), x \in \partial\Omega_+, \\ -\frac{1}{2}\varphi(x^*), x \in \partial\Omega_-. \end{cases}$$

Осылайша, жоғарыда қарастырған $u_-(x)$ функциясы үшін

$$\Delta u_-(x) = 0, x \in \Omega; \quad u_-(x)\Big|_{\partial\Omega} = \tilde{\varphi}(x) \tag{2.1.12}$$

Дирихле есебін аламыз.

Егер қандайда бір $\lambda > 0, \lambda -$ бүтін емес саны үшін $\varphi(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega_+)$ болса және бұл функция үшін (2.1.8) үйлесімділік шарттары орындалса, онда $\tilde{\varphi}(x)$ функциясының бүкіл $\partial\Omega$ сферадағы тегістігі $\varphi(x)$ функцияның тегістігі сияқты, яғни $\tilde{\varphi}(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$ болады. Олай болса бірінші тараудың нәтижелері бойынша (2.1.12) – есептің шешімі бар, жалғыз және $C^{\infty}(\Omega) \cap C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады.

Енді $u_+(x)$ функциясыны шарттарды анықтаймыз. Бұл функцияда $\Omega$ облысында гармониялық болады. Шынында да $u_+(x)$ функциясына $\Delta$ операторын қолданатын болсақ, онда

$$\Delta u_+(x) = \frac{1}{2}\left[\Delta u(x) + \Delta u(x^*)\right] = 0$$

яғни, $u_-(x)$ гармониялық функция. 1-есептің екінші шекаралық шартынан

$$\left.\frac{\partial u_+(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega_+} = \frac{1}{2}\psi(x).$$

Егер $x \in \partial\Omega_-$ болса, оған “қарсы” болған нүкте $x^* \in \partial\Omega_+$. Сол себептен

$$\left.\frac{\partial u_+(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x)}{\partial x_n}\right]\Bigg|_{\partial\Omega_-} = \frac{1}{2}\psi(x^*)$$

келіп шығады. Сондай-ақ, $S$ көпбейнелікте берілген (2.1.7) шарттан

$$u_+(x)\big|_S = \frac{1}{2}\left[u(x) + u(x^*)\right]\Big|_S = 0$$

$\psi(x)$ функциясына қатысты мынандай функцияны қарастырамыз:

$$\tilde{\psi}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\psi(x), x \in \partial\Omega_+, \\ \frac{1}{2}\psi(x^*), x \in \partial\Omega_-. \end{cases}$$

Осылайша, жоғарыда қарастырған $u_+(x)$ функциясы үшін көлбеу туындылы

$$\Delta u_+(x) = 0, x \in \Omega; \quad \left.\frac{\partial u_+(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega} = \tilde{\psi}(x), u_+(x)\big|_S = 0 \qquad (2.1.13)$$

есепті аламыз.

Жоғарыда $\varphi(x)$ функциясы үшін көргеніміздей, егер егер қандайда бір $\lambda > 0, \lambda -$ бүтін емес саны үшін $\psi(x) \in C^\lambda(\partial\Omega_+)$ болса және бұл функция үшін (2.1.9) үйлесімділік шарттары орындалса, онда $\tilde{\psi}(x)$ функциясының $\partial\Omega$ сферадағы тегістігі $\psi(x)$ функцияның тегістігі сияқты, яғни $\tilde{\psi}(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ болады. Олай болса бірінші тараудың нәтижелері бойынша, $\lambda > \frac{1}{2}, \lambda -$ бүтін емес болған жағдайда, кез келген $\tilde{\psi}(x) \in C^\lambda(\partial\Omega)$ функциясы үшін (2.1.13) – есептің шешімі бар, жалғыз және $C^\infty(\Omega) \cap C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады.

Осылайша теорема шарттары және (2.1.8) - (2.1.10) үйлесімділік шарттары орындалғанда (2.1.12), (2.1.13) есептерінің шешімдері бар, жалғыз және белгілі бір Гельдер класстарына тиісті болады. Енді (2.1.12), (2.1.13) есептерінің шешімдері арқылы табылатын

$$u(x) = u_-(x) + u_+(x)$$

функциясы 1-есептің барлық шарттарын қанағаттандыратынын көрсетейік.

Шынында да, егер $u_-(x)$ және $u_+(x)$ функциялары сәйкес түрде (2.1.12), (2.1.13) есептерінің шешімдері болса, онда

$$\Delta u(x) = \Delta u_-(x) + \Delta u_+(x) = 0, x \in \Omega .$$

Егер $x \in \partial\Omega_+$ болса, онда

$$u(x) - u(x^*) = 2\frac{u(x) - u(x^*)}{2} = 2u_-(x) .$$

Бұдан

$$u(x) - u(x^*)\Big|_{\partial\Omega_+} = 2u_-(x)\Big|_{\partial\Omega_+} = 2\frac{\varphi(x)}{2} = \varphi(x),$$

яғни 1 – есептің (2.1.2) шекаралық шарты орындалады.

Сол сияқты, егер $x \in \partial\Omega_+$ болса, онда

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n} = 2 \cdot \frac{1}{2}\left[\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}\right] = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial x_n}\left[\frac{u(x) + u(x^*)}{2}\right] = 2 \cdot \frac{\partial u_+(x)}{\partial x_n}$$

Бұдан

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_n} + \frac{\partial u(x^*)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_+} = 2 \cdot \left.\frac{\partial u_+(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega_+} = 2 \cdot \frac{\psi(x)}{2} = \psi(x) .$$

Сонымен, 1 – есептің (2.1.3) шекаралық шартыда орындалады. Осылайша (2.1.7) шартың орындалуыда көрсетіледі.

Енді 2 - есепті зерттейміз. $u(x)$ функциясы 2 - есептің шешімі болсын дейік. Бұл жағдайда

$$u_-(x) = \frac{u(x) - u(x^*)}{2} \text{ және } u_+(x) = \frac{u(x) + u(x^*)}{2}$$

көмекші функциялар үшін алынатын есептер орны ауысады, яғни $u_-(x)$ функциясы үшін

$$\Delta u_-(x)=0, x\in\Omega;\quad \left.\frac{\partial u_-(x)}{\partial x_n}\right|_{\partial\Omega}=\tilde{\psi}(x), u_-(x)\big|_S=0 \qquad (2.1.14)$$

есепті, ал $u_+(x)$ функциясы үшін

$$\Delta u_+(x)=0, x\in\Omega;\quad u_+(x)\big|_{\partial\Omega}=\tilde{\varphi}(x) \qquad (2.1.15)$$

есебін аламыз. Мұнда

$$\tilde{\varphi}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\varphi(x), x\in\partial\Omega_+,\\ \frac{1}{2}\varphi(x^*), x\in\partial\Omega_-,\end{cases}\qquad \tilde{\psi}(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}\psi(x), x\in\partial\Omega_+,\\ -\frac{1}{2}\psi(x^*), x\in\partial\Omega_-.\end{cases}$$

Егер қандайда бір $\lambda>\frac{1}{2}, \lambda-$ бүтін емес саны үшін $\varphi(x)\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega_+), \psi(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega_+)$ болса және бұл функциялар үшін (2.1.8) - (2.1.10) үйлесімділік шарттары орындалса, онда

$$\varphi(x)\in C^{\lambda+1}(\partial\Omega), \psi(x)\in C^{\lambda}(\partial\Omega)$$

болады.

Онда теорема шарттары және (2.1.8) - (2.1.10) үйлесімділік шарттары орындалғанда (2.1.12), (2.1.13) есептерінің шешімдері бар, жалғыз және белгілі бір Гельдер класстарына тиісті болады. Бұл функциялардың қосындысы, яғни

$$u(x)=u_-(x)+u_+(x)$$

функциясы 2-есептің барлық шарттарын қанағаттандыруы жоғарыдағыдай көрсетіледі. Теорема дәлелденді.

### 2.2 Екінші түрдегі периодты шеттік есеп

Бұл бөлімде біз периодты шартпен берілген, көлбеу туындылы шеттік есептің тағы бір түрін қарастырамыз. Осы есептің қойылымын келтірейік.

$\Omega=\left\{x\in R^n:|x|<1\right\}$ - бірлік шар, $n\geq 3$, $\partial\Omega=\left\{x\in R^n:|x|=1\right\}$ - бірлік сфера болсын.

Шардың нүктелерін $x=(\tilde{x},x_n)\in\Omega$, $n-1$ – шарды $B=\{\tilde{x}\in R^{n-1}:|\tilde{x}|<1\}$ түрінде белгілейік. $B$ шардың кез – келген $\tilde{x}\in B$ нүктесіне оған "қарсы" болған $\tilde{x}^*=\left(\alpha_1x_1,\alpha_2x_2,...,\alpha_{n-1}x_{n-1}\right)$ нүктесін сәйкес қоямыз. Мұнда $\alpha_1=-1$, ал қалған $\alpha_j$

сандары $j$ индекстің $j = 2,3,...,n-1$ $\alpha_j = \pm 1$ мәндерінің біреуін қабылдайды деп есептейік.

Мынандай белгілеулерді енгізейік:

$$S_+ = \left\{ \tilde{x} \in S : x_1 \geq 0 \right\},\ S_- = \left\{ \tilde{x} \in S : x_1 \leq 0 \right\},\ I = \left\{ \tilde{x} \in S : x_1 = 0 \right\}.$$

$\Omega$ облысында мынандай екі есепті қарастырамыз:

**1-Есеп.** $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ класында жататын және

$$\Delta u(x) = 0,\ x \in \Omega, \tag{2.2.7}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x_n}(x) = g(x),\ x \in \partial\Omega, \tag{2.2.8}$$

$$u(\tilde{x}) + u(\tilde{x}^*) = \varphi_0(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in S_+, \tag{2.2.9}$$

$$\frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial \nu} - \frac{\partial u(\tilde{x}^*)}{\partial \nu} = \varphi_1(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in S_+, \tag{2.2.10}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын. Мұнда $\nu$ - $S$ - сфераға сыртқы жүргілігген нормал векторы.

**2-Есеп.** $u(x) \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ класында жататын, (2.2.7), (2.2.8) және

$$u(\tilde{x}) - u(\tilde{x}^*) = \varphi_0(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in S_+, \tag{2.2.11}$$

$$\frac{\partial u(\tilde{x})}{\partial \nu} + \frac{\partial u(\tilde{x}^*)}{\partial \nu} = \varphi_1(\tilde{x}),\ \tilde{x} \in S_+, \tag{2.2.12}$$

шарттарды қанағаттандыратын $u(x)$ функциясын табу қажет болсын.

Алдымен 1 және 2 - есептердің шешімдерінің жалғыз болуы туралы теореманы баяндайық.

**Теорема 2.2.1.** Егер 1 және 2 - есептерінің шешімдері бар болса, онда 1-есептің шешімі жалғыз, 2 – есебінің шешімі тұрақты дәлдігінде жалғыз болады.

**Дәлелдеу.** Кері жорып, 1 - есептің шешімі екеу болсын дейік. Бұл шешімдерді $u_1(x), u_2(x)$, ал олардың айырымын $u(x) = u_1(x) - u_2(x)$ түрінде белгілейік. $u(x)$ функциясы $\Omega$ облысында гармониялық және оған қоса біртекті (2.2.8) - (2.2.10) шарттарын қанағаттандырады.

$v(x) = \dfrac{\partial u}{\partial x_n}(x)$ деп белгілеп алайық. Онда $v(x)$ функциясы келесі

$$\Delta v(x) = 0,\ x \in \Omega,\ v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega.$$

біртекті шартымен берілген Дирихле есебінің шешімі болады. Бұдан, Дирихле есебінің шешімі жалғыз болғандықтан $v(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$ болатынын байқаймыз. Онда $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega},$ яғни $u(x)\equiv w(\tilde{x})$, мұнда $w(\tilde{x})$ - $\tilde{x}$ айнымалы бойынша гармониялық болатын, кез келген функция. Егер (2.2.9),(2.2.10) бір текті шарттарды есепке алсақ, онда $w(\tilde{x})$ функциясы келесі шекаралық есептің шарттарын қанағаттантырады:

$$\tilde{\Delta}w(\tilde{x})=0, \tilde{x}\in B, \tag{2.2.13}$$

$$w(\tilde{x})=-w(\tilde{x}^*), \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}=\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}, \tilde{x}\in S_+, \tag{2.2.14}$$

мұндағы $\tilde{\Delta}=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2}{\partial x_{n-1}^2}$.

[4] жұмыста (2.2.13),(2.2.14) есебінің шешімі жалғыз, яғни $w(\tilde{x})\equiv 0$.

Бұдан 1- есептің шешімі жалғыз болатыны келіп шығады.

Енді 2 – есепті зертеуге өтейік. Бұл жағдайда да кері жорып шешім екеу болсын дейік. Бұл шешімдерді $u_1(x), u_2(x)$, ал олардың айырымын $u(x)=u_1(x)-u_2(x)$ түрінде белгілесек, онда $u(x)$ функциясы $\Omega$ облысында гармониялық және оған қоса біртекті (2.2.11) - (2.2.12) шарттарын қанағаттандырады.

$v(x)=\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)$ деп белгілесек, онда $v(x)$ функциясы келесі

$$\Delta v(x)=0, x\in\Omega, v(x)=0, x\in\partial\Omega.$$

біртекті шартымен берілген Дирихле есебінің шешімі болады. Бұдан, Дирихле есебінің шешімі жалғыз болғандықтан $v(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega}$ болатынын байқаймыз. Онда $\frac{\partial u}{\partial x_n}(x)\equiv 0, x\in\bar{\Omega},$ яғни $u(x)\equiv w(\tilde{x})$, мұнда $w(\tilde{x})$ - $\tilde{x}$ айнымалы бойынша гармониялық болатын, кез келген функция. Егер (2.2.11),(2.2.12) бір текті шарттарды есепке алсақ, онда $w(\tilde{x})$ функциясы келесі шекаралық есептің шарттарын қанағаттантырады:

$$\tilde{\Delta}w(\tilde{x})=0, \tilde{x}\in B,$$

$$w(\tilde{x})=w(\tilde{x}^*), \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}=-\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}, \tilde{x}\in S_+,$$

[4] жұмыста бұл есептің шешімі $w(\tilde{x}) \equiv C, C = const$ болатыны дәлелденген. Олай болса 2 - есептің шешімі $u(x) \equiv C$ болатыны келіп шығады. Сонымен теорема дәлелденді.

Енді қарастырылатын есептердің шешімдері бар болуын зерттеуге өтеміз.

$v(x)$ функциясы келесі

$$\Delta v(x) = 0, x \in \Omega, v(x) = g(x), x \in \partial\Omega. \qquad (2.2.15)$$

Дирихле есебінің шешімі болсын деп ұйғарайық.

[Алимов 4] жұмыста келесі тұжырым дәлелдееген.

Лемма 2.2.1. $\lambda > \frac{1}{2}, \lambda + \frac{1}{2} -$ бүтін емес, $g(x) \in C^{\lambda}(\partial\Omega)$ және

$$h(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt$$

болсын. Онда $h(x) \in C^{\lambda+1/2}(\bar{\Omega})$ .

Айталық, $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_{n-1})$ - мультииндекс $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_{n-1}$ және $\partial^{|\beta|} = \dfrac{\partial^{|\beta|}}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} ... \partial x_{n-1}^{\beta_{n-1}}}$ болсын.

1-есепке қатысты келесі негізгі нәтиже орынды.

*Теорема 2.2.2. Айталық,* $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, $g(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$, $\varphi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S_+)$, $\varphi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S_+)$ *болсын және келесі шарттар орындалсын*

$$\partial^{|\beta|}\varphi_0(0, x_2, ..., x_{n-1}) = \partial^{|\beta|}\varphi_0(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_{n-1} x_{n-1}), |\beta| \le 2 \qquad (2.2.16)$$

$$\partial^{|\beta|}\varphi_1(0, x_2, ..., x_{n-1}) = -\partial^{|\beta|}\varphi_1(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_{n-1} x_{n-1}), |\beta| \le 1. \qquad (2.2.17)$$

Онда (2.2.7)-(2.2.10) есебінің шешімі бар және жалғыз болады;

*Дәлелдеуі.* $v(x)$ функциясы (2.2.15) - есебінің шешімі деп ұйғарайық. (2.2.7) - (2.2.10) есептің шешімін

$$u(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t)dt + w(\tilde{x}). \qquad (2.2.18)$$

түрінде іздейміз. Егер $v(x)$ функциясы (2.2.15) - есебінің шешімі болса, онда (2.2.18) теңдікте қатысатын белгісіз $w(\tilde{x})$ функциясы келесі

$$-\tilde{\Delta} w(\tilde{x}) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, x \in B, \qquad (2.2.19)$$

$$w(\tilde{x})+w(\tilde{x}^*)=\varphi_0(\tilde{x}), \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}-\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}=\varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+ . \qquad (2.2.20)$$

шарттарды қанағаттандыратынын көрсетелік.

Шынында да,

$$\Delta u(x)=\int_0^{x_n}\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)dt+\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}+\tilde{\Delta} w(\tilde{x}) .$$

Шартымыз бойынша $v(x)$ функциясы (2.2.15) - есебінің шешімі болып табылады, онда

$$0=\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)=\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial x_{n-1}^2}+\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2},$$

яғни $\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)=-\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2}$ теңдігі орындалады. Бұдан,

$$\int_0^{x_n}\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)dt=-\int_0^{x_n}\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2}dt=-\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}+\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}.$$

Демек, $w(\tilde{x})$ функциясы (2.2.19) теңдеуін қанағаттандырады. Әрі қарай, шекаралық шарттарын тексереміз. Егер $x\in S$ болса, онда $x=(\tilde{x},0)$ және (2.2.9) шартынан табатынымыз,

$$\varphi_0(\tilde{x})=u(\tilde{x},0)+u(\tilde{x}^*,0)=w(\tilde{x})+w(\tilde{x}^*), x\in S_+ . \qquad (2.2.21)$$

$\partial\Omega$ сферасы үшін нормаль бойынша туынды келесі түрде болады

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=r\left.\frac{\partial u(x)}{\partial r}\right|_{r=1}=\sum_{j=1}^{n}x_j\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{r=1}$$

Онда (2.2.18) теңдіктен $\tilde{x}\in S$ нүктелері үшін келесі нәтижені аламыз

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{S}=\sum_{j=1}^{n-1}x_j\left.\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{r=1,x_n=0}=\int_0^{x_n}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\frac{\partial v(\tilde{x},t)}{\partial x_j}dt+\sum_{j=1}^{n-1}x_j\left.\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial x_j}\right|_{S}=\left.\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}\right|_{S}.$$

Бұл жерден (2.2.10) теңдігін қолдану арқылы келесі нәтижені аламыз

$$\varphi_1(\tilde{x}) = \frac{\partial u(\tilde{x},0)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(\tilde{x}^*,0)}{\partial \nu} = \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu} - \frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}, \tilde{x} \in S_+, \tag{2.2.22}$$

яғни, (2.2.20) теңдігінің екінші шарты орындалады.
Келесі

$$w_+(\tilde{x}) = \frac{w(\tilde{x}) + w(\tilde{x}^*)}{2}, w_-(\tilde{x}) = \frac{w(\tilde{x}) - w(\tilde{x}^*)}{2}.$$

көмекші функцияларды енгізейік. Бұл теңдіктерден $w(\tilde{x}) = w_+(\tilde{x}) + w_-(\tilde{x})$ екендігі анық.

Айталық, $f(\tilde{x}) = \dfrac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}$ және

$$f_+(\tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}^*)}{2}, f_-(\tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}^*)}{2}$$

болсын. (2.2.19),(2.2.20) есебін зерттейік. Егер $w(\tilde{x})$ функциясы (2.2.19),(2.2.20) есебінің шешімі болса, онда

$$-\Delta w_+(\tilde{x}) = \frac{-\Delta w(\tilde{x}) - \Delta w(\tilde{x}^*)}{2} = \frac{f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}^*)}{2} = f_+(\tilde{x}), x \in \Omega,$$

$$-\Delta w_-(\tilde{x}) = \frac{-\Delta w(\tilde{x}) + \Delta w(\tilde{x}^*)}{2} = \frac{f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}^*)}{2} = f_-(\tilde{x}), x \in \Omega$$

Әрі қарай (2.2.21) және (2.2.22) шарттарынан келесі нәтижені аламыз,

$$\varphi_0(\tilde{x}) = u(\tilde{x},0) + u(\tilde{x}^*,0)\big|_{S_+} = w(\tilde{x}) + w(\tilde{x}^*)\big|_{S_+} = 2w_+(\tilde{x})\big|_{S_+} \Rightarrow w_+(\tilde{x})\big|_{S_+} = \frac{\varphi_0(\tilde{x})}{2}$$

$$\varphi_1(\tilde{x}) = \frac{\partial u(\tilde{x},0)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(\tilde{x}^*,0)}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu} - \frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = 2\frac{\partial w_-(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} \Rightarrow \frac{\partial w_-(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = \frac{\varphi_1(\tilde{x})}{2}.$$

Басқа жақтан қарағанда, егер $\tilde{x} \in S_-$ болса, онда $\tilde{x}^* \in S_+$. Сондықтан (2.2.21) және (2.2.22) шарттарынан кез-келген $\tilde{x} \in S_-$ үшін келесі нәтижені аламыз

$$\varphi_0(\tilde{x}^*) = u(\tilde{x}^*,0) + u(\tilde{x},0)\big|_{S_-} = w(\tilde{x}) + w(\tilde{x}^*)\big|_{S_-} = 2w_+(\tilde{x})\big|_{S_-} \Rightarrow w_+(\tilde{x})\big|_{S_-} = \frac{\varphi_0(\tilde{x}^*)}{2},$$

$$\varphi_1(\tilde{x}^*) = \left[\frac{\partial u(\tilde{x}^*,0)}{\partial \nu} - \frac{\partial u(\tilde{x},0)}{\partial \nu}\right]\bigg|_{S_-} = \left[\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu} - \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}\right]\bigg|_{S_-} = -\left[\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu} - \frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}\right]\bigg|_{S_-} =$$

$$-2\left.\frac{\partial w_-(\tilde{x})}{\partial \nu}\right|_{S_-} \Rightarrow \left.\frac{\partial w_-(\tilde{x})}{\partial \nu}\right|_{S_-} = -\frac{\varphi_1(\tilde{x}^*)}{2}.$$

Келесі функцияларды енгіземіз

$$2\psi_0(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ \varphi_0(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases},$$

$$2\psi_1(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ -\varphi_1(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases}.$$

Осылайша, егер $w(\tilde{x})$ функциясы (2.2.19),(2.2.20) есебінің шешімі болса, онда $w_+(\tilde{x})$ және $w_-(\tilde{x})$ функциялары келесі есептердің шешімі болып табылады:

$$-\Delta w_+(\tilde{x}) = f_+(\tilde{x}), \tilde{x} \in B; w_+(\tilde{x}) = \psi_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S \qquad (2.2.23)$$

$$-\Delta w_-(\tilde{x}) = f_-(\tilde{x}), \tilde{x} \in B; \frac{\partial w_-(\tilde{x})}{\partial \nu} = \psi_1(\tilde{x}), \tilde{x} \in S \qquad (2.2.24)$$

Әрі қарай, егер $\varphi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S_+)$, $\varphi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S_+)$ және сәйкес түрде (2.2.16) және (2.2.17) шарттары орындалса, онда бұл функциялар $\psi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S)$, $\psi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S)$ кластарында жатады. Осылайша, $g(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$ болса, онда теорема 2.2.1 бойынша $v(x)$ функциясы $C^{\lambda+1}(\bar{\Omega})$ класына тиісті және осыдан $f(\tilde{x}) = \frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n} \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$. Бұл жағдайда, $f_+(\tilde{x})$ және $f_-(\tilde{x})$ функцияларының да $C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ класына тиісті екендігі анық. Осылайша, $f_+(\tilde{x}) \in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$ және $\psi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S)$ болса, онда (2.2.23) - Дирихле есебінің шешімі бар, жалғыз және $w_+(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(\bar{B})$ класына тиісті болады. Теорема 2.2.2 пайымдауы бойынша (2.2.24) - Нейман есебінің шешімі бар болуы үшін (1.5) шартының орындалу қажетті және жеткілікті. Біздің жағдайда бұл шарт келесі

$$\int_B f_-(\tilde{x})d\tilde{x} = \int_S \psi_1(\tilde{x})ds. \qquad (2.2.25)$$

түрде болады. Бірақ,

$$\int_S \psi_1(\tilde{x})ds = \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds - \frac{1}{2}\int_{S_-} \varphi_1(\tilde{x}^*)ds = \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds - \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x}^*)ds = 0,$$

$$\int_B f_-(\tilde{x})d\tilde{x} = \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} - \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x}^*)d\tilde{x} = \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} - \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} = 0,$$

теңдіктер орынды. Онда біздің жағдайда Нейман есебінің (2.2.25) - шешімділік шарты барлық уақытта орындалады.

Сонымен, Нейман есебінің шешімділік шарты орындалады және $\psi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S)$, онда (2.2.24) - Нейман есебінің шешімі тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен бар, жалғыз және $C^{\lambda+2}(\overline{B})$ класына тиісті болады.

Осылайша, егер $\varphi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S_+)$, $\varphi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S_+)$, болса, онда (2.2.23) және (2.2.24) есептердің шешімдері бар және $C^{\lambda+2}(\overline{B})$ класына тиісті болады. Онда $w(\tilde{x}) = w_+(\tilde{x}) + w_-(\tilde{x})$ функциясы (2.2.19),(2.2.20) есебінің шешімі болады.

Осылайша, (2.2.18) функциясы 1 - есептің барлық шарттарын қанағаттандырады. Сонымен қатар, бұл шешім Лемма 2.2.1 нәтижесі бойынша $C^{\lambda+\frac{1}{2}}(\overline{\Omega})$ класына тиісті болады. Теорема дәлелденді.

Енді 2-есепке қатысты нәтижені келтірейік.

*Теорема 2.2.3. Егер* $\frac{1}{2} < \lambda < 1$, $g(x) \in C^{\lambda+1}(\partial\Omega)$, $\varphi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S_+)$, $\varphi_1(\tilde{x}) \in C^{\lambda+1}(S_+)$ *болса және келесі шарттар*

$$\partial^{|\beta|}\varphi_0(0, x_2, ..., x_{n-1}) = -\partial^{|\beta|}\varphi_0(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_{n-1} x_{n-1}), |\beta| \le 2 \qquad (2.2.26)$$

$$\partial^{|\beta|}\varphi_1(0, x_2, ..., x_{n-1}) = \partial^{|\beta|}\varphi_1(0, \alpha_2 x_2, ..., \alpha_{n-1} x_{n-1}), |\beta| \le 1. \qquad (2.2.27)$$

*орындалса, онда 2- есептің шешімі бар болуы үшін келесі*

$$\int_B \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n} d\tilde{x} = \int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x}) ds \qquad (2.2.28)$$

*шарттың орындалуы қажетті және жеткілікті. Мұндағы* $v(x)$ *функциясы (2.2.15) - Дирихле есебінің шешімі.*

Дәлелдеуі. $v(x)$ функциясы (2.2.15) есебінің шешімі болсын. 1 - есептегі сияқты 2 - есептің шешімін

$$u(x) = \int_0^{x_n} v(\tilde{x}, t) dt + w(\tilde{x}). \qquad (2.2.29)$$

түрінде іздейміз.

Бұл жағдайдайда белгісіз $w(\tilde{x})$ функциясы

$$-\tilde{\Delta} w(\tilde{x}) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}, x \in B, \qquad (2.2.30)$$

$$w(\tilde{x})-w(\tilde{x}^*)=\varphi_0(\tilde{x}), \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}+\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}=\varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x}\in S_+ . \qquad (2.2.31)$$

шарттарды қанағаттандырады.

Шынында да,

$$\Delta u(x)=\int_0^{x_n}\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)dt+\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}+\tilde{\Delta} w(\tilde{x}) .$$

$v(x)$ функциясы (2.2.15) есебінің шешімі болып табылады, онда

$$0=\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)=\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial x_1^2}+\ldots+\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial x_{n-1}^2}+\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2}$$

яғни $\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)=-\dfrac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2}$ теңдігі орындалады. Бұдан,

$$\int_0^{x_n}\tilde{\Delta} v(\tilde{x},t)dt=-\int_0^{x_n}\frac{\partial^2 v(\tilde{x},t)}{\partial t^2}dt=-\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}+\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n} .$$

Демек, $w(\tilde{x})$ функциясы (2.2.30) теңдеуін қанағаттандырады. Әрі қарай, шекаралық шарттарын тексерейік. Егер $x\in S$ болса, онда $x=(\tilde{x},0)$ және (2.2.11) шартынан табатынымыз,

$$\varphi_0(\tilde{x})=u(\tilde{x},0)-u(\tilde{x}^*,0)=w(\tilde{x})-w(\tilde{x}^*), x\in S_+ . \qquad (2.2.32)$$

$\partial\Omega$ сферасы үшін нормаль бойынша туынды келесі түрде болады

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_{\partial\Omega}=r\left.\frac{\partial u(x)}{\partial r}\right|_{r=1}=\left.\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{r=1}$$

Онда $\tilde{x}\in S$ нүктелері үшін келесі нәтижені аламыз

$$\left.\frac{\partial u(x)}{\partial \nu}\right|_S=\left.\sum_{j=1}^{n-1}x_j\frac{\partial u(x)}{\partial x_j}\right|_{r=1,x_n=0}=\int_0^{x_n}\sum_{j=1}^{n-1}x_j\frac{\partial v(\tilde{x},t)}{\partial x_j}dt+\left.\sum_{j=1}^{n-1}x_j\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial x_j}\right|_S=\left.\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}\right|_S .$$

Бұдан

$$\varphi_1(\tilde{x})=\frac{\partial u(\tilde{x},0)}{\partial \nu}+\frac{\partial u(\tilde{x}^*,0)}{\partial \nu}=\frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}+\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}, \tilde{x}\in S_+, \qquad (2.2.33)$$

яғни, (2.2.31) теңдігінің екінші шартыда орындалады.

1 - есептегі сияқты

$$w_+(\tilde{x}) = \frac{w(\tilde{x}) + w(\tilde{x}^*)}{2}, w_-(\tilde{x}) = \frac{w(\tilde{x}) - w(\tilde{x}^*)}{2}.$$

көмекші функцияларды енгізейік. Сол сияқты

$$f(\tilde{x}) = \frac{\partial v(\tilde{x}, 0)}{\partial x_n}$$

және

$$f_+(\tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x}) + f(\tilde{x}^*)}{2}, f_-(\tilde{x}) = \frac{f(\tilde{x}) - f(\tilde{x}^*)}{2}$$

болсын.

Бұл жағдайда көмекші $w_+(\tilde{x}), w_-(\tilde{x})$ функцияларына қатысты келесі есепті аламыз:

$$-\Delta w_-(\tilde{x}) = f_-(\tilde{x}), \tilde{x} \in B; w_-(\tilde{x}) = \psi_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S, \tag{2.2.34}$$

$$-\Delta w_+(\tilde{x}) = f_+(\tilde{x}), \tilde{x} \in B; \frac{\partial w_+(\tilde{x})}{\partial \nu} = \psi_1(\tilde{x}), \tilde{x} \in S, \tag{2.2.35}$$

мұндағы

$$2\psi_0(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ -\varphi_0(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases}, 2\psi_1(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ \varphi_1(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases}.$$

Шынында да, (2.2.21) және (2.2.22) шарттарынан келесі нәтижені аламыз.

$$\varphi_0(\tilde{x}) = u(\tilde{x}, 0) - u(\tilde{x}^*, 0)\big|_{S_+} = w(\tilde{x}) - w(\tilde{x}^*)\big|_{S_+} = 2w_-(\tilde{x})\big|_{S_+} \Rightarrow w_-(\tilde{x})\big|_{S_+} = \frac{\varphi_0(\tilde{x})}{2},$$

$$\varphi_1(\tilde{x}) = \frac{\partial u(\tilde{x}, 0)}{\partial \nu} + \frac{\partial u(\tilde{x}^*, 0)}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu} + \frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = 2\frac{\partial w_+(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} \Rightarrow \frac{\partial w_+(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_+} = \frac{\varphi_1(\tilde{x})}{2}.$$

Екінші жағынан, егер $\tilde{x} \in S_-$ болса, онда $\tilde{x}^* \in S_+$. Сондықтан, (2.2.21) және (2.2.22) шарттарынан кез – келген $\tilde{x} \in S_-$ үшін

$$\varphi_0(\tilde{x}^*) = u(\tilde{x}^*,0) - u(\tilde{x},0)\big|_{S_-} = -\left[w(\tilde{x}) - w(\tilde{x}^*)\right]\big|_{S_-} = 2w_-(\tilde{x})\big|_{S_-} \Rightarrow w_-(\tilde{x})\big|_{S_-} = -\frac{\varphi_0(\tilde{x}^*)}{2},$$

$$\varphi_1(\tilde{x}^*) = \left[\frac{\partial u(\tilde{x}^*,0)}{\partial \nu} + \frac{\partial u(\tilde{x},0)}{\partial \nu}\right]\bigg|_{S_-} = \left[\frac{\partial w(\tilde{x}^*)}{\partial \nu} + \frac{\partial w(\tilde{x})}{\partial \nu}\right]\bigg|_{S_-} = 2\frac{\partial w_+(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_-} \Rightarrow \frac{\partial w_+(\tilde{x})}{\partial \nu}\bigg|_{S_-} = \frac{\varphi_1(\tilde{x}^*)}{2}.$$

Егер

$$2\psi_0(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_0(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ \varphi_0(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases}, 2\psi_1(\tilde{x}) = \begin{cases} \varphi_1(\tilde{x}), \tilde{x} \in S_+ \\ -\varphi_1(\tilde{x}^*), \tilde{x} \in S_- \end{cases}$$

функцияларын енгізсек, онда $w_+(\tilde{x}), w_-(\tilde{x})$ функциялары үшін (2.2.34) және (2.2.35) есебін аламыз. Бұл жағдайда, кез – келген $\varphi_0(\tilde{x}) \in C^{\lambda+2}(S_+)$ үшін (2.2.34) есебінің шешімі бар, жалғыз және $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады. (2.2.35) есебінің шешімділігі үшін

$$\int_B f_+(\tilde{x})d\tilde{x} = \int_S \psi_1(\tilde{x})ds \qquad (2.2.17)$$

орындалуы қажетті және жеткілікті.

Келесі

$$\int_S \psi_1(\tilde{x})ds = \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds + \frac{1}{2}\int_{S_-} \varphi_1(\tilde{x}^*)ds = \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds + \frac{1}{2}\int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds = \int_{S_+} \varphi_1(\tilde{x})ds,$$

$$\int_B f_+(\tilde{x})d\tilde{x} = \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} + \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x}^*)d\tilde{x} = \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} + \frac{1}{2}\int_B f(\tilde{x})d\tilde{x} = \int_B f(\tilde{x})d\tilde{x},$$

және $f(\tilde{x}) = \dfrac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}$ теңдіктері орындалады, онда Нейман есебінің шешімділік шартын (2.2.28) түрінде жазуға болады. Егер бұл шарт орындалса, онда (2.2.35) - есебінің шешімі бар, тұрақты қосылғышқа дейінгі дәлдікпен жалғыз және $C^{\lambda+2}(\bar{\Omega})$ класына тиісті болады. Теорема дәлелденді.

Зерттеліп жатқан есептің $g(x) = P(x)$ - полином болған жағдайда шешімділік орынталуын қарастырайық. Келесі тұжырым дұрыс [10].

Лемма 2.2.2. $g(x) = P(x)$ - полином болсын. Онда (2.2.15) есебінің шешімін келесі түрде жазуға болады

$$v(x) = P(x) - \frac{|x|^2 - 1}{2}\int_0^1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(1 - t|x|^2\right)^k \left(1-t\right)^k}{(2k+2)!!(2k)!!} t^{n/2-1}\Delta^{k+1}P(tx)dt. \qquad (2.2.18)$$

Егер $g(x)=P(x)$ болса, онда (2.2.15) теңдеуінің шешімін (2.2.18) түрінде елестетейік және

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}=\frac{\partial P(x)}{\partial x_n}-x_n\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-t\,|\,x\,|^2\right)^k\left(1-t\right)^k}{(2k+2)!!(2k)!!}t^{n/2-1}\Delta^{k+1}P(tx)dt-$$

$$-\frac{|\,x\,|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-t\,|\,x\,|^2\right)^k\left(1-t\right)^k}{(2k+2)!!(2k)!!}t^{n/2-1}\frac{\partial\Delta^{k+1}P(tx)}{\partial x_n}dt\,.$$

Бұл жерден, барлық $x=(\tilde{x},0)$ үшін

$$\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}=\frac{\partial P(\tilde{x},0)}{\partial x_n}-\frac{|\,\tilde{x}\,|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-t\,|\,\tilde{x}\,|^2\right)^k\left(1-t\right)^k}{(2k+2)!!(2k)!!}t^{n/2-1}\left.\frac{\partial\Delta^{k+1}P(tx)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}dt\,.$$

Онда 2- есептің шешімділік шарты келесі түрге ие болады

$$\int_B\left(\frac{\partial P(\tilde{x},0)}{\partial x_n}-\frac{|\,\tilde{x}\,|^2-1}{2}\int_0^1\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left(1-t\,|\,\tilde{x}\,|^2\right)^k\left(1-t\right)^k}{(2k+2)!!(2k)!!}t^{n/2-1}\left.\frac{\partial\Delta^{k+1}P(tx)}{\partial x_n}\right|_{x_n=0}dt\right)d\tilde{x}=\int_{S_+}\varphi_1(\tilde{x})ds$$

Атап айтқанда, егер $P(x)=x_n$ болса, онда

$$v(x)=x_n,\frac{\partial v(x)}{\partial x_n}=1,\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}=1\,.$$

$\int_B\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}d\tilde{x}=\int_B d\tilde{x}=|\,B\,|-$ $n-1$ өлшемді бірлік шардың көлемі, онда бұл жағдайда шешімділік шарты келесі түрге ие болады

$$\int_{S_+}\varphi_1(\tilde{x})ds=|\,B\,|\,.$$

Егер $g(x)=x_n^2$ болса, онда (2.2.18) теңдігінен, (2.2.15) есебінің шешімі

$$v(x)=x_n^2-\frac{1}{n}\left(1-|\,x\,|^2\right)$$

болатыны жеңіл келіп шығады.

Бұл жағдайда $\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n}=0$ және (2.2.7) – (2.2.10) есебінің шешімділігі орындалуы үшін

$$\int_{S_+}\varphi_1(\tilde{x})ds=0$$

шартының орындалуы қажетті.

Мысал 1. $\varphi_1(\tilde{x})=0, g(x)=x_j,\ j=1,2,...,n.$ болсын. Онда (2.2.15) есебінің шешімі келесі түрге ие болады

$$v_j(x)=x_j,\ j=1,2,...,n$$

және

$$\frac{\partial v_j(x)}{\partial x_n}=\begin{cases}0,\ j=1,2,...,n-1\\1,\ j=n\end{cases}.$$

Бұл жерден

$$\frac{\partial v_j(\tilde{x},0)}{\partial x_n}=\begin{cases}0,\ j=1,2,...,n-1\\1,\ j=n\end{cases}.$$

Осылайша

$$g_j(\tilde{x})=\frac{\partial v_j(\tilde{x},0)}{\partial x_n}$$

және

$$\int_B g_j(\tilde{x})d\tilde{x}=\begin{cases}0,\ j=1,2,...,n-1\\\tilde{\omega}_n\neq 0,\ j=n\end{cases},$$

$\tilde{\omega}_n$ - $n-1$ - өлшемді бірлік шардың ауданы, онда $j=1,2,...,n-1$ болғанда (2.2.7)-(2.2.10) есебінің шешімділік шарты орындалады, ал $j=n$ болғанда орындалмайды.

Мысал 2. $g(x)=x_n^2$ болсын. Онда (2.2.15) теңдеуінің шешімі келесі түрде болады (см.например, [10],Теорема 9)

$$v(x)=x_n^2-\frac{1}{n}\left(1-|x|^2\right).$$

Бұдан

$$\frac{\partial v(x)}{\partial x_n} = 2x_n + \frac{2}{n} x_n = 2\frac{n+1}{n} x_n.$$

$\frac{\partial v(\tilde{x},0)}{\partial x_n} = 0$ болады, онда 2- есептің шешімділігінің қажеттілік шарты

$$\int\limits_{S_+} \varphi_1(\tilde{x}) ds = 0.$$

# ҚОРЫТЫНДЫ

Диссетациялық жұмыста Лаплас және Пуассон теңдеулері үшін дөнгелек аймақтарда шекаралық шарттарында көлбеу туындықатысқан периодты шарттармен берілген есептердің шешілімділігі зерттелінген. Бұл есептер екінші ретті эллипстік теңдеулер үшін қисынды қойылған бейлокал шеттік есептердің жаңа класына жатады.

Құрылымы бойынша диссертациялық жұмыс екі бөлімнен турады. Жұмыстың бірінші бөлімінде эллипстік теңдеулер үшін негізгі шеттік есептердің және көлбеу туындылы шеттік есептердің шешілімділігі туралы мәліметтер келтірілді. Мұнда көлбеу туындылы шеттік есептердің классификациясы жасалынды және шешімнің тегіс болу шарттары айқындалды.

Екінші тарауда Лаплас теңдеуі үшін көлбеу туындылы периодты шарттармен берілген есептердің екі түрі қарастырылды.

**Диссертациялықжұмыстыңнегізгінәтижелері:**

- Екінші ретті эллипстік тектес теңдеулер үшін қисынды болатын шеттік есептердің жаңа класы анықталды;
- Көлбеу туындылы шеттік есептердің классификациясы жасалынды
- Көлбеу туындылы шеттік есептердің шешімінің Гельдер класында тегістігі зерттелінді;
- Көлбеу туындылы периодты шарттармен берілген шеттік есептердіңшешілімдлігі айқындалды;
- Лаплас теңдеуі көлбеу туындылы периодты шарттармен берілген шеттік есептердің екі түрі зерттелінді;
- Шешімнің айқын түрі анықталды;
- Шешімнің бар және жалғыз болу шарттары анықталды;

## ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ


| | |
|---|---|
| 1 | Агмон С.,Дуглис А.,Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: ИЛ,1962. – 205 с. |
| 2 | Карачик В. В. Решение задачи Дирихле для полигармонического уравнения в шаре при полиномиальных данных // Дифференц. уравнения. 2015. Т. 51, № 8. С. 1038–1047. |
| 3 | Карачик В. В. Об одной задаче типа Неймана для бигармонического уравнения // Матем. тр. 2016. Т. 19, № 2. С. 86–108. |
| 4 | Constantin E. and Pavel N. H. Green function of the Laplacian for the Neumann problem in Rn // Libertas Math. 2010, V. 30. P.57–69. |
| 5 | V.V.Karachik, Normalized system of functions with respect to the Laplace operator and its applications, Journal of Mathematical Analysis and Applications 287,No.2(2003) 577–592. |
| 6 | Садыбеков М. А., Торебек Б. Т., Турметов Б. Х. Представление функции Грина внешней задачи Неймана для оператора Лапласа // Сиб. матем. журн. 2017. Т. 58, № 1. С. 199–205. |
| 7 | K.M.Shinaliyev, B.Kh.Turmetov, S.R.Umarov ,A fractional operator algorithm metod for construction of solutions of fractional order di?erential equations, Fractional Calculus and Applied analysis 15,No.2(2012) 267–281. |
| 8 | G.Dattoli , M.X.He, P.E.Ricci ,Eigenfunctions of laguerre-type operators and generalized evolution problems, Mathematical and Computer Modelling 42(2005) 1263–1268. |
| 9 | Карачик В. В., Торебек Б. Т. О задаче Дирихле — Рикье для бигармонического уравнения // Матем. заметки. 2017. Т. 102, № 1. С. 39–51. |
| 10 | R.Hilfer, Yu.Luchko , Z. Tomovski, Operational method for the solution of fractional di?erential equations with generalized Rieman-Lioville fractional derivatives, Fractional Calculus and Applied analysis 12,No 3(2009) 299–318. |
| 11 | Карачик В. В., Антропова Н. А. О полиномиальных решениях задачи Дирихле для бигармонического уравнения в шаре // Сиб. журн. индустр. матем. 2012. Т. 15, № 2. С. 86–98. |
| 12 | Begehr H. and Vaitekhovich T. Modified harmonic Robin function // Complex Var. Elliptic Equ. 2013. V. 58, N 4. P.483–496. |
| 13 | Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных .– Москва: Наука,1981. – 448с. |
| 14 | Бицадзе А.В.Уравнения математической физики. – Москва, Наука,1981. – 336с. |
| 15 | Бицадзе А. В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. – М., 1966. |
| 16 | Kh.M.Furati, O. S.Iyiola, M.Kirane ,An inverse problem for a generalized fractional di?usion, Applied Mathematics and Com- |

| | |
|---|---|
| | putation 249(2014) 24–31. |
| 17 | ГильбаргД.,Трудингер Н. Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. − М.: Наука. − 1989. – 464с. |
| 18 | Karachik, V.V., Solution of the Dirichlet problem with polynomial data for the polyharmonic equation<br>in a ball, Di?er. Equations, 2015, vol. 51, no. 8, pp. 1038–1047. |
| 19 | Bitsadze, A.V., Some properties of polyharmonic functions, Di?er. Equations, 1988, vol. 24, no. 5,<br>pp. 543–548. |
| 20 | R.Garra, F.Polito, On some operators involving Hadamard derivatives, Integral Transforms and Special Functions 24,No.10(2013)<br>773–782. ArXiv: 1058v1 [math.AP] 26 Mar 2013. |
| 21 | Karachik, V.V., On solvability conditions for the Neumann problem for a polyharmonic equation in the<br>unit ball, J. Appl. Ind. Math., 2014, vol. 8, no. 1, pp. 63–75. |
| 22 | Karachik, V.V. and Antropova, N.A., Polynomial solutions of the Dirichlet problem for the biharmonic<br>equation in the ball, Di?er. Equations, 2013, vol. 49, no. 2, pp. 251–256. |
| 23 | B.Kh.Turmetov, K.M.Shinaliyev, On a method for constructing solutions of di?erential equations of fractional order with a<br>Hadamard type operator, International Journal of Pure and Applied Mathematics 84,No.4(2013) 435–450. |
| 24 | Kanguzhin, B.E. and Koshanov, B.D., Necessary and su?cient conditions for the solvability of boundary<br>value problems for the inhomogeneous polyharmonic equations in the ball, Ufimsk. Mat. Zh., 2010,<br>vol. 2, no. 2, pp. 41–52. |
| 25 | Karachik, V.V., Construction of polynomial solutions to the Dirichlet problem for the polyharmonic<br>equation in a ball, Comput. Math. Math. Phys., 2014, vol. 54, no. 7, pp. 1122–1143. |
| 26 | Turmetov, B.Kh. and Ashurov, R.R., On solvability of the Neumann boundary value problem for a non-<br>homogeneous polyharmonic equation in a ball, Boundary Value Problems, 2013, vol. 2013, no. 162. doi:10.1186/1687-2770-2013-162. |
| 26 | G.Dattoli , P.E.Ricci , Laguerre-type exponents and the relevant L- circular and L-hyperbolic functions, Georgian Mathematical<br>Journal 10.,No.3(2003) 481–494. |
| 27 | Krasnoschok, M. and Vasylyeva, N., On a nonclassical fractional boundary-value problem for the Laplace<br>operator, J. Di?erential Equations, 2014, vol. 257, no. 6, pp. 1814–1839. |

| | |
|---|---|
| 28 | Karachik, V.V., Solvability conditions for the Neumann problem for the homogeneous polyharmonic equation, Di?er. Equations, 2014, vol. 50, no. 11, pp. 1455–1461. |
| 29 | Bavrin, I.I., Operators for harmonic functions and their applications, Di?er. Uravn., 1985, vol. 21, no. 1, pp. 9–15. |
| 30 | Turmetov, B.Kh., Solvability of fractional analogues of the Neumann problem for a nonhomogeneous biharmonic equation, Electronic J. Di?erential Equations, 2015, vol. 2015, no. 82, pp. 1–21. |
| 31 | Berdyshev, A.S, Cabada, A., and Turmetov, B.Kh., On solvability of some boundary value problem for polyharmonic equation with boundary operator of a fractional order, Appl. Math. Modeling, 2015, vol. 39, pp. 4548–4569. |
| 32 | Kal'menov, T.Sh. and Suragan, D., On a new method for constructing the Green function of the Dirichlet problem for the polyharmonic equation, Di?er. Equations, 2012, vol. 48, no. 3, pp. 441–445. |
| 33 | Karachik, V.V., Turmetov, B.Kh., and Bekaeva, A., Solvability of some boundary-value problems for polyharmonic equation with Hadamard–Marchaud boundary operator, Russ. Math., 2014, vol. 58, no. 7, pp. 11–24. |
| 34 | Turmetov, B.Kh. and Torebek, B.T., Modified Bavrin operators and their applications, Di?er. Equations, 2015, vol. 51, no. 2, pp. 243–254. |
| 35 | Karachik, V.V., Turmetov, B.Kh., and Bekaeva, A.E., Solvability conditions of the Neumann boundary value problem for the biharmonic equation in the unit ball, Int. J. Pure Appl. Math., 2012, vol. 81, no. 3, pp. 487–495. |
| 36 | Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге // Дифференциальные уравнения. –2014. –Т.50, N2. –С.264-268. |
| 37 | Berdyshev, A.S., Cabada, A., and Turmetov B.Kh., On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order, Acta Math. Sci., 2014, vol. 34B, no. 6, pp. 1695–1706. |
| 38 | Sadybekov M.A., TurmetovB.Kh. On analogues of periodic boundary value problems for the Laplace operator in ball //Eurasian mathematical journal. – 2012. – V.3, №1. –P. 143-146. |

| | |
|---|---|
| 39 | Gazzola, F., Grunau, H.-Ch., and Guido, S., Polyharmonic Boundary Value Problems, Berlin, 2010. |
| 40 | Sadybekov, M.A., Turmetov, B.K., Torebek, B.T. Solvability of nonlocal boundary-value problems for the Laplace equation in the ball // Electronic Journal of Differential Equations. –2014. № 157.–P. 1-14. |
| 41 | Bateman H., Erdelyi A. Higher Transcendental functions. Hipergeometric functions. Functions Legendre. — Moscow: Phiz-mathlit, 1973. — . 296 (in Russian). |
| 42 | СадыбековМ.А.,Турметов Б.Х.,Торебек Б., Об одной нелокальной задаче для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева. Серия естественно-технических наук. Астана. 2013. №4(95). С.48-56. |
| 43 | Korn G., Korn . Mathematical Handbook (for Scientists and Engineers). — oscow: Nauka, 1973. — P. 199. |
| 44 | Sadybekov M. A., Turmetov B. Kh., Muratbekova M. A. On solvability of some nonlocal boundary value problems with the Hadamard boundary operator //"Second International Conference on Analysis and Applied Mathematics": Abstract Book.-Шымкент, ЮКГУ имени М.Ауезова.-2014.-С.77. |
| 45 | Владимиров В.С. Уравнение математической физики. – М.: Наука, 1974. – 512 с. |
| 46 | Баврин И.И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференциальные уравнения. − 1988. − Т. 24, № 9. − С. 1629−1631. |