Ф-ОБ-001/033

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ-517.956.223: 517.912.

Қолжазба құқығында

Алиханов Русланбек Тахиржанович

АҚЫРЛЫ ЖӘНЕ АҚЫРСЫЗ АЙМАҚТАРДА ЭЛЛИПСТІК ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БӨЛШЕК РЕТТІ АНАЛОГТАРЫ ҮШІН НЕГІЗГІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

6М060100 – МАТЕМАТИКАмамандығы бойынша жаратылыстану ғылымдарының магистірі академиялық дәреже алу үшін магистрлік диссертациясы

Түркістан 2018

Ф-ОБ-001/033

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
ҚОЖА АХМЕТ ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

Қорғауға жіберілді:
Математика кафедрасының
меңгерушісітехн.ғ.к., доцент м.а
_____________ М.Д. Қошанова
(қолы)
«»_____________2018 ж

Магистірлік диссертация

АҚЫРЛЫ ЖӘНЕ АҚЫРСЫЗ АЙМАҚТАРДА ЭЛЛИПСТІК ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ БӨЛШЕК РЕТТІ АНАЛОГТАРЫ ҮШІН НЕГІЗГІ ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІЛІМДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ

мамандығы: 6М060100 – МАТЕМАТИКА

Магистрант___________________ Р.Т.Алиханов
(қолы) (аты-жөні, тегі)
Ғылыми жетекшісі,
физика-математика
ғылымдарының докторы,
профессор___________________ Б.Х.Турметов
(қолы) (аты-жөні, тегі)

Түркістан 2018

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбынының көкейтестілігі. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістерін және қолданыстарын зерттеуге қызығушылық соңғы жылдары арта түсуде. Себебі бұл теория көптеген қолдануларға ие, атап айтқанда бөлшек ретті дифференциалдау теориясы физикалық, химиялық процесстердегі фракталдық құбылыстарды зерртеу үшін кеңінен қолданылады. Сонымен қатар, экономика және әлеуметтік-биологиялық құбылыстардың моделдері бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер мен өрнектеледі. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер бұл қолданыстары [1-4] монография және [5-14] шолу мақалаларында қарастырылған.

Бөлшек ретті дифференциалдау және интегралдау амалдары кәдімгі интегралдармен туындылар арқылы анықталады. Дегенмен, бөлшек ретті диффернциалдау және интегралдау ұғымдарының өзіндік ерекшелігі мен әртүрлі түрлері кездеседі [4]. Бөлшек ретті операторлардың қолданылуы функциялар теориясы мен шеттік есептерді терең түсінуді және кең ауқымды есептерді қамтитын шешімдердің жаңа класын табуға ықпал жасайды.

Бұл амалдардың кәдімгі туынды және интегралдау амалдарынан өзгеше болған ерекше қасиеттеріде бар. Мысал үшін бөлшек ретті интегралдау амалы жартты топтық, коммутативтік қасиеттерге ие болады. Бірақ, бөлшек ретті дифференциалдау амалы мұндай қасиеттерге ие емес, яғни $y(t)$ функциясының $D^{\alpha}y(t)$ туындысынан алынған D^{β} туынды үшін

$$D^{\beta}\left[D^{\alpha}y\right](t)=D^{\alpha}\left[D^{\beta}y\right]y(t), D^{\beta}\left[D^{\alpha}y\right](t)=D^{\alpha+\beta}y(t),$$

теңдіктер орындалмайды.

Бөлшек ретті туындының осы қасиеттерін ескере отырып бөлшек ретті туындының тағыда бір түрі, атап айтқанда секвенциал түрдегі бөлшек ретті туынды ұғымы енгізіледі [4,7,15-17].

Бөлшек ретті туынды ұғымы негізінде эллипстік теңдеулер үшін классикалық шеттік есептерді осы теңдеулердің бөлшек ретті аналогтары үшін қарастыруға болады.

Бұл диссертациялық жұмыста Лаплас теңдеуінің секвенциал туынды қатысқан бөлшек ретті аналогтары үшін төртбұрыш сияқты шектелган және жарты жазықтық сияқты шектелмеган аймақтарда шеттік есептер зерттелінеді.

Бұл есептердің корректлігі, яғни шешімнің бар және жалғыз болу шарттары айқындалады.

Мұндай теңдеулердің экономикалық есептердегі қолданыстары [22] жұмыста баяндалған. Классикалық Риман-Лиувилл немесе Капуто операторлаы қатысқан бөлшек ретті Лаплас теңдеуі үшін Дирихле есептері [23-25] жұмыстарында қарастырылған. Мысалыға О.Масаеваның [25] жұмысы төртбұрыш аймақта

$$\Delta_{\alpha}u(x,y)\equiv u_{xx}(x,y)+D_{y}^{\alpha}u(x,y)=0,(x,t)\in\Omega,$$

теңдеуі үшін Дирихле шеттік есебін классикалық шешімін зертеуге арналған. Бұл жерде D_y^{α} операторы

$$D_{y}^{\alpha}u(x,y)=\frac{1}{\Gamma(2-\alpha)}\int_{0}^{y}(y-\tau)^{1-\alpha}u_{\tau\tau}(x,\tau)d\tau$$

Капуто операторы ретінде беріледі.

Лаплас операторының бөлшек ретті аналогтары [26-32] жұмыстарында зерттелінген.

Бұл қарастырылатын диссертациялық жұмыста Δ_{α}- Лаплас операторының бөлшек ретті аналогы секвенциалды $D_y^{\alpha}D_y^{\beta}$ туынды арқылы беріледі және бұл оператор

$$\Delta_{\alpha}=\frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}}+D_{y}^{\alpha}D_{y}^{\beta}, \tag{0.3}$$

түрінде анықталады. Егер (0.3) теңдікпен анықталған операторға сәйкес келетін теңдеуі үшін (0.2) түріндегі берілген шеттік шарт қарастырылса, ол α және β парметрлерінің кез-келген $0<\alpha,\beta\leq 1$ мәндері үшін қисынды болады.

Диссертациялық жұмыста (0.3) операторға сәйкес келетін Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін төртбұрыш және жарты жазықтықта негізгі шеттік есептердің шешілімділігі зерттелінеді. Δ_{α} операторы О.Масаеваның [23-25] жұмыстарында қарастырылған оператордан өзгеше болғандықтан, біз бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер үшін қисынды қойылған есептердің жаңа класстарына ие боламыз.

Бұл түрдегі секвенциал туынды қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер зерттелмеген. Сондықтан бұл сияқты есептерді шешу актуалды мәселе болып табылады.

Нәтижелердің ғылыми жаңалығы. Бұл бағытта негізгі нәтижелер бүтін ретті дифференциалдық теңдеулер үшін алынған. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін мұндай есептер дербес жағдайларда қарастырылған.

Жұмыстың мақсаты мен міндеті. Эллипстіктектес теңдеулердің бөлшек ретті аналогтары үшін қисынды қойылған есептердің жаңа кластарын зерттеу. Негізгі міндеттеріне өтсек, Спектралдық әдісті қолданып бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық шарттарымен берілген есептердің шешімі бар, жалғыз болуы туралы теоремаларды дәлелдеу. Шешімнің интегралдық түрін алу.

Зерттеу әдістері. Бұл ғылыми жұмысты жүргізуде математикалық физика теңдеулері, математикалық талдау, функционалдық талдау, интегралдық теңдеулер, Фурье қатарлары териясы және Фурье түрлендірулері әдістері қолданылады.

Автордың жеке үлесі. Есептердің қойылуы автордың ғылыми жетекшісіне тиісті. Теориялық есептеулер мен негізгі ғылыми қорытындылар, диссертанттың жан-жақты көлемді зерттеулері негізінде шығарылды. Алынған нәтижелер мен оларды өңдеу, материалдарды баспаға шығару және конференцияларда жасалған баяндамаларды дайындау жұмыстарын диссертант өзі орындады.

Жұмыстың сынақтан өтуі.Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша ХҚТУ-нің "Математика" кафедрасы ғылыми семинарында баяндамалар жасалынды.

Жұмыстың жариялылығы. Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша 1 ғылыми мақала және 1 конференция материалдарында тезис жарияланған.

Диссертациялық жұмыстың көлемі мен құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 2тараудан, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Негізгі материал 66 бетпен берілген, 63 қолданылған әдебиеттер атаулары келтірілген.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

Диссертациялық жұмыста Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогтары үшін төртбұрыш және жарты жазықтықта қисынды қойылған шеттік есептердің жаңа кластары зерттелінді. Шешімнің бар және жалғыз болу шарттары анықталды.

АҢДАТПА

Жұмыста Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін жарты кеңістікте Дирихле есебінің шешілімділігі туралы мәселелер зерттелінеді. Қарастырылатын есептің шешімін табу үшін Фурьенің интегралдық түрлендіру әдісі қолданылады. Соболев түріндегі функционалдық кеңістікте зерттелінетін есептің шешімінің бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденген.

Кілт сөздер: бөлшек ретті туынды, Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы, функционалдық кеңістік, Фурье түрлендіруі, жалғыздық, шешілімділік.

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется вопросы разрешимости задачи Дирихле для дробного аналога уравнения Лапласа в полупространтстве.Дляреშение рассматриваемой задачи применяется метод интегрального преобразования Фурье. Доказаны теоремы о существования и единственности решения исследуемой задачи в функциональных пространствах типа Соболева.

Ключевые слова: дробная производная, дробный аналог уравнения Лапласа, функциональное пространство, преобразования Фурье,единственность, разрешимость.

ABSTRACT

In this paper we investigate the solvability of the Dirichlet problem for a fractional analog of the Laplace equation in a half-space. To solve the problem under consideration,we use the Fourier integral transform method. Theorems on the existence and uniqueness of the solution of the problem under investigation in function spaces of Sobolev type are proved.

Keywords: inverse problem, potential theory, boundary integrals, polar coordinates, spherical coordinates, ill-posed problems, regularization method, potential.fractional derivative, fractional analog of the Laplace equation, function space, Fourier transforms, uniqueness, solvability.

ÖZET

Bu tezde Laplace denkleminin kesirli mertebeden analogu için yarı uzayda Dirichlet probleminin çözümleri araştırılmış. Fourier İntegrali ve Dönüşümü yöntemi kullanıldı. Sobolev fonksiyonel uzayında çözümün varlığı ve tekliğini belirleyen teoremlerin ispatı yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: kesirli türev, Laplace denkleminin kesirli analoğu, fonksiyonel uzay, Fourier dönüşümleri, teklik, çözülebilirlik.

1 БӨЛШЕК РЕТТІ ЖӘЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ШЕШІМДЕРІН ЗЕРТТЕУ

Бұл бөлімде біз секвенциал және Капуто туындылары қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістерін және оларға қойылған Дирихле есебінің шешілімділігін зерттейміз.

1.1 Бөлшек ретті интеграл және туынды ұғымдары

Алдымен бөлшек ретті интеграл және туынды ұғымдары туралы мәліметтерді келтірейік. Бұл мәліметтер негізінен [4] әдебиеттен алынған.

$[a,b]$ аралығында берілген $f(t)$ функциясы үшін

$$I_a^\alpha[f](t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)d\tau, t>a \tag{1.1.1}$$

өрнекке Риман-Лиувиллдың $\alpha-$ ретті интегралы деп атаймыз. Бұл жерде $\Gamma(\alpha)$ тұрақтысы Эйлердің гамма функциясы және ол

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^\infty z^{\alpha-1}e^{-x}dx$$

интеграл түрінде анықталады.

Біздің кейінгі зерттелерімізде негізінде $a=0$ болған жағдай көп кездеседі, сол себептен мұндай жағдайда (1.1.1) – формула арқылы берілген интегралды $I_0^\alpha=I$ түрінде белгілейміз. Сонымен қатар біз кейінгі зерттеулерімізде $I_a^0 f(t)=f(t)$ деп есептейміз. Себебі, $\alpha\to 0$ шектік жағдайда $\lim\limits_{\alpha\to 0} I_a^\alpha f(t)=f(t)$ теңдіктің орынды болатыны [33] жұмысында дәлелденген.

α шаманың $\alpha=n, n=1,2,...,$ бүтін мәндерінде I_a^n интегралы үшін

$$I_a^n f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau\equiv\int_a^t dt_1\int_a^{t_1}dt_2\dots\int_a^{t_{n-1}}f(t_n)dt_n \tag{1.1.2}$$

теңдікдің дұрыс болады.

α шама $n-1<\alpha\le n, n=1,2,...$ мәндерін қабылдайды деп есептейте, осы сандарға сәйкес келетін бөлшек ретті туынды анықтамасын берейік.
$[a,b]$ аралығында берілген $f(t)$ функциясы үшін

$${}_{RL}D_a^\alpha f(t)=\frac{d^n}{dt^n}I_a^{n-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{d^n}{dt^n}\int_a^t(t-\tau)^{n-1-\alpha}f(\tau)d\tau, t>a \tag{1.1.3}$$

өрнекті Риман-Лиувилл түріндегі $\alpha-$ ретті туынды айтамыз.
$\alpha=n$ болған жағдайда $I_a^{n-n}f(t)=I_a^0 f(t)=f(t).$ Сол себептен

$${}_{RL}D_a^n f(t)=\frac{d^n}{dt^n}f(t). \tag{1.1.4}$$

Сонымен α шаманің бүтін болған мәндерінде бөлшек ретті туынды кәдімгі бүтін ретті туындыға сәйкес келеді.

Мына өрнекті

$$ {}_C D_a^{\alpha} f(t) = J^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau, t > a \quad (1.1.5) $$

Капуто түріндегі $\alpha-$ ретті туынды деп айтады.

Егер $\alpha = n$ болса, онда

$$ {}_C D_a^{n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \quad (1.1.6) $$

теңдікке келеміз.

Бұл жұмыста бөлшек ретті туындының ${}_C D_a^{\alpha}$ - Капуто түрі және оған қатысты секвенциал туынды қарастырылады. Туындының сол түрінде айтып кетейік.

Айталық, $0 \le \alpha, \beta \le 1$ шарттармен шектелген сандар берілсін.

$[a,b]$ аралығында берілген $f(t)$ функциясы үшін

$$ D_a^{\alpha+\beta} f(t) = D_a^{\alpha}\left[D_a^{\beta} f\right](t) \quad (1.1.7) $$

формуламен анықталған операторды секвенциал түріндегі бөлшек ретті туынды деп атаймыз.

1.2 Секвенциал туындылы бөлшек ретті дифференциалдық теңдеуді шешу туралы

Айталық, $0 < \alpha, \beta \le 1$ сандары берілсін. $(0,l)$ аймағында секвенциал туынды қатысқан мына

$$ D^{\alpha+\beta}[y](t) - \lambda y(t) = 0,\ t \in (0,l),\ \lambda > 0. \quad (1.2.1) $$

жәй дифференциалдық теңдеуді зерттейміз. Бұл жерде

$$ D^{\alpha+\beta} = {}_C D^{\alpha} \cdot {}_C D^{\beta} $$

Мына

$$ y(t) \in C[0,l],\ D^{2\alpha} y(t) \in C(0,l) $$

шарттарды қанағаттандыратын функциялардын класында жататын және (1.2.1) теңдеуді тепе-теңдікке айналдыратын $y(t)$ функциясын осы теңдеудің шешімі деп қабылдаймыз.

Бұл сияқты бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулерді шешу әдістері көптеген жұмыстарда зерттелінген. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің айқын шешімін құру, бұл теңдеулер үшін Коши түріндегі есептерді шешу үшін Лапластың және Фурьенің интегралдық түрлендірулер әдістері, операциялық қисап әдісі, Вольтерра түріндегі интегралдық теңдеуіне келтіру, біртіндеп жуықтау әдісі, тағыда сол сияқты басқа әдістер қолданылған [34-35].

Енді бізге керекті болатын кейбір көмекші мәліметтерді келтірейік.

Лемма 1.2.1. Егер $\alpha,\beta\ge 0,\ f(t)\in L_1(0,l)$ болса, онда келесі

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta}[f]\right](t)=I^{\beta}\left[I^{\alpha}[f]\right](t)=I^{\alpha+\beta}[f](t). \tag{1.2.2}$$

теңдіктер орынды болады.

Дәлелдеу. Риман - Лиувилл интегралының анықтамасы бойынша:

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta}[f]\right](t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}I^{\beta}[f](t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(\beta)}\int_0^{\tau}(\tau-\xi)^{\beta-1}f(\xi)\,d\xi dt=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\int_0^t f(\xi)\int_{\xi}^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\,d\xi dt.$$

Енді $\int_{\xi}^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\,d\xi dt$ интегралды есептейік. Осы интегралда айнымалы

$$\tau=t-(\tau-\xi)\cdot S,\ dt=-(t-\xi)ds$$

түрінде ауыстырсақ, онда мынандай нәтижеге ие боламыз:

$$\int_{\xi}^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-\xi)^{\beta-1}\,dt=\int_0^1 s^{\alpha-1}(1-s)^{\beta-1}\,ds\cdot(t-\xi)^{\alpha-1+\beta-1+1}=(t-\xi)^{\alpha+\beta-1}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Сонда

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta}[f]\right](t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1}f(\xi)\,dt.$$

Бөлшек ретті интегралдың анықтамасынан

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\xi)^{\alpha+\beta-1} f(\xi)\,dt = I^{\alpha+\beta}[f](t).$$

Сонымен келесідей

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta}[f]\right](t) = I^{\alpha+\beta}[f](t)$$

теңдік дәлелденді.

Егер бұл теңдікте α және β көрсеткіштердің орнын ауыстырсақ, онда келесі теңдікке ие боламыз:

$$I^{\beta}\left[I^{\alpha}[f]\right](t) = I^{\beta+\alpha}[f](t).$$

Сол себептен

$$I^{\alpha}\left[I^{\beta}[f]\right](t) = I^{\beta}\left[I^{\alpha}[f]\right](t) = I^{\alpha+\beta}[f](t)$$

теңдікте орынды. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.2.2. Егер $0<\alpha\le 1$ және $f(t)\in C^1[0,l]$ болса, онда келесідей

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha}[f]\right](t) = f(t) - f(0). \qquad (1.2.3)$$

теңдік орынды болады:

Дәлелдеу. Капутоның D^{α} дифференциалдық операторының анықтамасы бойынша $D^{\alpha}[f](t) = I^{1-\alpha}[f'](t)$. Бұл операторға I^{α} интегралдық операторды қолдану арқылы

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha}[f]\right](t) = I^{\alpha}\left[I^{1-\alpha}[f']\right](t)$$

теңдікті, ал бұдан алдыңғы 1.2.1 – леммада көрсетілген (1.2.2) – теңдік бойынша $I^{\alpha}I^{1-\alpha} = I^{1}$.

Олай болса,

$$I^{\alpha}\left[I^{1-\alpha}[f']\right](t) = I[f'](t) \equiv \int_0^t f'(t)\,dt = f(t) - f(0).$$

Сонымен (1.2.3) теңдік, яғни лемма дәлелденді.

Келесі лемманың дәлелдемесі [45, 123 бет] жұмыста көрсетілген.

Лемма 1.2.3. Айталық $f(t)$ функциясы $L_1(0,l)$ класына тиісті болсын. Онда

$$z(t)=f(t)+\lambda\int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}z(\tau)d\tau$$

Вольтеррдің екінші түрдегі интегралдық теңдеуінің шешімі бар, жалғыз және бұл шешім

$$z(t)=f(t)+\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau \qquad (1.2.4)$$

теңдігімен анықталады.

Бұл жерде

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

Миттаг-Лиффер түріндегі функция.

Келесі теоремада осы бөлімнің негізгі нәтижесі, яғни (1.2.1) - теңдеудің жалпы шешімі туралы мәлімет баяндалады.

Теорема 1.2.1. Кез келген $\alpha,\beta\in(0,1]$ сандарына сәйкес келетін (1.2.1) - теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+C_2t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right) \qquad (1.2.5)$$

түрінде беріледі. Бұл жердегі C_1,C_2 - кез келген тұрақтылар болып табылады.

Дәлелдеу. Айталық $y(t)$ функциясы (1.2.1) теңдеудің қандайда бір шешімі болсын дейік. Осы шешімге $D^{\alpha+\beta}=D^{\alpha}\cdot D^{\beta}$ операторларын қолданайықта, оның нәтижесін

$$u(t)=D^{\alpha+\beta}[y](t)=D^{\alpha}\left[D^{\beta}[y]\right](t)$$

түрінде белгілейік.

Осы нәтижедегі $u(t)=D^{\alpha}\left[D^{\beta}[y]\right](t)$ теңдікке Риман – Лиувиллдің $I^{\alpha+\beta}$ интегралдық операторын қолданайық. Егер Риман – Лиувиллдің бөлшек ретті интегралдық және Капуто түріндегі дифференциалдық операторлардың анықтамаларына және қасиеттеріне сәйкес

$$I^{\alpha+\beta}\left[I^{1-\alpha}\left[\frac{d}{dt}D^{\beta}y\right]\right](t)=I^{1+\beta}\left[\frac{d}{dt}D^{\beta}y\right](t)=I^{\beta}\left[I\left[\frac{d}{dt}D^{\beta}y\right]\right](t)=$$

$$=I^{\beta}\left[D^{\beta}[y]-D^{\beta}[y](0)\right](t)=y(t)-y(0)-D^{\beta}[y](0)\cdot\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$$

нәтижеге ие боламыз.

Бұл жерде біз $f(t)=t^0$ функцияның $I^{\beta}[f](t)=I^{\beta}t^0$ интегралы үшін

$$I^{\beta}t^0=\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$$

нәтижені есепке алдық .

Жоғарыдағы есептеу нәтижесінде, $C_1=y(0),C_2=D^{\beta}[y](0)$ деп алсақ, онда

$$y(t)=C_1+C_2\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+I^{\alpha+\beta}[u](t).$$

Демек, егер $u(t)=D^{\alpha}\left[D^{\beta}[y]\right](t)$ болса, онда белгісіз $y(t)$ функциясы

$$y(t)=C_1+C_2\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}+I^{\alpha+\beta}[u](t).$$

теңдіктен анықталады.

Егер осындай теңдікті есепке алып, (1.2.1) - теңдеуге I^{α} және I^{β} операторларын біртіндеп қолданатын болсақ, бұдан

$$I^{\alpha}I^{\beta}\left[D^{\alpha+\beta}[y]\right](t)-\lambda I^{\alpha+\beta}[y](t)=0,$$

ал жоғарыдағы есептеулерді есепке алып және $h(t)=C_1+C_2\frac{t^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}$ белгілеп алсақ, онда

$$y(t)=h(t)+\frac{\lambda}{\Gamma(\alpha+\beta)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha+\beta-1}y(\tau)\,d\tau \qquad (1.2.6)$$

түріндегі интегралдық теңдеуге келеміз.

Сонымен бастапқы берілген (1.2.1) бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеу, Вольтерраның 2-ші түрдегі (1.2.6) интегралдық теңдеуге эквивалент болатынын көреміз.

Егер (1.2.3)-лемманың нәтижесін ескерсек, онда (1.2.6) интегралдық теңдеудің шешімі бар, жалғыз және оны

$$y(t)=h(t)+\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)h(\tau)\,dt \qquad (1.2.7)$$

түрінде өрнектеуге болатынын көреміз.

Біз жоғарыда $h(t)=C_1+C_2\dfrac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}$ деп алғанбыз, осы функцияны (1.2.7) теңдіктің оң жағына қойсақ, онда

$$y(t)=C_1+C_2\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}+C_1\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)d\tau+$$

$$+\frac{\lambda C_2}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)\tau^\beta d\tau$$

түріндегі теңдік келіп шығады.

Осы теңдіктің оң жағындағы интегралдарды зерттеуге өтейік. Миттаг-Леффлер функциясының өрнегінен пайдаланып, бірінші интеграл үшін мынандай амалдарды орындаймыз:

$$\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)d\tau=\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{(t-\tau)^{(\alpha+\beta)k}}{\Gamma\left((\alpha+\beta)k+(\alpha+\beta)\right)}\right]d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma\left((\alpha+\beta)k+(\alpha+\beta)\right)}\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta-1}d\tau$$

Мұндағы соңғы интегралды есептесек, онда

$$\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta-1}d\tau=t^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta}\int_0^1 (1-\xi)^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta-1}d\xi=\frac{t^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta}.$$

Сонда,

$$\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma\left((\alpha+\beta)k+(\alpha+\beta)\right)}\frac{t^{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta}}{(\alpha+\beta)k+\alpha+\beta}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}t^{(\alpha+\beta)(k+1)}}{\Gamma\left((\alpha+\beta)(k+1)+1\right)}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^j t^{(\alpha+\beta)j}}{\Gamma\left((\alpha+\beta)j+1\right)}=E_{\alpha+\beta,1}(\lambda t^{\alpha+\beta})-1.$$

Бұдан,

$$C_1 + C_1\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)d\tau = C_1 + C_1\left[E_{\alpha+\beta,1}(\lambda t^{\alpha+\beta}) - 1\right] = C_1 E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right).$$

Екінші интегралдыда осылайша түрлендіруге болады. Шынында да

$$\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)\tau^\beta d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1}\tau^\beta \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k (t-\tau)^{(\alpha+\beta)k}}{\Gamma((\alpha+\beta)k+\alpha+\beta)}d\tau =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma((\alpha+\beta)k+\alpha+\beta)}\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha+\beta)(k+1)-1}\tau^\beta d\tau\,.$$

Бұдан

$$\int_0^t (t-\tau)^{(\alpha+\beta)(k+1)-1}\tau^\beta d\tau = t^{(\alpha+\beta)(k+1)+\beta}\int_0^1 (1-\xi)^{(\alpha+\beta)(k+1)-1}\xi^\beta d\xi = \frac{\Gamma\left[(\alpha+\beta)(k+1)\right]\Gamma(\beta+1)}{\Gamma\left[(\alpha+\beta)(k+1)+\beta+1\right]}t^{(\alpha+\beta)(k+1)+\beta}$$

Сонда екінші интеграл

$$\frac{\lambda C_2}{\Gamma(\beta+1)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)\tau^\beta d\tau = C_2\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{t^{(\alpha+\beta)(k+1)+\beta}}{\Gamma\left[(\alpha+\beta)(k+1)+\beta+1\right]} =$$

$$= C_2\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^j\frac{t^{(\alpha+\beta)j+\beta}}{\Gamma\left[(\alpha+\beta)j+\beta+1\right]} = C_2\left[t^\beta E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right) - \frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)}\right]$$

шамаға тең.

Олай болса,

$$C_2\frac{t^\beta}{\Gamma(\beta+1)} + C_2\lambda\int_0^t \tau^\beta (t-\tau)^{\alpha+\beta-1} E_{\alpha+\beta,\alpha+\beta}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha+\beta}\right)d\tau = C_2 t^\beta E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right).$$

Сонымен, (1.2.1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t) = C_1 E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right) + C_2 t^\beta E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)$$

формула, яғни (1.2.5) теңдік орынды болады.Теорема дәлелденді.

Салдары. Егер $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ болса, онда (1.2.1) - теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{1,1}(\lambda t)+C_2\sqrt{t}E_{1,3/2}(\lambda t)$$

түрінде беріледі. Бұл жердегі C_1, C_2 - кез келген тұрақтылар болып табылады.

Бұл жерде

$$E_{1,1}(\lambda t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^k}{\Gamma(k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^k}{k!}=e^{\lambda t},$$

$$E_{1,3/2}(\lambda t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^k}{\Gamma(k+3/2)}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^k}{(1/2)\Gamma(k+1/2)}=2\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^k}{\Gamma(k+1/2)}=$$

$$=2e^{\lambda^2t^2}\left(1+erf(\lambda t)\right).$$

Олай болса, жалпы шешім

$$y(t)=C_1e^{\lambda t}+C_2 2\sqrt{t}e^{\lambda^2t^2}\left(1+erf(\lambda t)\right).$$

1.3 Капуто операторы қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеуді шешу туралы

Бұл бөлімде біз функцияның секвенциал туынысымен кәдімгі бөлшек ретті туындысы арсындағы байланыстары, өзгешеліктері туралы мәліметтерді келтіреміз.

Айталық, $0<\alpha,\beta\leq 1$ сандары берілсін. $(0,l)$ аймағында Капуто туындысы қатысқан мына

$$D^{\alpha+\beta}[y](t)-\lambda y(t)=0,\ t\in(0,l),\ \lambda>0. \tag{1.3.1}$$

жәй дифференциалдық теңдеуді зерттейміз. Мұнда $D^{\alpha+\beta}$ туынды үшін екі жағдай болуы мүмкін:

1) егер $\frac{1}{2}<\alpha,\beta\leq 1$ болса, онда

$$D^{\alpha+\beta}=I^{2-(\alpha+\beta)}\frac{d^2}{dt^2},$$

2) $0<\alpha,\beta\leq\frac{1}{2}$ болса, онда

$$D^{\alpha+\beta}=I^{1-(\alpha+\beta)}\frac{d}{dt}$$

Алдымен $\frac{1}{2} < \alpha, \beta \le 1$ болған жағдайды қарастырамыз. Зерттеу ыңғайлы болуы үшін $\gamma = \alpha + \beta$ түрінде белгілеп алайық. Онда (1.3.1) теңдеу мына

$$D^{\gamma}\left[y\right](t) - \lambda y(t) = 0,\ t \in (0,l),\ \lambda > 0. \tag{1.3.2}$$

түрде жазылады.Мұнда $1 < \gamma \le 2, D^{\gamma} = I^{2-\gamma}\frac{d^2}{dt^2}.$

(1.3.2) теңдеудің шешімі деп $y(t) \in C[0,l], D^{\gamma}y(t) \in C(0,l)$ болатындай және (1.3.2) теңдікті $(0,l)$ интервалдың барлық нүктелерінде қанағаттандыратын $y(t)$ функциясына айтамыз.

Келесі теоремада осы бөлімнің негізгі нәтижесі, яғни (1.3.2) - теңдеудің жалпы шешімі туралы мәлімет беріледі.

Теорема 1.3.1. Егер $\frac{1}{2} < \alpha, \beta \le 1$ болса, онда (1.3.2) - теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t) = C_1 E_{\gamma,1}\left(\lambda t^{\gamma}\right) + C_2 t E_{\gamma,2}\left(\lambda t^{\gamma}\right) \tag{1.3.3}$$

түрінде беріледі. Бұл жердегі C_1, C_2 - кез келген тұрақтылар болып табылады.

Дәлелдеу. $y(t)$ функциясы (1.3.1) теңдеудің шешімі болсын деп жориық. Бұл шешімге D^{γ} операторын қолданайықта, нәтижені

$$u(t) = D^{\gamma}y(t)$$

түрінде белгілейік.

$u(t) = D^{\gamma}y(t)$ теңдікке I^{γ} интегралдық операторды екі жақтан қолданайық. Бұл амалдың нәтижесін анықтау үшін, алдымен $I^{\gamma}[D^{\gamma}[y]](t)$ композиция нәтижесін анықтаймыз. Егер $D^{\gamma}[y](t) = I^{2-\gamma}[y''](t)$ және $I^{\gamma}I^{2-\gamma} = I^2$ теңдіктерді есепке алсақ, онда $I^{\gamma}[D^{\gamma}[y]](t)$ функциясы үшін мынандай нәтижеге келеміз:

$$I^{\gamma}[D^{\gamma}[y]](t) = I^2[y''](t) = \int_0^t (t-\tau)y''(\tau)d\tau = (t-\tau)y'(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + \int_0^t y'(\tau)d\tau =$$

$$= -ty'(0) + y(t) - y(0).$$

Жоғарыдағы есептеу нәтижелерінде, $C_1 = y(0), C_2 = y'(0)$ деп белгілеп алсақ, онда

$$y(t) = C_1 + C_2 t + I^\gamma[u](t)$$

Сонымен, егер $u(t) = D^\gamma y(t)$ болса, онда белгісіз $y(t)$ функциясы

$$y(t) = C_1 + C_2 t + I^\gamma[u](t)$$

теңдіктен анықталады. $C_1 + C_2 t$ функциясын $h(t)$ деп белгілеп алайық, яғни $h(t) = C_1 + C_2 t$ болсын.

Егер осы теңдікті есепке алып, (1.3.1) - теңдеуге I^γ операторын қолданатын болсақ, бұдан

$$I^\gamma\left[D^\gamma[y]\right](t) - \lambda I^\gamma[y](t) = 0,$$

немесе

$$y(t) = h(t) + \frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} y(\tau)\,d\tau \qquad (1.3.4)$$

түріндегі интегралдық теңдеуге келеміз.

Сонымен, (1.3.1) бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеу, Вольтерраның 2-ші түрдегі (1.3.4) интегралдық теңдеуіне эквивалент болатынын көреміз.

Жоғарыда келтірілген 1.2.3 - лемманың нәтижесінен (1.3.4) интегралдық теңдеудің шешімі бар, жалғыз және оны

$$y(t) = h(t) + \lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^\gamma\right) h(\tau)\,dt \qquad (1.3.5)$$

түрінде өрнектеуге болатынын келіп шығады.

$h(t)$ функциясы $h(t) = C_1 + C_2 t^\gamma$ түрінде анықталады. Бұл функцияны (1.3.5) теңдіктің оң жағына қойып

$$y(t) = C_1 + C_2 t + C_1\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^\gamma\right) d\tau +$$

$$+\lambda C_2\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^\gamma\right) \tau\, d\tau$$

түріндегі теңдік келіп шығады.

Осы теңдіктің оң жағындағы интегралдарды зерттейік. Миттаг-Леффлер функциясының түрінен пайдаланып, бірінші интеграл мына нәтижеге ие болмыз:

$$\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)d\tau = \lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \frac{(t-\tau)^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\right]d\tau =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma k+\gamma-1}d\tau .$$

Бұл жердегі соңғы интегралды есептесек, онда

$$\int_0^t (t-\tau)^{\gamma k+\gamma-1}d\tau = t^{\gamma k+\gamma}\int_0^1 (1-\xi)^{\gamma k+\gamma-1}d\xi = \frac{t^{\gamma k+\gamma}}{\gamma k+\gamma}.$$

Сонда,

$$\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)d\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\frac{t^{\gamma k+\gamma}}{\gamma k+\gamma} =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}t^{\gamma(k+1)}}{\Gamma(\gamma(k+1)+1)} = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda^{j}t^{\gamma j}}{\Gamma(\gamma j+1)} = E_{\gamma,1}(\lambda t^{\gamma})-1 .$$

Бұдан,

$$C_1 + C_1\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)d\tau = C_1 + C_1\left[E_{\gamma,1}(\lambda t^{\gamma})-1\right] = C_1 E_{\gamma,1}\left(\lambda t^{\gamma}\right).$$

Екінші интегралдыда осылайша түрлендіруге болады. Шынында да

$$\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)\tau d\tau = \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}\tau\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k (t-\tau)^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}d\tau =$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma(k+1)-1}\tau d\tau .$$

Бұдан

$$\int_0^t (t-\tau)^{\gamma(k+1)-1}\tau^{\beta}d\tau = t^{\gamma(k+1)+1}\int_0^1 (1-\xi)^{\gamma(k+1)-1}\xi d\xi = \frac{\Gamma\left[\gamma(k+1)\right]\Gamma(2)}{\Gamma\left[\gamma(k+1)+2\right]}t^{\gamma(k+1)+1}$$

Сонда екінші интеграл

$$\lambda C_2\int_0^t \left(t-\tau\right)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^{\gamma}\right)\tau d\tau = C_2\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{t^{\gamma(k+1)+\beta}}{\Gamma\left[\gamma(k+1)+2\right]}=$$

$$=C_2\sum_{j=1}^{\infty}\lambda^{j}\frac{t^{\gamma j+\beta}}{\Gamma\left(\gamma j+2\right)}=C_2\left[tE_{\gamma,2}\left(\lambda t^{\gamma}\right)-t\right]$$

шамаға тең.

Олай болса,

$$C_2t+C_2\lambda\int_0^t \tau\left(t-\tau\right)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^{\gamma}\right)d\tau = C_2tE_{\gamma,2}\left(\lambda t^{\gamma}\right).$$

Сонымен, (1.3.2) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{\gamma,1}\left(\lambda t^{\gamma}\right)+C_2tE_{\gamma,2}\left(\lambda t^{\gamma}\right)$$

формула, яғни (1.3.3) теңдік орынды болады.Теорема дәлелденді.

Салдары 1.3.1. Егер $\frac{1}{2}<\alpha,\beta\le 1$ болса, онда (1.3.1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+C_2tE_{\alpha+\beta,2}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)$$

формуламен анықталады.

Енді екінші жағдай, яғни $0<\alpha,\beta\le 1/2$ аралықта өзгергенде (1.3.2) теңдеудің жалпы шешімін табайық.

Бұл жағдайда (1.3.2) дифференциалдық теңдеу

$$I^{1-\gamma}\left[y'\right](t)-\lambda y\left(t\right)=0,$$

түрге келеді.

Бұл теңдіктің екі жағына I^{γ} операторын қолдансақ, онда

$$y(t)-y(0)-\lambda I^{\gamma}y\left(t\right)=0,$$

немесе

$$y(t)=C+\frac{\lambda}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1}y\left(\tau\right)d\tau$$

интегралдық теңдеуді аламыз. Мұнда $C-$ тұрақты. тағыда 1.2.3 – лемманың нәтижесі бойынша, бұл теңдеудің шешімі

$$y(t)=C+\lambda C\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)d\tau .$$

Соңғы интегралды есептейік. Миттаг Леффлер функциясының анықтамасынан

$$\lambda\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}E_{\gamma,\gamma}\left(\lambda(t-\tau)^{\gamma}\right)d\tau=\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{(t-\tau)^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma k+\gamma-1}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{k+1}}{\Gamma(\gamma k+\gamma)}\frac{\Gamma(\gamma k+\gamma)}{\Gamma(\gamma k+\gamma+1)}t^{\gamma k+\gamma}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{t^{\gamma k+\gamma}}{\Gamma(\gamma k+\gamma+1)}=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k}\frac{t^{\gamma k}}{\Gamma(\gamma k+1)}=E_{\gamma,1}(\lambda t^{\gamma})-1.$$

Онда

$$y(t)=C+C\left(E_{\gamma,1}(\lambda t^{\gamma})-1\right)=CE_{\gamma,1}(\lambda t^{\gamma}).$$

Сонымен мынандай теорема дәлелденді.

Теорема 1.3.2. Егер $\frac{1}{2}<\alpha,\beta\le 1$ болса, онда (1.3.1) теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=CE_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)$$

формуламен анықталады.

Ескерту. Егер 1.2.1 - Теорема, 1.3.1 - Теорема және 1.3.2 – Теоремалардың нәтижелерін салыстырып, секвенциал және Капуто операторы қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің ерекшеліктерін айтып кетуге болады. Бұл ерекшеліктің негізгісі:

1) Капуто операторы қатысқан теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны, $\frac{1}{2}<\alpha,\beta\le 1$ болғанда екіге, ал $0<\alpha,\beta\le\frac{1}{2}$ болғанда бірге тең;

2) секвенциал туынды қатысқан теңдеудің сызықтық тәуелсіз шешімдерінің саны, кез келген $0<\alpha,\beta\le 1$ сандары үшін екеу болады.

Бізге келесі бөлімдерде $E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)$ функциясының асимптотикалық бағалаулары керек болады. Осы туралы кейбір мәліметтерді келтірейік.

[4] жұмысында Миттаг – Леффлер түріндегі

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$$

функциясының $|z|\to\infty$ ұмтылғандағы асимптотикалық бағалаулары келтірілген. Бұл бағалаулар төмендегідей:

1) егер $0<\alpha<2$ және μ саны $|\arg(z)|\le\mu$ үшін

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\alpha}z^{(1-\beta)/\alpha}e^{z^{1/\alpha}}-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha k)}\frac{1}{z^k}+O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right),|z|\to\infty \qquad (1.3.6)$$

2) егер $0<\alpha<2$ және $\mu\le\ |\arg(z)|\ \le\pi$ үшін

$$E_{\alpha,\beta}(z)=-\sum_{k=1}^{N}\frac{1}{\Gamma(\beta-\alpha k)}\frac{1}{z^k}+O\left(\frac{1}{z^{N+1}}\right),|z|\to\infty \qquad (1.3.7)$$

1.4 Секвенциал туындылы бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Дирихле есебі

Бұл бөлімшеде секвенциал туынды қатысқан (1.2.1) теңдеу үшін классикалық Дирихле есебінің шешілімділігін зерттейміз.

Айталық, $0<\alpha,\beta\le 1$ берілсін және $\lambda>0, D^{\alpha+\beta}={}_C D^{\alpha}\cdot{}_C D^{\beta}$ болсын. Келесі Дирихле есебін қарастырайық:

$$D^{\alpha+\beta}y(t)-\lambda y(t)=0,\ \ 0<t<1 \qquad (1.4.1)$$

$$y(0)=a, y(1)=b. \qquad (1.4.2)$$

Бұл жердегі a және b - белгілі тұрақтылар.

(1.4.1)-(1.4.2) есептің шешімі деп $y(t)\in C[0,1], D^{\alpha+\beta}y(t)\in C(0,1)$ шарттар орындаладтындай, (1.4.1) және (1.4.2) шарттарын қанағаттандыратын функциялардың класынан аламыз.

1.2.1 – Теореманың нәтижесі, дәлірек айтқанда (1.2.5) теңдіктен (1.4.1) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+C_2t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right) \qquad (1.4.3)$$

теңдікпен анықталады.

(1.4.3) теңдікпен анықталған функцияны (1.4.2) шарттардың біріншісіне қойсақ, онда Миттаг-Леффлердің функциясының қасиетінен

$$y(0) = C_1 E_{\alpha+\beta,1}(0) = C_1 = a.$$

Осы сияқты (1.4.2) теңдіктіктің екіншісінен

$$y(1) = aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda) + C_2 E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda) = b.$$

Соңғы теңдіктен

$$C_2 = \frac{b - aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}.$$

Осы нәтижелерді ескерсек, онда

$$y(t) = aE_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right) + \frac{b - aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} t^{\beta} E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right) =$$

$$= a\frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right) - E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} + \frac{bt^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}$$

теңдікке келеміз.
Сонымен, (1.4.1)- (1.4.2) есептің шешімі келесі

$$y(t) = a\cdot\frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right) - E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} +$$

$$+b\cdot\frac{t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.4.4}$$

түрде болатынын байқаймыз.
(1.4.4) формулада берілген функцияларды келесі түрде белгілеп алайық:

$$C(t) = \frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right) - E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.4.5}$$

$$S(t) = \frac{t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.4.6}$$

Нәтижеде, (1.4.1)-(1.4.2) есептің шешімі мына түрге келеді:

$$y(t) = aC(t) + bS(t). \tag{1.4.7}$$

Миттаг – Леффлер функциясының қасиеттерінен

$$S(0)=0,\ C(1)=0, S(1)=1.$$

теңдіктердің орынды болатыны келіп шығады.

Осылайша, (1.4.1) - (1.4.2) Дирихле есебіне қатысты келесі нәтиже орынды:

Лемма 1.4.1. Айталық, $0<\alpha,\beta\le 1,\lambda>0$ болсын, онда , (1.4.1) және (1.4.2) Дирихле есебінінің шешімі

$$y(t)=aC(t)+bS(t)$$

формуламен анықталады.Бұл жердегі $C(t)$ және $S(t)$ функциялары (1.4.5) және (1.4.6) формуламен беріледі.

Егер $1<\alpha<2,\ \beta=2-\alpha$ болса, онда (1.4.1) теңдеудің шешімі мынаған тең болады

$$y_s(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{2k+s}}{\Gamma(2k+s+1)}$$

мұнда $s=0, s=\beta$. Осы екі жағдайды қарастырайық:

1) $s=0$ болғанда

$$y_0(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{2k}}{\Gamma(2k+1)}=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{2k}}{(2k)!}=ch\sqrt{\lambda}t.$$

2) $s=\beta$ болғанда

$$y_\beta(t)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{2k+\beta}}{\Gamma(2k+\beta+1)}=E_{2,\beta+1}(\lambda t^2)t^\beta.$$

1.5 Капуто туындысы қатысқан бөлшек ретті дифференциалдық теңдеу үшін Дирихле есебі

Бұл бөлімшеде Капуто туындысы қатысқан (1.3.1) теңдеу үшін Дирихле есебін зерттейміз.

$\lambda>0,\alpha$ және β сандары $\frac{1}{2}<\alpha,\beta\le 1$ шарттарды қанағаттандырсын, ал $D^{\alpha+\beta}={}_C D^{\alpha+\beta}\equiv I^{2-(\alpha+\beta)}\frac{d^2}{dt^2}$ түріндегі оператор болсын. Осы операторға қатысты мына Дирихле есебін қарастырайық:

$$D^{\alpha+\beta}y(t)-\lambda y(t)=0,\ 0<t<1 \tag{1.5.1}$$

$$y(0)=a, y(1)=b. \tag{1.5.2}$$

Бұл жерде a және b - алдынан ала берілген тұрақтылар.

(1.5.1)-(1.5.2) есептің шешімі деп $y(t)\in C[0,1], D^{\alpha+\beta}y(t)\in C(0,1)$ шарттар орындаладтындай, (1.5.1) және (1.5.2) шарттарын қанағаттандыратын функциялардың класынан аламыз.

1.3.1 – Теореманың Салдары бойынша (1.5.1) дифференциалдық теңдеудің жалпы шешімі

$$y(t)=C_1E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+C_2tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right) \tag{1.3}$$

теңдікпен анықталады.

(1.5.3) теңдікпен анықталған функцияны (1.5.2) шарттардың біріншісіне қойсақ, онда Миттаг-Леффлердің функциясының қасиетінен

$$y(0)=C_1E_{\alpha+\beta,1}(0)=C_1=a.$$

Осы сияқты (1.5.2) теңдіктіктің екіншісінен

$$y(1)=aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda)+C_2E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)=b.$$

Соңғы теңдіктен

$$C_2=\frac{b-aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}.$$

Осы нәтижелерді ескерсек, онда

$$y(t)=aE_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)+\frac{b-aE_{\alpha+\beta,1}(\lambda)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)=$$

$$=a\frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)-E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)t^{\beta}E_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}+\frac{btE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}$$

теңдікке келеміз.

Сонымен, (1.5.1)- (1.5.2) есептің шешімі келесі

$$y(t)=a\cdot\frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)-E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)}+$$

$$+b\cdot\frac{tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.5.4}$$

түрде болатынын байқаймыз.

(1.5.4) формулада берілген функцияларды келесі түрде белгілеп алайық:

$$C(t)=\frac{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)E_{\alpha+\beta,1}\left(\lambda t^{\alpha+\beta}\right)-E_{\alpha+\beta,1}(\lambda)tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.5.5}$$

$$S(t)=\frac{tE_{\alpha+\beta,\beta+1}\left(\lambda t^{(\alpha+\beta)}\right)}{E_{\alpha+\beta,\beta+1}(\lambda)} \tag{1.5.6}$$

Нәтижеде, (1.5.1)-(1.5.2) есептің шешімі мына түрге келеді:

$$y(t)=aC(t)+bS(t). \tag{1.5.7}$$

Миттаг – Леффлер функциясының қасиеттерінен

$$S(0)=0,\ C(1)=0, S(1)=1.$$

теңдіктердің орынды болатыны келіп шығады.

Осылайша, (1.5.1) - (1.5.2) Дирихле есебіне қатысты келесі нәтиже орынды:

Лемма 1.5.1. Айталық, $0<\alpha,\beta\le 1, \lambda>0$ болсын, онда , (1.5.1) және (1.5.2) Дирихле есебінінің шешімі

$$y(t)=aC(t)+bS(t)$$

формуламен анықталады.Бұл жердегі $C(t)$ және $S(t)$ функциялары (1.5.5) және (1.5.6) формуламен беріледі.

2 ЛАПЛАС ТЕҢДЕУІНІҢ БӨЛШЕК РЕТТІ АНАЛОГЫ ҮШІН КЕЙБІР ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІН ЗЕРТТЕУ.

Бұл тарауда диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері баяндалады. Мұнда төртбұрыш және жарты жолақ сияқты аймақтарда Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогтары үшін негізгі шеттік есептер қарастырылады.

2.1 Лаплас теңдеунің бөлшек ретті аналогы үшін Дирихле есебінің шешімділігі.

$0<\alpha,\beta\le 1$, $\Omega=\{(x,y)\in R^2: 0<x<1, 0<y<1\}$ - төртбұрыш болсын. Осы Ω төртбұрышта келесі есепті қарастырамыз:

$$u_{xx}(x,y)+D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=0,(x,y)\in\Omega, \tag{2.1.1}$$

$$u(x,0)=f(x),u(x,1)=g(x),0\le x\le 1, \tag{2.1.2}$$

$$u(0,y)=0,u(1,y)=0,0\le y\le 1. \tag{2.1.3}$$

Бұл жерде $D_y^{\alpha+\beta}={}_C D_y^{\alpha}\cdot{}_C D_y^{\beta}$ және D_y^{α}, D^{α} операторының y айнымалысы бойынша әсер етеді.

(2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі деп $u_{xx}(x,y)\in C(\Omega), D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)\in C(\Omega)$ және (2.1.1) - (2.1.3) шарттарын классикалық мағынада қанағаттандыратын $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$, функцияны қабылдаймыз.

Егер α,β сандары $\alpha=\beta=1$ тең болса, онда секвенциал түрдегі бөлшек ретті туындының анықтамасы сәйкес түрде біз қарастыратын $D^{\alpha+\beta}=D^{\alpha}\cdot D^{\beta}$ операторы $D_y^2=D^1\cdot D^1=\frac{\partial}{\partial y^2}$ түрінде болады. Бұл жағдайда (2.1.1) теңдеуі келесі

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}=0,(x,y)\in\Omega$$

Лаплас теңдеуіне сәйкес келеді.

Тағыда бір айта кететін жәй, [50-51] жұмыстарында $\beta=\alpha$ жағдай, яғни

$$u_{xx}(x,y)+D_y^{2\alpha}u(x,y)=0,\quad 1<\alpha\le 2 \tag{2.1.4}$$

теңдеуі үшін негізгі шеттік есептер зерттелінген.

Енді негізгі есептің шешімділігін зерттеуге көшейік. Фурье әдісін қолдана отырып (2.1.1)- (2.1.3) шарттармен берілген есептің $u(x,y)$ шешімін $X(x)$ және $Y(y)$ белгісіз функцияларының көбейтіндісі, яғни

$$u(x,y)=X(x)\cdot Y(y) \qquad (2.1.5)$$

түрінде іздейміз. (2.1.5) формуламен берілген $u(x,y)$ функциясы үшін (2.1.1) теңдеудің оң жағындағы туындыларды есептесек, онда мынандай нәтижеге келеміз:

$$u_{xx}(x,y)=X''(x)\cdot Y(y),$$

$$D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=X(x)\cdot D^{\alpha+\beta}Y(y).$$

Осы нәтижелерді (2.1.1) теңдеудің оң жағына қойсақ, онда,

$$X''(x)\cdot Y(y)+X(x)\cdot D^{\alpha+\beta}Y(y)=0$$

теңдікке келеміз.

Енді $X(x)\neq 0, Y(y)\neq 0$ деп есептейікте, $X''(x)\cdot Y(y)+X(x)\cdot D^{\alpha+\beta}Y(y)=0$ теңдігін $X(x)\cdot Y(y)$ функциясына бөлейік. Нәтижеде мынаны аламыз:

$$\frac{X''(x)}{X(x)}+\frac{D^{\alpha+\beta}Y(y)}{Y(y)}=0.$$

Бұл теңдікте x және y айнымалдарына қатысты функцияларды бөлек ажыратып жазайық:

$$\frac{D^{\alpha+\beta}Y(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}.$$

Бұл теңдікте, сол жақта y айнымалысына, ал оң жақта бөлігі тек қана x айнымалысына тәуелді функциялар қатысады. Мұндай жағдай

$$\frac{D^{\alpha+\beta}Y(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}\equiv const$$

болғандағана орынды болуы мүмкін, яғни олар өзара тең және тек қана тұрақты болуы керек.

Сол тұрақтыны λ - символымен белгілейік. Онда келесідей теңдікке ие боламыз:

$$\frac{D^{\alpha+\beta}Y(y)}{Y(y)}=-\frac{X''(x)}{X(x)}\equiv\lambda .$$

Нәтижеде белгісіз $X(x)$ функциясы үшін

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\quad 0<x<1,$$

екінші ретті жәй дифференциалдық теңдеу, ал $Y(y)$ функциясы үшін

$$D^{\alpha+\beta}Y(y)+\lambda Y(y)=0,0<y<1. \qquad (2.1.6)$$

бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеу аламыз.

Есептің шарты бойынша ізделінді $u(x,y)$ функциясы (2.1.3) теңдіктермен берілген шеттік шарттарды қанағыттандыруы қажет, яғни

$$u(0,y)=0,u(1,y)=0 .$$

Осы шарттарды ескерсек, онда

$$u(0,y)=X(0)\cdot Y(y)=0,$$

$$u(1,y)=X(1)\cdot Y(y)=0 .$$

Бұдан, $X(x)$ - белгісіз функцияға қатысты қосымша шарттар

$$X(0)=0,X(1)=0$$

түрінде болатынын байқаймыз.

Нәтижеде $X(x)$ функциясын анықтау үшін келесі түрдегі

$$\begin{cases} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ X(0)=0,X(1)=0. \end{cases} \qquad (2.1.7)$$

спектралдық есептің $X(x)\neq 0$ (нөл емес) шешімдерін табу қажет. [50] – әдебиетте көрсетілгендей, (2.1.7) - есебінің өзіндік мәндері $\lambda_k=(\pi k)^2$ түрінде болады, ал оларға сәйкес келетін $X(x)\neq 0$ (нөл емес) шешімдері, яғни өзіндік функциялар $X_k(x)=\sqrt{2}\sin k\pi x\ k=1,2,...,$ түріндегі функциялар болады.

(2.1.7) - есебінің меншікті функцияларынан құрылған $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ жүйе $L_2(0,1)$ Гильберт кеңістігінің ортонормаланған базисы болады [53]. Есептің шешімінің тегістігіне қойылған шарттар бойынша $u(x,y)$ функциясы y аргументтің әрбір таңдап алынған мәнінде x аргумент бойынша $L_2(0,1)$ Гильберт кеңістігінің элементі болуы керек. Сондай-ақ, Гильберт кеңістігіндегі ортонормаланған базистарға қатысты жалпы теория бойынша оның кез келген элементін осы базис бойынша қатарға жіктеуге болады. Олай болса, біз қарастырып отырған (2.1.1)- (2.1.3) есептің $u(x,y)$ шешімі $\{X_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ ортонормаланған базис бойынша

$$u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\sin k\pi x,(x,y)\in\Omega \qquad (2.1.8)$$

түріндегі қатарға жіктелуі қажет болады. Бұл жердегі $u_k(y)$- анықтау қажет болған белгісіз коффициенттер.

Егер $f(x)$ және $g(x)$ функцияларында тегіс деп есептесек, онда бұл функциялардыда $X_k(x)$ ортонормал жүйе бойынша

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}f_k\sin k\pi x,$$

$$g(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sqrt{2}g_k\sin k\pi x.$$

түріндегі Фурье қатарларына жіктеуге болады. Бұл жердегі

$$f_k=(f,X_k)=\sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin k\pi x dx, \qquad (2.1.9)$$

$$g_k(g,X_k)=\sqrt{2}\int_0^1 g(x)\sin k\pi x dx. \qquad (2.1.10)$$

тұрақтылар $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының Фурье коэффициенттері
Ары қарай (2.1.8) теңдігімен анықталған $u_{xx}(x,y)$ функциясының $u(x,y)$ және $D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)$ туындыларын есептесек,

$$u_{xx}(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(y)\left[-(k\pi)^2\right]\sin k\pi x,$$

$$D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}D^{\alpha+\beta}u_k(y)\sin k\pi x.$$

Осы нәтижелерді (2.1.1) теңдігіне қойсақ, онда төмендегі

$$u_{xx}(x,y)+D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{\alpha+\beta}u_k(y)-(k\pi)^2u_k(y)\right]\sin k\pi x=0.$$

өрнекті аламыз.
Соңғы теңдік орынды болуы үшін , яғни

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{\alpha+\beta}u_k(y)-(k\pi)^2u_k(y)\right]\sin k\pi x$$

қатары нөлге тең болуы үшін k нің әрбір $k=1,2,...$ мәндерінде

$$D^{\alpha+\beta}u_k(y)-(k\pi)^2u_k(y)=0, 0\le y\le 1$$

орындалуы қажетті әрі жеткілікті.

Есептің шарты бойынша

$$u(x,0)=f(x), u(x,1)=g(x),$$

шекаралық шарттар орынды болуы керек. Сол себептен

$$u(x,0)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0)\sin k\pi x=f(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}f_k\sin k\pi x,$$

$$u(x,0)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}u_k(0)\sin k\pi x=g(x)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}g_k\sin k\pi x.$$

Осыған сәйкес,

$$u_k(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}f_k, u_k(1)=\frac{1}{\sqrt{2}}g_k.$$

Ал бұдан $u_k(y)$ коэффициенттері үшін келесі Коши есебін аламыз.

$$\begin{cases} D^{\alpha+\beta}u_k(y)-(k\pi)^2u_k(y)=0, 0\le y\le 1, \\ u_k(0)=\dfrac{f_k}{\sqrt{2}}, u_k(1)=\dfrac{g_k}{\sqrt{2}} \end{cases} . \qquad (2.1.11)$$

Мұндағы f_k және g_k сәйкесінше (2.1.9) және (2.1.10) теңдіктерімен анықталады.

І тарауда келтірілген Лемма 1.2.3 тің тұжырымдамасы бойынша (2.1.11) Дирихле есебінің шешімі болып, келесі түрдегі

$$u_k(y)=\frac{f_k}{2\sqrt{\lambda_k}}\frac{E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}\right)E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}y^2\right)-E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}\right)E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}y^2\right)}{E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k\right)}+$$

$$+g_k\frac{E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k y^{2\alpha}\right)}{E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k\right)} \qquad (2.1.12)$$

функция табылады.Мұндағы $\lambda_k=(k\pi)^2,\quad k=1,2,...$

Былай белгілейік:

$$C_k(y)=\frac{E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}\right)E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}y^2\right)-E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}y^2\right)E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}\right)}{2\sqrt{\lambda_k}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k\right)}, \qquad (2.1.13)$$

$$S_k(y)=\frac{y^{\alpha}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k y^{2\alpha}\right)}{E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k\right)}. \qquad (2.1.14)$$

Онда (2.1.12) функциясы мына түрде болады:

$$u_k(y)=C_k(y)f_k+S_k(y)g_k. \qquad (2.1.15)$$

Сонымен біз $u_k(y)$ функциясын таптық және осыған сәйкесінше негізгі есептің формальды шешімінде таптық. Осыған орай, келесі негізгі теорема орынды болады.

Теорема 2.1. Айталық, $0<\alpha\le 1,\ f(x)\in C^{2+\varepsilon}[0,1],\quad g(x)\in C^{1+\varepsilon}[0,1]$ болсын және мына төмендегі шарттар орындалсын:

$$f(0)=f(1)=0, g(0)=g(1)=0.$$

Онда, (2.1.1) -(2.1.3) есебінің шешімі бар және жалғыз. Сонымен қоса, бұл шешім

$$u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_kC_k(y)+g_kS_k(y)\right]\sin k\pi x, \qquad (2.1.16)$$

қатар түрінде болады.Мұндағы f_k және g_k - $f(y)$, $g(y)$ Фурье функцияларының коэффициенттері, ал $C_k(y)$, $S_k(y)$ (2.1.12) және (2.1.13) теңдіктерімен анықталады.

Дәлелдеу. Теореманы дәлелдеу үшін алғашқы кезекте бізге төмендегі кезіккен барлық қатарлардың жинақтылығын зерттеуіміз қажет.

(2.1.16) қатарды бағалау үшін бірінші f_k, g_k және $C_k(y), S_k(y)$ коэффициенттерін бағалау қажет.

1.1.4. параграфтабіз $C_k(y)$ және $S_k(y)$ функциялары мына

$$y''(x) - \lambda_k D^{2-\alpha} y(x) = 0, 0 < x < 1$$

теңдеудің шешімі болып табылатындығы көрсеткен болатынбыз.
Сонымен қоса, $C_k(y)$ және $S_k(y)$ функциялары үшін мына теңдіктерде орындалады:

$$C_k(0) = 1, C_k(1) = 0,$$

$$S_k(0) = 1, S_k(1) = 0.$$

1.4.1- лемманың тұжырымдамасы бойынша барлық $x \in [0,1]$ үшін

$$0 \le S_k(x), C_k(x) \le 0$$

болады.

Егер $\varphi(x)$ функциясы $C^{\varepsilon}[0,1], 0 < \varepsilon < 1$ класына тиісті болса, онда осы функцияның Фурье коэффициенттеріне келесі бағалау орынды болады ([мысалы үшін [54], 335 бетке қараңыз])

$$|\varphi(x)| = 0\left(\frac{1}{k^{\varepsilon}}\right), k \to \infty.$$

Берілген теореманың шарттары бойынша $f(x) \in C^{2+\varepsilon}[0,1]$ және $f(0) = f(1) = 0$ болады. Онда

$$f(x) = (f, x_k) = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\sin k\pi dx = \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\frac{d\cos k\pi x}{-k\pi} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{k\pi} f(x)\cos k\pi x\Big|_0^1 + \frac{\sqrt{2}}{k\pi}\int_0^1 f'(x)\cos k\pi dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{k\pi} f(1)(-1)^k + \frac{\sqrt{2}}{k\pi} f(0) + \frac{\sqrt{2}}{k\pi}\int_0^1 f'(x)\frac{d\sin k\pi x}{k\pi} =$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{(k\pi)^2}f'(x)\sin k\pi x\Big|_0^1-\frac{\sqrt{2}}{(k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\sin k\pi dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{(k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\sin k\pi dx\,.$$

Осылайша,

$$f_k=-\frac{\sqrt{2}}{(k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\sin k\pi dx=\frac{C}{k^2}\left(f'',X_k\right).$$

$\left|\left(f'',X_k\right)\right|=0\left(\frac{1}{k^{\varepsilon}}\right),k\to\infty$ болғандықтан, бұл коэффициенттер үшін келесі түрдегі

$$\left|f_k\right|\le\frac{C}{k^{2+\varepsilon}},k\to\infty$$

бағалау орынды болады. Мұндағы С- к-дан тәуелсіз тұрақты болып табылады.

Сол сияқты, $\varphi(x)$ функциясының Фурье коэффициенттері үшін төмендегі теңсіздік орынды болады:

$$\left|g_k\right|\le\frac{C}{k^{1+\varepsilon}},k\to\infty\,.$$

Алынған бағалаулардан $u_k(y)$ функциясы үшін келесі теңсіздік туындайды:

$$\left|u_k(y)\right|=\left|C_k(y)f_k+S_k(y)g_k\right|\le\left|C_k(y)\right|f_k\left|+S_k(y)\right|g_k\|\le$$

$$\le C\left(\frac{1}{k^{2+\varepsilon}}+\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}\right).$$

Олай болса, (2.1.16) қатары үшін біз мынаны аламыз:

$$\left|u(x,y)\right|\le C\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k^{1+\varepsilon}}<\infty\,.$$

Сәйкесінше, (2.1.16) қатары $\overline{\Omega}$ аймағында абсолютті әрі біркелкі жинақты болып табылады.

Қарастырылып отырған қатардың мүшелері үзіліссіз болғандықтан, Вейерштрас теоремасы бойынша, оның қосындылары да $\overline{\Omega}$ аймағында үзіліссіз болып табылады. Яғни, $u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$.

Сондай-ақ, $|z|\to\infty$ жағдайында $E_{\alpha,\beta}(z)$ функциясы үшін төмендегідей асимптотикалық бағалау орынды болады. (мысалы үшін қарау [Подаубный], ... бет)

1) Егер $|\arg z|\le \rho_1\cdot\pi,\ \rho_1\in\left(\frac{\alpha}{2},\min\{1,2\}\right),\ \alpha\in(0,2)$,

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{\alpha}z\frac{(1-\beta)}{\alpha}e^{z^{\frac{1}{\alpha}}}-\sum_{k=1}^{p}\frac{z^{-k}}{\Gamma(p-\alpha)}+0\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right).$$

2) Егер $\arg z=\pi$ болса, онда

$$E_{\alpha,\beta}(z)=\frac{1}{1+|z|},z\to\infty.$$

Осы формуланы қолдана отырып, төмендегіге ие боламыз:

$$2y^{\alpha}\sqrt{\lambda_k}E_{2\alpha,\alpha+1}\left(\lambda_k y^{2\alpha}\right)=\frac{y^{\alpha}}{\alpha}e^{\frac{1}{\lambda_k^{2\alpha}}y}+0\left(\frac{1}{\lambda_k}\right),$$

$$E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}y^{\alpha}\right)=\frac{1}{\alpha}e^{\frac{1}{\lambda_k^{2\alpha}}y}+0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right),$$

$$E_{\alpha,1}\left(-\lambda_k y^{\alpha}\right)=0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right),y\ge y_0>0,$$

$$S_k(y)=0\left(e^{\frac{1}{\lambda_k^{2\alpha}}(y+1)}\right),C_k(y)=0\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\right).$$

(2.1.8) қатарын x айнымалы бойынша 2 рет мүшелеп дифференциалдау арқылы, келесіге ие боламыз:

$$u_{xx}(x,y)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(y)X_k(x).$$

Олай болса, барлық $y\ge y_0>0,\ 0\le x\le 1$ үшін мыналарды аламыз:

$$|u_{xx}(x,y)|=\sum_{k=1}^{\infty}|\lambda_k||u_k(y)|\le C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{e^{-k\pi(y-1)}}{k^2}+\frac{1}{k^{\varepsilon+1}}\right]<\infty.$$

Келесі

$$D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_k(y)X_k(x)$$

қатар осы сияқты бағаланады.

Онда, $u_{xx}(x,y)$ және $D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)$ функцияларыда $C(\Omega)$ класына тиісті болады.

(2.1.11) есебінің шешімі жалғыз болғандықтан, (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі де жалғыз болады. Теорема дәлелденді.

Енді осы теоремаға сайкес келетін кейбір мысалдарды қарастырайық.

Мысал 1. Айталық, $\alpha=1$ болсын. Онда

$$E_{1,1}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(k+1)}=e^z,$$

$$E_{2,2}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{(2k+1)!}=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$$

болады. Сондықтан

$$C_k(y)=\frac{e^{k\pi}\cdot e^{-k\pi y^2}-e^{-k\pi y^2}\cdot e^{k\pi}}{2k\pi shk\pi}=$$

$$=\frac{e^{k\pi(1-y^2)}-e^{-k\pi(1-y^2)}}{2}\frac{1}{k\pi shk\pi}=\frac{1}{k\pi}\cdot\frac{shk\pi(1-y^2)}{shk\pi},$$

$$S_k(y)=\frac{y^2 sh(k\pi y^{2\alpha})}{sh(k\pi)}.$$

Осыған сәйкес, (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$u(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\frac{f_k}{k\pi}\frac{shk\pi(1-y^2)}{shk\pi}+\frac{g_k shk\pi\cdot y^2}{shk\pi}\right]shk\pi x.$$

Мысал 2. Айталық, (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шарттарында $f(x)=x(x-1)$, $g(x)=0$ болсын. Онда, $g(x)=0$ функциясының Фурье коэффициенттері $g_k=(g,x_k)\equiv 0, k=1,2,\ldots$ болары анық.

$f(x)=x(x-1)$ функциясының Фурье коэффициенттерін есептелік.

Анықтама бойынша

$$f_k=(f,x_k)=\int_0^1 f(x)\sqrt{2}\sin k\pi x=$$

$$=\sqrt{2}\int_0^1 x(x-1)\sqrt{2}\sin k\pi x dx=\sqrt{2}\int_0^1 x(x-1)\frac{d\cos k\pi x}{-k\pi}=$$

$$=-\frac{\sqrt{2}}{k\pi}x(x-1)\cos k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1}+\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\int_0^1(2x-1)\cos k\pi x dx=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{k\pi}(2x-1)\frac{\sin k\pi x}{k\pi}-\frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^2}\int_0^1\sin k\pi x dx=$$

$$=\frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^3}\cos k\pi x\Big|_0^1=\frac{2\sqrt{2}}{(k\pi)^3}\left[(-1)^k-1\right]=\begin{cases}0, k=2m\\ \frac{4\sqrt{2}}{(k\pi)^3}, k=2m+1\end{cases}.$$

Осы есептеулердің нәтижесінде, (2.1.1)-(2.1.3) есебінің шешімі

$$u(x,t)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi^3}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C_k(y)}{k^3}\sin k\pi x$$

түрдегі функция болатынын байқаймыз.

$\alpha=1$ болған дербес жағдайда (мысал-1, қараңыз) бұл шешім мына қатар

$$u(x,t)=\frac{4\sqrt{2}}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}\frac{\sin k\pi(1-y^2)}{shk\pi}\sin k\pi x$$

түріндегі функция болады.

2.2. Периодтық шеттік шарттарымен берілген есептерді шешу.

Берілген Ω облысында мына есепті қарастырайық:

$$u_{xx}(x,y)+D_y^{\alpha+\beta}u(x,y)=0,(x,y)\in\Omega, \quad (2.2.1)$$

$$u(x,0)=f(x), u(x,1)=g(x), 0\le x\le 1, \quad (2.2.2)$$

$$u(0,y)=u(1,y), u_x(0,1)=u_x(1,y), 0\le y\le 1. \quad (2.2.3)$$

$u(x,y)\in C(\overline{\Omega})$ функциясы (2.2.1) -(2.2.3) есебінің шешімі болады, егер $u(x,y)$ функциясы $u_x(x,y)\in C(\overline{\Omega}), u_{xx} D^{\alpha}u\in C(\Omega)$ класында жататын болса және (2.2.1) -(2.2.3) шарттарын классикалық мағынада қанағаттандырса.

Берілген (2.2.3) шеттік шартқа сәйкес келетін спектральды есеп мына түрде болады:

$$\begin{cases} -X''(x)=\lambda X(x), 0<x<1 \\ X(0)=X(1), X'(0)=X'(1)\cdot \end{cases}$$

Бұл есептің меншікті мәні $\lambda_k=(2k\pi)^2, k=0,1,2,...,$ болып табылады. Осыған сәйкес меншікті функциялар мына түрде жазылады:

$$X_0(x)=1, X_{k,1}(x)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x,$$

$$X_{k,2}(x)=\sqrt{2}\sin 2k\pi x,\ k=0,1,2,...,. \tag{2.2.4}$$

(2.2.4) жүйесі $L_2(0,1)$ кеңістігіндегі ортонормаланған базис болып табылады. 2.1. параграфтағы қолданылған әдісті қолданатын болсақ, онда келесі тұжырымдаманы аламыз:

Теорема 2.2.1. Айталық $0<\alpha\le 1, f(x)\in C^{3+\varepsilon}[0,1],\ g(x)\in C^{3+\varepsilon}[0,1], 0<\varepsilon<1$ және

$$f^{(k)}(0)=f^{(k)}(1), k=0,1,2,...,$$

$$g(0)=g(1), g'(0)=g'(1)$$

шарттар орындалсын. Онда, (2 .2.1) -(2.2.3) есебінің шешімі бар және жалғыз болады. Ал бұл шешім төмендегі қатар түрінде анықталады

$$u(x,y)=(1-y^2)f_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{2k}C_k(y)+g_{2k}S_k(y)\right]\cos 2k\pi x+$$

$$+y^2\cdot g_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[f_{2k-1}C_k(y)+g_{2k-1}S_k(y)\right]\sin 2k\pi x \tag{2.2.5}$$

Бұл жерде

$$f_0=(f,1), f_{2k}=(f,\cos 2k\pi x), f_{2k-1}=(f,\sin 2k\pi x),$$

$$g_0=(g,1),g_{2k}=(g,\cos 2k\pi x),g_{2k-1}=(g,\sin 2k\pi x).$$

Ал $C_k(y)$ және $S_k(y)$ функциялары (2 .2.13) және (2.2.14) теңдіктерімен анықталады.

Дәлелдеу. $\{X_0,X_{k,1},X_{k,2}\}$ жүйесі $L_2(0,1)$ кеңістігінің ортонормаланған базисі болғандықтан, $u(x,y)$, $f(x)$ және $g(x)$ функциялары осы жүйе бойынша мынадай қатарларға жіктеледі:

$$u(x,y)=u_0(y)\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,1}(y)X_{k,1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,2}(y)X_{k,2}(x), \qquad (2.2.5)$$

$$f(x)=f_0\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_{k,1}X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}f_{k,2}X_{k,2}(x), \qquad (2.2.6)$$

$$g(x)=g_0\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{k,1}X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{k,2}X_{k,2}(x). \qquad (2.2.7)$$

Мұнда f_k және g_k коэффициенттері мына түрде анықталады:

$$f_0=(f,1),f_{2k}=(f,\cos 2k\pi x),f_{2k-1}=(f,\sin 2k\pi x),$$

$$g_0=(g,1),g_{2k}=(g,\cos 2k\pi x),g_{2k-1}=(g,\sin 2k\pi x).$$

Осыған байланысты

$$u_{xx}(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,1}(y)X''_{k,1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,2}(y)X''_{k,2}(x)=$$

$$=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_{k,1}(y)X_{k,1}(x)-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_{k,2}(y)X_{k,2}(x),$$

$$D_y^{2y}u(x,y)=D^{\alpha+\beta}u_0(y)\cdot X_0(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}D^{\alpha+\beta}u_{k,1}(y)X_{k,1}(x)+\sum_{k=1}^{\infty}D^{\alpha+\beta}u_{k,2}(y)X_{k,2}(x)$$

болғандықтан, (2.2.1) теңдікті қолданып төмендегі теңдікті аламыз:

$$D^{\alpha+\beta}u_0(y)\cdot X_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{\alpha+\beta}u_{k,1}(y)-\lambda_k u_{k,1}(y)\right]X_{k,1}(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{\alpha+\beta}u_{k,2}\left(y\right)-\lambda_k u_{k,2}\left(y\right)\right]X_{k,2}\left(x\right)=0.$$

Бұл теңдіктен мына

$$D^{\alpha+\beta}u_0\left(y\right)=0, 0<y<1,$$

$$D^{\alpha+\beta}u_{k,1}\left(y\right)-\lambda_k u_{k,1}\left(y\right)=0, 0<y<1,$$

$$D^{\alpha+\beta}u_{k,2}\left(y\right)-\lambda_k u_{k,2}\left(y\right)=0, 0<y<1$$

теңдіктер келіп шығады.

Енді (2.2.2) шеттік шарттарды пайдаланып мына өрнектерді аламыз:

$$u\left(x,0\right)=u_0\left(0\right)X_0\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,1}\left(0\right)X_{k,1}\left(x\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,2}\left(0\right)X_{k,2}\left(x\right)=f\left(x\right)=f_0X_0\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}f_{k,1}X_{k,1}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}f_{k,2}X_{k,2}\left(x\right).$$

Дәл осы секілді

$$u\left(x,1\right)=u_0\left(1\right)X_0\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,1}\left(1\right)X_{k,1}\left(x\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}u_{k,2}\left(1\right)X_{k,2}\left(x\right)=g\left(x\right)=$$

$$=g_0X_0\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{k,1}X_{k,1}\left(x\right)+\sum_{k=1}^{\infty}g_{k,2}X_{k,2}\left(x\right).$$

Соңында белгісіз $u_0\left(y\right)$, $u_{k,1}\left(y\right)$, $u_{k,2}\left(y\right)$, $k=0,1,2,...$, функциялары үшін төмендегі есептерді аламыз:

$$\begin{cases}D^{\alpha+\beta}u_0\left(y\right)=0, 0<y<1\\ u_0\left(0\right)=f_0, u_0\left(1\right)=g_0,\end{cases} \tag{2.2.8}$$

$$\begin{cases}D^{\alpha+\beta}u_{k,1}\left(y\right)-\lambda_k u_{k,2}\left(y\right)=0, 0<y<1\\ u_{k,1}\left(0\right)=f_{k,1}, u_{k,1}\left(1\right)=g_{k,1},\end{cases} \tag{2.2.9}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha+\beta}u_{k,2}(y) - \lambda_k u_{k,2}(y) = 0, 0 < y < 1 \\ u_{k,2}(0) = f_{k,2}, u_{k,2}(1) = g_{k,2}, \end{cases}. \qquad (2.2.10)$$

Мұндағы $\lambda_0 = 0$, $\lambda_k = (2k\pi)^2$, $k = 0,1,2,...,$

І тараудағы Лемма 1.2.3 тұжырымдамасы бойынша (2.2.8) , (2.2.9) және (2.2.10) есептердің шешімі мына функция болады:

$$u_0(y) = (1 - y^\alpha) f_0 + y^\alpha \cdot g_0,$$

$$u_{k,1}(y) = \frac{f_{k,1}}{2\sqrt{\lambda_k}} \cdot \frac{E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}\right)E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}y^\alpha\right) - E_{\alpha,1}\left(-\sqrt{\lambda_k}y^\alpha\right)E_{\alpha,1}\left(\sqrt{\lambda_k}y^\alpha\right)}{E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(\lambda_k)} + \frac{n!}{r!(n-r)!} +$$

$$+ g_{k,1}\frac{y^\alpha E_{\alpha+\beta,\alpha+1}\left(\lambda_k y^{\alpha+\beta}\right)}{E_{\alpha+\beta,\alpha+1}(\lambda_k)} = f_{k,1}C_k(y) + g_{k,1}S_k(y),$$

$$u_{k,1}(y) = f_{k,2}C_k(y) + g_{k,2}S_k(y).$$

$u_0(y)$, $u_{k,1}(y)$, $u_{k,2}(y)$, $k = 0,1,2,...,$ белгісіз функциялары осылайша анықталады.

Келесі кезекте $f(x)$ және $g(x)$ функцияларының Фурье коэффициенттері үшін төмендегі бағалау орынды.

$f_{k,1}$ коэффициенті үшін

$$f_k = (f, x_k) = \int_0^1 f(x) X_{k,1}(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\frac{d\sin 2k\pi x}{2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{k\pi} f(x)\sin 2k\pi x dx\Big|_{x=0}^{x=1} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 f'(x)\sin k\pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 f'(x)\frac{d\cos 2k\pi x}{-2k\pi} =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2} f'(x)\cos k\pi x dx\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\cos k\pi x dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\frac{d\sin 2k\pi x}{2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3} f''(x)\sin 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\int_0^1 f'''(x)\sin 2k\pi x dx = -\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\int_0^1 f'''(x)\sin 2k\pi x dx .$$

Сәйкесінше,

$$f_{k,2} = \left(f, X_{k,2}\right) = \int_0^1 f(x) X_{k,2}(x)\,dx =$$

$$= \sqrt{2}\int_0^1 f(x)\frac{d\cos 2k\pi x}{-2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi} f(x)\cos 2k\pi x dx\Big|_{x=0}^{x=1} +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 f'(x)\cos 2k\pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\left[f(1) - f(0)\right] +$$

$$+\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 f(x)\frac{d\sin 2k\pi x}{2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2} f'(x)\sin k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} -$$

$$-\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\sin 2k\pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 f''(x)\frac{d\cos 2k\pi x}{-2k\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3} f''(x)\cos 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\int_0^1 f'''(x)\cos 2k\pi x dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\left[f''(1) - f''(0)\right] - \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\int_0^1 f'''(x)\cos 2k\pi x dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^3}\int_0^1 f'''(x)\cos 2k\pi x dx .$$

Ары қарай, $f(x)$ функциясы $[0,1]$ аралығында $3+\varepsilon$ ретті туындысына дейін үзіліссіз болатын функциялар класына тиісті болғандықтан оның үшінші ретті туындысы $f'''(x) \in C[0,1]$ болады.

Онда,

$$\left|\int_0^1 f'''(x)\cos 2k\pi dx\right| \le \frac{C}{k^{\varepsilon}},$$

$$\left|\int_0^1 f'''(x)\sin 2k\pi dx\right| \le \frac{C}{k^{\varepsilon}} .$$

Бұл бағалаудан төмендегідей

$$\left|f_{k,1}\right| \le \frac{C}{k^{3+\varepsilon}}, \left|f_{k,2}\right| \le \frac{C}{k^{3+\varepsilon}}$$

бағалаулар келіп шығады.
Бұл теңсіздіктерден төмендегі бағалауларды аламыз:

$$\left|g_{k,1}\right| \le \frac{C}{k^{2+\varepsilon}}, \left|g_{k,2}\right| \le \frac{C}{k^{2+\varepsilon}}.$$

Бұл бағалаудан келесі бағалауды аламыз:

$$\left|u_{k,1}(y)\right| \le C\left(\frac{1}{k^{3+\varepsilon}} + \frac{1}{k^{2+\varepsilon}}\right).$$

Олай болса, $u(x,y)$ функциясына сәйкес қатарды жинақылыққа зерттеу үшін $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2+\varepsilon}}$ жинақты қатарымен бағалаймыз. Сондықтан да $u(x,y)$ функциясына сәйкес келетін қатар $\overline{\Omega}$ облысында бірқалыпты жинақты болады. Олай болса, бұл қатардың қосындысы $\overline{\Omega}$ аймағында үзіліссіз функция болады, яғни $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$.
Сонымен бірге,

$$\left|u_x(x,y)\right| = \left|-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_{k,1}(y) X_{k,2}(x) + \sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k u_{k,2}(y) X_{k,1}(x)\right| \le$$

$$\le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{\varepsilon+1}} < \infty.$$

Сондықтан да $u(x,y) \in C(\overline{\Omega})$.Осылайша, $u_{xx}(x,y) \in C(\Omega)$, $D_y^{\alpha+\beta}u(x,y) \in C(\Omega)$ болатындығын көрсетуге болады. Теорема дәлелденді.

Мысал 2.2.1.Шекаралық функция ретінде $g(x)=0,\ f(x)=x^3(x-1)^3$ қарастырайық. $f(x), g(x) \in C^{\infty}[0,1]$ екендігі белгілі және сәйкесінше $f \in C^{3+\varepsilon}[0,1], g \in C^{3+\varepsilon}[0,1]$. Бұған қосымша $f(0)=0, f(1)=0$ яғни $f(0)=f(1)$ шартыда орындалады. Ары қарай,

$$f'(x) = 3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^3,$$

$$f''(x) = \left|3x^2(x-1)^3 + 3x^3(x-1)^2\right|' =$$

$$= 6x(x-1)^3 + 9x^2(x-1)^2 + 9x^2(x-1)^2 + 6x^3(x-1),$$

$$f'''(x) = 6x(x-1)^3 + 18x(x-1)^2 + 18x(x-1)^2 +$$

$$+18x^2(x-1) + 18x^2(x-1) + 18x^2(x-1) + 6x^3.$$

Сонда

$$f'(0) = f'(1) = 0, f''(0) = f''(1) = 0$$

шарттары орындалатындығы белгілі. Осылайша, 2.2.1. теореманың барлық шарттары орындалды. Олай болса, бұл есептің шешімі бар және (2.2.5) түрінде болады.

Біздің жағдайда $g_0 = g_{k,1} = g_{k,2} = 0$. Ал $f(x) = x^3(x-1)^3$ үшін Фурье коэффициенттері:

$$f_{k,1} = \sqrt{2}\int_0^1 x^3(x-1)^3 \cos 2k\pi x dx, f_{k,2} = \sqrt{2}\int_0^1 x^3(x-1)^3 \sin 2k\pi x dx$$

теңдіктермен анықталады.

2.3. Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Нейман есебі

Енді Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Нейман есебінің шешілімділігін зерттейміз, яғни Ω аймағында келесі есепті қарастырайық:

$$u_{xx}(x,y) + D_y^{\alpha+\beta}u(x,y) = 0, (x,y) \in \Omega, \qquad (2.3.1)$$

$$u(x,0) = f(x), u(x,1) = g(x), 0 \le x \le 1, \qquad (2.3.2)$$

$$u_x(0,y) = 0, u_x(1,y) = 0, 0 \le y \le 1. \qquad (2.3.3)$$

(2.3.1)- (2.3.3) есебінің шешімі деп $u \in C(\overline{\Omega}), u_x(x,y) \in C(\overline{\Omega})$, $u_{xx}(x,y), D_y^{\alpha+\beta}u(x,y) \in C(\Omega)$ класында жататын (2.3.1)- (2.3.3) шарттарын қанағаттандыратын $u(x,y)$ функциясын айтамыз.

(2.3.1)- (2.3.3) есебіне келесі тұжырымдама орынды болады.

Теорема 2.4.1. Айталық, $0 < \alpha \le 1$, $f(x) \in C^{3+\varepsilon}[0,1]$, $g(x) \in C^{2+\varepsilon}[0,1]$ болсын. Сонымен бірге мына шарттар орынды болсын делік:

1) $f'(0) = f'(1) = 0,$

2) $g'(0) = g'(1) = 0$.

Онда, (2.3.1)- (2.3.3) есебінің шешімі бар, жалғыз және ол келесі

$$u(x,y) = \left(1-y^2\right) f_0 + y^{\alpha} \cdot g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f_k C_k(y) + g_k S_k(y) \right] \cos k\pi x, \qquad (2.3.4)$$

қатар түрінде беріледі.Мұнда $f_k = (f, \cos k\pi x), g_k = (g, \cos k\pi x)$, ал $C_k(y)$ және $S_k(y)$ функциялары (2.1.13) және (2.1.14) теңдіктерімен анықталады.

Дәлелдеу. (2.3.1)- (2.3.3) есебіне Фурье әдісін қолданатын болсақ, онда бұл есепке сәйкес келетін спектральды есеп мына түрде өрнектеледі:

$$\begin{cases} -X''(x) = \lambda X(x), 0 < x < 1 \\ X(0) = X(1), \end{cases}.$$

Бұл есептің меншікті мәндері $\lambda_k = (2k\pi)^2, k = 0,1,2,...,$ болады, ал осыған сәйкес келетін меншікті функциялары $X_0(x) = 1, X_k(x) = \sqrt{2} \cos 2k\pi x, k = 1,2,...$ түріндегі функциялар болады.Бұл жүйе $L_2(0,1)$ кеңістігінде ортонормаланған базис құрайды.

Олай болса, $u(x,y)$, $f(x)$, $g(x)$ функциялары мынадай қатарларға жіктеледі:

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{k=1}^{\infty} u_k(y) \cos k\pi x,$$

$$f(x) = f_0 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k \cos k\pi x,$$

$$g(x) = g_0 + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cos k\pi x .$$

Ары қарай, [56] жұмысында қарастырылған әдісті пайдалана отырып, төмендегі функцияларды зерттейік:

$$u_k(y) = \int_0^1 u(x,y) X_k(x) dx, k = 0,1,2,...,. \qquad (2.3.5)$$

(2.3.5) функциясына $D^{\alpha+\beta}$ операторын қолданып, мына өрнекті аламыз:

$$D^{\alpha+\beta}u_k(y)=\int_0^1 D^{\alpha+\beta}u(x,y)X_k(x)\,dx\,.$$

Ізделінді $u(x,y)$ функциясы (2.3.1) теңдеуінің шарттарын қанағаттандырады, сондықтан төмендегі өрнек дұрыс

$$\int_0^1 D^{\alpha+\beta}u(x,y)X_k(x)\,dx=-\int_0^1 u_{xx}(x,y)X_k(x)\,dx$$

болады.

Соңғы интегралға бөліктеп интегралдау әдісін қолдансақ:

$$-\int_0^1 u_{xx}(x,y)X_k(x)\,dx=-X_k(x)u_x(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}+$$

$$+\int_0^1 X_k'(x)u_x(x,y)\,dx=X_k(0)u_x(0,y)-X_k(1)u_x(1,y)+$$

$$+X_k'(x)u_x(x,y)\Big|_{x=0}^{x=1}-\int_0^1 X_k''(x)u_x(x,y)\,dx\,.$$

Ары қарай, берілген есептің $u_x(0,y)=0, u_x(1,y)=0,$ шекаралық шарттары бойынша $X_k'(0)=0, X_k'(1)=0$ шекатарлық шарттарға және

$$-X_k''(x)=\lambda_k X_k(x)$$

теңдеуге ие боламыз.

Олай болса,

$$D^{\alpha+\beta}u_k(y)=\lambda_k\int_0^1 X_k(x)u(x,y)dx=\lambda_k u_k(y)\,.$$

Сонымен қоса,

$$u_k(0)=\int_0^1 u(x,0)X_k(x)\,dx=\int_0^1 f(x)X_k(x)\,dx=f_k,$$

$$u_k(1)=\int_0^1 u(x,1)X_k(x)\,dx=\int_0^1 g(x)X_k(x)\,dx=g_k.$$

Бұдан, белгісіз $u_0(y), u_k(y), k=1,2,...,$ функциялары үшін төмендегі есептерді аламыз:

$$\begin{cases} D^{\alpha+\beta}u_0(y)=0, 0<y<1 \\ u_0(0)=f_0, u_0(1)=g_0, \end{cases} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{cases} D^{\alpha+\beta}u_{k,1}(y)-\lambda_k u_{k,2}(y)=0, 0<y<1 \\ u_{k,1}(0)=f_{k,1}, u_{k,1}(1)=g_{k,1} \end{cases}. \tag{2.3.7}$$

$u_0(y)$ және $u_k(y)$ функциялары (2.3.6) және (2.3.7) есептерінің шешімдері болады және олар мынаған тең:

$$u_0(y)=(1-y^2)f_0+y^{\alpha}\cdot g_0,$$

$$u_k(y)=f_k C_k(y)+g_k S_k(y).$$

Осылайша, (2.3.1)- (2.3.3) есебінің формальды шешімі (2.3.4) қатар түрінде болады. $u(x,y), u_x(x,y), u_{xx}(x,y)$ және $D^{\alpha+\beta}u(x,y)$ функцияларының тегістігі 2.1.1 және 2.2.1 теоремалардың дәлелдемесіндегі сияқты тексеріледі. Теорема дәлелденді.

2.4. Фурье түрлендіруі және функционалдық кеңістіктер.

Бұл бөлімде біз $S(R^n), D(R^n)-$ Шварц кеңістіктері және олардың түйіндес кеңістіктері туралы мәліметтерді қарастырамыз. Сондай-ақ, кеңістіктерге тиісті болған функциялардың Фурье түрлендірулерін қасиеттерін зерттейміз.

Айталық, $u(x)\in L_1(R^n)$, яғни

$$\int_{R^n}|u(x)|dx<\infty$$

болсын.

Егер $u(x)\in L_1(R^n)$ болса, онда

$$F[u](\zeta)\equiv\tilde{u}(\xi)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}u(x)e^{i(x,\zeta)}dx \tag{2.4.1}$$

шаманы $u(x)$ функциясының фурье түрлендіруі деп атаймыз. Мұнда $(x,\xi)=x_1\xi_1+x_2\xi_2+...+x_n\xi_n, i^2=-1$.

(2.5.1) формуламен берілген интегралда $e^{i(x,\xi)}$ функциясында дәреженің таңбасын ауыстырсақ, онда фурьенің кері түрлендіруінің анықтамасы келіп шығады, яғни

$$F^*[u](\xi)\equiv\tilde{u}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}u(x)e^{i(x,\zeta)}d\xi \qquad (2.4.2)$$

ашық аймак, $k=0,1,2,....$ болсын. $C^k(\Omega)-$ Ω аймағында анықталған, осы аймақта өзі және $k-$ реттіге дейін туындылары үздіксіз болған функциялар жиынын белгілейміз.

$u(x)$ функциясы Ω аймағында берілсін,

$$\operatorname{supp}u=\overline{\{x\in\Omega: u(x)\neq 0\}}$$

түрінде берілген нүктелер жиынын $u(x)$ функциясының тұғыры деп атайды. Басқаша айтқанда $u(x)$ функциясының тұғыры оған 0 ден өзгеше мән беретін нүктелер жиынының тұйықталуы. Мысал үшін $u(t)=\sin t$ болса, онда

$$\{t:\sin t\neq 0\}=R\setminus\{k\pi\},\quad k=0,\pm1,\pm2,...$$

Бұл жиынның тұйықталуы

$$\operatorname{supp}(\sin t)=\overline{\{t:\sin t\neq 0\}}=\overline{R\setminus\{k\pi\}}=R.$$

Сол сияқты

$$\operatorname{supp}(t)=\overline{\{t:t\neq 0\}}=\overline{R\setminus\{0\}}=R.$$

Берілген жиынның тұйықталуы тұйық жиын болады, сол себептен әрқашанда $\operatorname{supp}u(x)-$ тұйық жиын. Бұл мысалдарда $\operatorname{supp}u(x)$ тұйық, бірақ компактболмаған жиындар қарастырылған.

Егер $u(x)$ функциясы Ω аймағында кез – келген ретті үздіксіз туындыға ие болса, онда $u(x)\in C^\infty(\Omega)$ деп есептейміз.

Егер $u(x)\in C^\infty(\Omega)$ және $\exists k\subseteq\Omega$, $k-$ компакт жиын, $u(x)=0,\ x\in\Omega\setminus k$ болса, онда $u(x)\in C_0^\infty(\Omega)$ класта жатады дейді. Мысал үшін

$$u(t)=\begin{cases} e^{\frac{1}{t^2-1}}, |t|\le 1 \\ 0, \ |t|>1 \end{cases}$$

функция $C_0^\infty(R)$ класына тиісті. Мұндағы $C-$ тұрақты және $\int\limits_{R^n} u(x)dx=1$. Соңғы екі мысалда қарастырылған $u(x)$ функциясы үшін $\operatorname{supp}(u(x)), |x|\le 1-$ компакт жиын. Жалпы жағдайда мынандай теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема 2.4.1. $u(x)-$ интегралданатын және $\exists k\subset\Omega\subset R^n$ жиын сыртында 0 ге тең болсын. Онда

$$u_\varepsilon(x)=\int\limits_{R^n} u(x-y)\omega_\varepsilon(y)dy=\int\limits_{R^n}\omega_\varepsilon(x-y)u(y)dy$$

төмендегілер орынды

1) егер $\varepsilon<dist(k,R^n\setminus\Omega)$ болса, онда $u_\varepsilon(x)\in C_0^\infty(R^n)$.

2) $\operatorname{supp}u_\varepsilon\subset K_\varepsilon=\{x:\ dist(x,K)\le\varepsilon\}$;

3) егер $u\in L_p(\Omega), 1\le p<\infty$ болса, онда

$$\|u_\varepsilon(x)-u(x)\|_p\to 0,\ \varepsilon\to 0$$

4) егер $u\in C(\Omega)$ болса, онда Ω аймағында

$$u_\varepsilon(x)\to u(x),\ \varepsilon\to 0.$$

Енді $C_0^\infty(\Omega)$ кеңістігінен кеңірек болған кеңістікті қарастырамыз.

R^n кеңістігінде анықталған, $C^\infty(R^n)$ кеңістігіне тиісті және $\forall a,b$ мультииндекстер үшін

$$\sup_{x\in R^n}\left|x^b\partial^a u(x)\right|<\infty$$

шартын қанағаттандыратын функцялар класын $S(R^n)$ түрінде белгілейміз. Мұнда $b=(b_1,b_2,...,b_n)$, $a=(a_1,a_2,...,a_n)$, $a_j,b_j\in Z_+$, яғни теріс емес бүтін сандар, $\partial^a=\frac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1}...\partial x_n^{a_n}}$. Мысал үшін $a=(1,0,...,0)$ болса, онда $|a|=a_1+a_2+a_3+...+a_n=1$, $\partial^a=\frac{\partial}{\partial x_1}$, $a=(1,2,3,0,...,0)$ болса, онда $|a|=1+2+3+0+...+0=6$, $\partial^a=\frac{\partial^6}{\partial x_1\partial x_2^2\partial x_3^3}$. Осы сияқты $b=(1,2,3,0,...,0)$ болса, онда $x^b=x_1\cdot x_2^2\cdot x_3^3$.

Егер C_0^∞, S, C^∞ кеңістіктерін салыстырсақ, онда

$$C_0^\infty\subset S\subset C^\infty$$

болатыны айқын.

S кеңістігін Шварц кеңістігі деп атаймыз.

Егер $u_j(x)\in S$ тізбегі берілген болып $\forall a,b$ мультииндекстері үшін

$$\sup_{x\in R^n}\left|x^b\partial^a\left(u_j(x)-u(x)\right)\right|\to 0,\ \ j\to\infty$$

болса, онда $u_j(x)$ тізбегі $u(x)$ функциясына S кеңістігінде жинақталады дейміз.

S кеңістігінде Фурье түрлендіруі үшін мынадай теорема орынды

Теорема 2.4.2.

1) $Fu(\zeta)\equiv\tilde{\varphi}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}u(x)e^{i(x,\zeta)}dx$ түрлендіру S кеңістігін S тің өзіне өткізеді және үздіксіз болады;

2) $\forall\tilde{u}(\zeta)$ үшін

$$u(x)=F^{-1}(\tilde{u})(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^n}\int\limits_{R^n}\tilde{u}(\zeta)e^{i(x,\zeta)}d\zeta$$

кері түрлендіруі анықталған.

Бұған қосымша $F(S)=S$, яғни $\forall v\in S$ элемент қандайда бір $u\in S$ элементтерінің бейнесі;

3) Егер $D_k=\frac{\partial}{\partial x_k}$ болса, онда кез – келген $u\in S$ үшін

$$\widetilde{(D_k u)}(\zeta)=\xi_k\tilde{u}(\zeta),$$
$$(x_k u)(\xi)=-D_k\tilde{u}(\zeta).$$

Соңғы екі теңдікті мысалдармен тексерейік. $u(x)\in S$ болсын. Онда

$$\tilde{u}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}u(x)e^{i(x,\zeta)}dx.$$

Бұдан

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\tilde{u}(\zeta)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}u(x)(ix_k)e^{i(x,\zeta)}dx,$$
$$\frac{\partial^2}{\partial x_j^2}\tilde{u}(\zeta)=\frac{(-1)}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}u(x)x_k^2e^{i(x,\zeta)}dx,$$

$$\Delta_\zeta \tilde{u}(\zeta) = \frac{(-1)}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} u(x)|x|^2 e^{i(x,\zeta)} dx.$$

Керісінше,

$$\widetilde{\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) e^{i(x,\zeta)} dx =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x) e^{ix_j\xi_j} \cdot e^{ix_1\zeta_1} \dots e^{ix_n\zeta_n} dx_j d\tilde{x} = -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} u(x) i\zeta\, j e^{i(x,\zeta)} dx,$$

$$\widetilde{\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}\right)}(\zeta) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} u(x)(i\zeta_j)^2 e^{i(x,\zeta)} dx = -\frac{\zeta_j^2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} u(x) e^{i(x,\zeta)} dx.$$

Бұдан

$$\widetilde{(\Delta u)}(\zeta) = -\frac{|\zeta|^2}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} u(x) e^{i(x,\zeta)} dx = -|\zeta|^2 \tilde{u}(\zeta).$$

Сонымен

$$\widetilde{(\Delta u)}(\zeta) = -|\zeta|^2 \tilde{u}(\zeta).$$

Соңғы теңдіктен

$$\widetilde{\left((1-\Delta)u\right)}(\zeta) = \left(1+|\zeta|^2\right)\tilde{u}(\zeta)$$

нәтиже келіп шығады.

Теорема 2.4.3. Егер $u, v \in S$ болса, онда

$$\int_{R^n} u(x)\tilde{v}(x) dx = \int_{R^n} \tilde{u}(x) v(x) dx,$$

$$\int_{R^n} u(x)\tilde{v}(x) dx = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \tilde{u}(\zeta)\overline{\tilde{v}(\zeta)} d\zeta,$$

$$\widetilde{(u * v)}(\zeta) = \tilde{u}(\zeta) \cdot \tilde{v}(\zeta),$$

$$\widetilde{(u \cdot v)}(\zeta) = (2\pi)^{-n/2} \tilde{u}(\zeta) * \tilde{v}(\zeta)$$

теңдіктер орынды.

Біз жоғарыда $C^{\infty}, C_0^{\infty}, S$ кеңістіктердің анықтамасын бердік. Осы кеңістіктерге түйіндес кеңістіктерді ($C^{\infty}, C_0^{\infty}, S$ кеңістіктерде анықталған сызықтық функционалдар кеңістіктері) сәйкес түрде E', D', S' символдарымен белгілейміз:

$$C_0^{\infty} \subset S \subset C^{\infty} \;\; \Rightarrow \;\; D' \supset S' \supset E'.$$

Біз алдағы зерттеулерде $C_0^{\infty}, S, C^{\infty}$ кеңістіктерінің элементтерін $\varphi(x)$, ал E', D', S' кеңістіктердің элементтерін $u(\varphi)$ түрінде белгілейміз.

Анықтама. Егер $u \subset S'$ $\left(u = u(\varphi), \varphi \in S\right)$ болса оның Фурье түрлендіруі деп

$$\tilde{u}(\varphi) = u(\tilde{\varphi})$$

шамаға айтамыз.

Теорема 2.4.4.

1) $\tilde{f}: \;\; S' \to S'$ изоморфизм

2) егер $u \in S'$ болса, онда

$\tilde{f}[Fu] = (2\pi)^{n/2} \hat{u}$;

мұнда $\hat{u}(\varphi) = u(\hat{\varphi}), \hat{\varphi}(x) = \varphi(-x)$

3) $u \to \tilde{u}$ бейнелеу S' кеңістігінде үздіксіз.

Біз жоғарыда Фурье турлендіруі тілінде $\Delta -$ Лаплас операторының $u(x)$ функциясына әсерін көрдік:

егер

$$u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{i(x,\zeta)} \tilde{u}(\zeta) d\zeta$$

болса, онда

$$\Delta u(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} e^{i(x,\zeta)} |\zeta|^2 \, \tilde{u}(\zeta) d\zeta \, .$$

Осы теңдіктің жалпы жағдайдағы аналогын көрейік.

Айталық, бізге

$$P(\partial) = \sum_{|a| \le \mathrm{m}} C_a(x) \partial^a$$

операторы берілсін. Мұнда $a = (a_1, a_2, ..., a_n) -$ мультииндекс, $\partial^a = \dfrac{\partial^{|a|}}{\partial x_1^{a_1} \ldots \partial x_n^{a_n}}$, $|a| = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, m = 0,1,\ldots$. Осы операторға сәйкес келетін

$$P(\zeta)=\sum_{|a|\le m} C_a(x)\xi^a$$

шаманы $P(\partial)$ операторының символы деп атаймыз.

Мысал үшін $P(\partial)=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+...+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}-$ Лаплас операторы болса, онда

$$P(\partial)=\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2\equiv|\xi|^2.$$

Егер $P(\partial)-$ дифференциалдық оператор болса, онда $P(\xi)-$ көпмүше болатыны айқын.

Анықтама. Егер $u(x)\in S'$ және

$$u(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{i(x,\zeta)}\tilde{u}(\zeta)d\zeta$$

болса, онда

$$Pu(x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n} e^{i(x,\zeta)}P(x,\zeta)\tilde{u}(\zeta)d\zeta$$

түрінде әсер ететін операторды псеводо дифференциалдық оператор дейміз. Мұнда $P(x,\zeta)$ жеткілікті тегіс және $|\zeta|\to\infty$ ұмтылғанда ол полином түрінде өседі.

Егер $P(x,\zeta)$ функциясы үшін $\forall x=x_0\in\Omega$ нүктесінде

$$P(x,\zeta)\neq 0,\ \zeta\neq 0$$

теңдігі орындалса, онда $P-$ эллипстік түрдегі псевдодифференциалдық оператор дейді. Мысал үшін $P(\partial)=-\Delta,\ P(\partial)=1-\Delta$ – эллипстік түрдегі псевдодифференциалдық операторлар болады.

Біз бұл бөлімде Соболев кеңістігінің анықтамасы және кейбір қасиеттерін баяндаймыз.

Кез – келген $s\in R$ үшін $H^s(R^n)$ кеңістігі деп

$$\|u\|_s^2=(2\pi)^{-\pi/2}\int_{R^n}|\tilde{u}(\zeta)|^2\left(1+|\zeta|^2\right)^s d\zeta$$

нормасы шектелген функциялар класына айтады.

Егер $s=0$ болса, онда $H^s\left(R^n\right)=L_2\left(R^n\right)$. s параметрдің $s>\frac{n}{2}$ мәндерінде $H^s\left(R^n\right)$ кеңістігінің элементтері үздіксіз, шектелген функциялар болады, ал егерде $s<0$ болса, онда бұл кеңістіктің элементтері жалпыланған функциялар, яғни функционалдар.

$H^s\left(R^n\right)$ кеңістігі элементінің нормасын

$$\|u\|_s=\left\|F^{-1}\left(1+|\zeta|^2\right)^{s/2}Fu\right\|_0$$

түрінде жазуға болады.

H^s_{comp} символымен H^s кеңістігіне тиісті және тұғыры R^n кеңістігінде компакт болатын функциялар жиынын белгілейміз. Мұнда анықтама бойынша $\varphi_j\left(x\right)\in H^s_{comp}$ функциялар тізбегі $\varphi_0\left(x\right)$ функцияға жинақталады дейді, егерде $\forall\, j\geq 1$ үшін қандайда бір $K\subset R^n$ компакт жиын табылып $\operatorname{supp}\varphi_j\subset K$ және

$$\left\|\varphi_j\left(x\right)-\varphi_0\left(x\right)\right\|_s\to 0,\;\; j\to\infty$$

болса.

Егер $\varphi\left(x\right)\in H^s_{comp}$ және $\forall b,\,|b|\leq m-1$ үшін $\left(\varphi\left(x\right),x^b\right)=0$ болса, онда $\varphi\left(x\right)\in H^s_{comp,m}$ дейміз.

Сонымен

$$\varphi\left(x\right)\in H^s_{comp,m}=\left\{\varphi\left(x\right):\;\varphi\left(x\right)\in H^s_{comp},\left(x^b,\varphi\right)=0,|b|\leq m-1\right\}$$

Егер $s=\left(s',s_n\right)$ болса, $H^{s',s_n}\left(R^n\right)$ кеңістігін мына түрде анықтаймыз:

$$H^{s',s_n}\left(R^n\right)=\left\{\begin{array}{l}\varphi\left(x\right):\varphi\left(x\right)\in L_2\left(R^n\right),\\ \|\varphi\|_{s',s_n}=\left(\int\limits_{R^n}\left(1+\left|\zeta_1^1\right|^2\right)^{s^1}\left(1+\zeta_n^2\right)^{s_n}\left|\tilde{\varphi}\left(\zeta\right)\right|^2d\zeta\right)^{\frac{1}{2}}<\infty\end{array}\right\}$$

мұнда $\zeta'=\left(\zeta_1,...,\zeta_{n-1}\right)$. Осы сияқты, H^{s^1,s_n}_{comp} және $H^{s^1,s_n}_{comp,m}$ кеңістіктерін анықтауға болады. Мысал үшін $\varphi\left(x\right)\in H^{s^1,s_n}_{comp}\Leftrightarrow\varphi\in H^{s^1,s_n}_{comp}$ және

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\varphi\left(x',x\right)x_n^k dx_n=0,\qquad k=0,1,...,m-1.$$

Сондай – ақ, $C^m(R_+,X)$ символымен мәндері X кеңістігінде жататын $m-$ реттіге дейін үздіксіз туындыға ие болған $u(t), t\in R_+=[0,\infty)$ вектор функцияларға айтамыз.

Егер $u(t)\in L_\infty(R_+,X)$ болса, онда

$$\sup_{t>0}\|u(t)\|_X<\infty$$

деп есептейміз.

2.5. Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін бір шеттік есептің шешілімділігі туралы

Есептің қойылымы үшін кейбір функционалдық кеіңстіктерді енгізейік. G облысы R^n кеңістігінде жататын ашық облыс болсын. $\Psi_{G,p}(R^n)$ символымен $\varphi(x)\in L_p(R^n)$ функциялар жиынын белгілейік. Мұнда $suupF(\varphi)\subseteq G$, яғни $\varphi(x)$ функциясының түрлендіруінің G облысында компактілі тұғыры бар болады. $\varphi_m(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ тізбегі $\varphi_0(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ функциясына жинақталады деп есептейміз, егер келесі екі шарт орындалса:

1) $suup\varphi_m\subseteq K, \forall m\in N$ болатындай $K\subset G$ компакт бар болады;
2) егер $m\to\infty$ ұмтылғанда $L_p(R^n)$ кеңістігінде $\varphi_m(x)\to\varphi_0(x)$ нормада болса.

$C^l\left[t\geq 0, C(G)\right]$ символымен $f(t,\xi)$ функциялар кеңістігін белгілейік. Бұл жерде $t\in[0,\infty)$ әрбір фиксирленген мәнінде $f(t,\xi)$ ξ бойынша үзіліссіз болады және әрбір фиксирленген $\xi\in G$ мәнінде t айнымалысы бойынша $l-$ реттіге дейінгі туындысы үзіліссіз болады. $C^\infty\left[t>0, C(G)\right]$ кеңістігіде осылайша анықталады.

Егер әрбір фиксирленген $t\in[0,\infty)$ мәнінде $u(t,x)$ функциясы $\Psi_{G,p}(G)$ класына тиесілі болса және t ның $x\in G$ фиксирленген әрбір мәнінде үзіліссіз болса, онда $u(t,x)\in C\left(t\geq 0;\Psi_{G,p}(G)\right)$ тиесілі болады деп есептейміз. $C^l\left[t\geq 0;\Psi_{G,p}(G)\right], 0\leq l\leq\infty$ кеңістігіде осылайша анықталады.

Келесі зерттеулерде $\Psi'_{-G,q}(R^n)$ кеңістігі ретінде $\Psi_{G,p}(R^n)$ кеңістігінде анықталған сызықты, үзіліссіз функцияларды қарастырамыз, мұнда $q=p(p-1)^{-1}$. $\Psi'_{-G,q}(R^n)$ кеңістігінде жинақтылық стандартты түрде енгізіледі, яғни әлсіз топология арқылы.

Енгізілген кеңістіктердің анықтамалары мен қасиеттері [1] әдебиетте зерттелінген.

Келесі есепті қарастырайық

$$D_t^{2\alpha}u(t,x)+\Delta_x u(t,x)=0, t>0, x\in R^n, \tag{2.5.1}$$

$$u(t,x)\big|_{t=0}=\varphi(x). \tag{2.5.2}$$

Мұнда $0<\alpha<1$, $D_t^{2\alpha}-$болса $2\alpha-$ретті секвенциалды туынды, яғни $D_t^{2\alpha}={}_cD^{\alpha}\cdot{}_cD^{\alpha}$, ал ${}_cD^{\alpha}-$Капуто мағынасындағы $\alpha-$ретті туынды ([4] әдебиеттен қараңыз, 91-бет).

Осындай есептер төртбұрышта және жарты жазықтықта [50-54] әдебиеттерде зерттелінген.

(2.6.1),(2.6.2) есептің шешімі үшін кеңістік енгізейік.

Анықтама 2.5.1. $0<\alpha<1$ болсын. $C\left(t\ge 0;\Psi_{G,p}(R^n)\right)$ класыны тиесілі $u(t,x)$ функциясы үшін $D^{2\alpha}u(t,x), \Delta_x u(t,x)\in C\left(t>0;\Psi_{G,p}(R^n)\right)$болса және (2.5.1) теңдеу мен (2.6.2) шартты дәл қанағаттандырса, онда $u(t,x)$ функциясы (2.6.1),(2.3.2) есептің шешімі деп аталады.

Анықтама 2.5.2. $0<\alpha<1$ болсын. $C\left(t\ge 0;\Psi_{G,p}(R^n)\right)$ класыны тиесілі $u(t,x)$ функциясы үшін $D^{2\alpha}u(t,x), \Delta_x u(t,x)\in C\left(t>0;\Psi_{G,p}(R^n)\right)$болса және (2.5.1) теңдеуі мен (2.6.2) шартын мынадай мағынада қанағаттандырса: кез келген $v(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ үшін төмендегі теңсіздік орындалса

$$<D_t^{2\alpha}u(t,x),v(x)>=<u(t,x),\Delta v(x)>, t>0,$$

$$\lim_{t\to 0}<u(t,x),v(x)>=<\varphi(x),v(x)> .$$

онда $u(t,x)$ функциясы (2.6.1),(2.3.2) есебінің әлсіз шешімі деп аталады.

2. Негізгі есепті зерттеу.

Келесі тұжырым орынды [2,82 бет, Теорема 2.4]

Лемма 2.5.1. Егер $A(D)$операторы $A(\xi)\in C^{\infty}(G)$ символымен псевдодифференциалдық оператор болса, онда келесі тұжырымдар орынды:

1) $\Psi_{G,p}(G)$ кеңістігі $A\left(D\right)$операторына қатысты инвариантты;

2) $A(D):\Psi_{G,p}(G)\to\Psi_{G,p}(G)$ бейнелеуі үзіліссіз.

Теорема 2.5.1. $0<\alpha<1, \varphi(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ болсын. Сонда (2.5.1),(2.3.2) Дирихле есебінің жалғыз *күшті* шешімі бар болады және ол мына түрде өрнектеледі

$$u(t,x)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{R^n}E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\equiv E(\alpha,t,D)\varphi(x). \qquad (2.5.3)$$

Дәлелдеуі: $\varphi(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ болсын. (2.5.1),(2.3.2) есебі үшін x айнымалысы бойынша Фурье түрлендірүін қолданып төмендегі өрнекті аламыз

$$D^{2\alpha}\tilde{u}(t,\xi)-|\xi|^2\tilde{u}(t,\xi)=0,\ t>0, \qquad (2.5.4)$$

$$\tilde{u}(t,\xi)\big|_{t=0}=\tilde{\varphi}(\xi) \qquad (2.5.5)$$

[56] жұмыста (4) теңдеудің жалпы шешімі төмендегі функция болатындығы дәлелденген

$$\tilde{u}(t,\xi)=C_1(\xi)E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})+C_2(\xi)E_{\alpha,1}(|\xi|t^{\alpha}).$$

Мұнда $C_1(\xi),C_2(\xi)$ - функциялары ξ ден тәуелді болған тұрақты функциялар, ал $E_{\alpha,1}(z)$- Миттаг – Леффлер функциясы ([4],40 - бет). $t\to\infty$ болғанда $E_{\alpha,1}(|\xi|t^{\alpha})\to\infty$ болады. $C_2(\xi)=0$ деп есептейік, сонда (2.5.4),(2.3.5) есептің шешімі мына функция болады.

$$\tilde{u}(t,\xi)=\tilde{\varphi}(\xi)E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha}) \qquad (2.5.6)$$

(2.5.6) функцияға Фурьенің кері түрлендіруін қолданып (2.5.3) теңдігін аламыз. Осылайша біз 2.3.1- ші есептің формальді шешімін алдық. $E_{\alpha,1}(z)$- функциясы z айнымалысы бойынша бүтін функция болып табылады (қараңыз, [2], 40 - бет). $|\xi|=\sqrt{\xi_1^2+\xi_2^2+...+\xi_n^2}$ функциясы G облысында үзіліссіз функция болғанғандықтан, әрбір фиксирленген $t\ge 0$ мәнінде $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})$ функциясы G облысында үзіліссіз болады, яғни $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\in C(G)$. Сонымен қатар t^{α} функциясының кез келген ℓ- ретті туындысы $t>0$ облысында үзіліссіз болады. Сондықтан $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\in C^{\infty}\left[t>0,C(G)\right]$. Егер де $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...$ болса, онда t^{α} функциясының $m-1$ ретті туындысы үзіліссіз болады, яғни $t^{\alpha}\in C^{m-1}[0,\infty)$. Сәйкесінше $0<\alpha<1$ болғанда $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\in C\left[t\ge 0,C(G)\right]$ болады. $D^{2\alpha}E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})=|\xi|E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})$ теңдігі орынды болғандықтан, $D^{2\alpha}E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\in C\left[t\ge 0,C(G)\right]$болады. $t=0$ мәнінде $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\big|_{t=0}=1$ болатыны айқын. Әрі қарай $E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\in C^{\infty}\left[t>0,C(G)\right]$ және $\varphi(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$ болғандықтан, Лемма 2.3.1 бойынша төмендегіні аламыз:

a) кез келген фиксирленген $t>0$ үшін $P_{\alpha}(t,D)\varphi(x)\in\Psi_{G,p}(R^n)$,

b) кез келген фиксирленген $x\in R^n$ үшін $P_{\alpha}(t,D)\varphi(x)\in C(t\ge 0)\cap C^1(t>0)$.

Сондықтан $u(t,x)\in C^1\left[t>0;\Psi_{G,p}(R^n)\right]\cap C\left[t\ge 0;\Psi_{G,p}(R^n)\right]$ болады.

Сонымен бірге,

$$D^{2\alpha}E_{\alpha,1}(-|\xi|^2 t^{\alpha}) = |\xi|^2 E_{\alpha,1}(-|\xi|^2 t^{\alpha}) \in C\left[t \geq 0, C(G)\right] \cap C^{\infty}\left[t > 0, C(G)\right],$$

және сәйкесінше

$$D^{2\alpha}u(t,x) \in C^1\left[t > 0; \Psi_{G,p}(R^n)\right] \cap C\left[t \geq 0; \Psi_{G,p}(R^n)\right].$$

Әрі қарай

$$D^{2\alpha}u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} |\xi|^2 E_{\alpha,1}(-|\xi| t^{\alpha}) \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi$$

болғандықтан және

$$\Delta_x u(t,x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} E_{\alpha,1}(-|\xi|^2 t^{\alpha}) \tilde{\varphi}(\xi) \Delta_x e^{-i(x,\xi)} d\xi =$$

$$= -\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} |\xi|^2 E_{\alpha,1}(-|\xi|^2 t^{\alpha}) \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi$$

болса, онда

$$D^{2\alpha}u(t,x) + \Delta_x u(t,x) = 0$$

болады, яғни (2.5.3) функциясы (2.5.1) теңдеуін қанағаттандырады. Осылайша төмендегі теңдік орынды болады

$$\lim_{t\to 0} u(t,x) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} E_{\alpha,1}(-|\xi|^2 t^{\alpha}) \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{R^n} \tilde{\varphi}(\xi) e^{-i(x,\xi)} d\xi = \varphi(x).$$

Сәйкесінше (2.5.2) шекаралық шартыда орындалады.Теорема дәлелденді.

Теорема2.5.2. $0 < \alpha < 1$ және $\varphi(x) \in \Psi'_{-G,q}(R^n)$ болсын. Сонда (2.5.1), (2.5.2) Дирихле есебі жалғыз әлсіз шешімге ие болады және ол мына түрде өрнектеледі

$$u(t,x) = E(\alpha, t, -D)\varphi(x). \tag{2.5.7}$$

Дәлелдеуі. $\varphi(x) \in \Psi'_{-G,q}(R^n)$ және $v(x)$- функциясы $\Psi_{G,p}(R^n)$да жататын тұрақты функция болсын. Біріншіден Лемма 2.3.1 дегі тұжырымдамадан

(2.5.7) теңдеуінің оң шетіндегі $E(\alpha,t,-D)\varphi(x)$ функциясы $\Psi'_{-G,q}(R^n)$ кеңістігінде функционал болатындығы келіп шығады. Әрі қарай, егер де

$$u(t,x)=E(\alpha,t,D)\varphi(x)\equiv\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi$$

болса, онда

$$<\Delta_x u(t,x),v(x)>=\int_{R^n}u(t,x)\Delta\overline{v(x)}dx=$$

$$=\int_{R^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)\Delta\overline{v(x)}dx=$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\left(\int_{R^n}e^{-i(x,\xi)}\Delta\overline{v(x)}dx\right)E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi=$$

$$=-\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}\left(\int_{R^n}|\xi|^2\,e^{-i(x,\xi)}\overline{v(x)}dx\right)E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)d\xi=$$

$$=-\int_{R^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}|\xi|^2\,E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)\overline{v(x)}dx\,.$$

Екінші жағынан,

$$<D_t^{2\alpha}u(t,x),v(x)>=\int_{R^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}|\xi|^2\,E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)\overline{v(x)}dx=$$

$$=\int_{R^n}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{R^n}|\xi|^2\,E_{\alpha,1}(-|\xi|t^{\alpha})\tilde{\varphi}(\xi)e^{-i(x,\xi)}d\xi\right)\overline{v(x)}dx\,.$$

Сондықтан

$$<D^{2\alpha}u(t,x)-\Delta u(t,x),v(x)>=0$$

яғни, (2.5.7) функциясы (2.5.1) теңдеуін әлсіз мағынада қанағаттандырады.

Әрі қарай $E_{\alpha,1}(0)=1,\lim\limits_{t\to 0}E(\alpha,t,D)\varphi(x)=\varphi(x)\equiv I\varphi(x),I-$ бірлік оператор болғандықтан

$$\lim_{t\to 0}<u(t,x),v(x)>=<\varphi(x),v(x)>$$

шекаралық шартта орындалады. Теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Диссетациялық жұмыста Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогтары үшін әр түрлі облыста негізгі шеттік есептердің шешілімділігі мәселесі зерттелінді. Бұл жерде бөлшек ретті туынды ретінде Капуто мағынасындағы туынды қарастырылды.

Дисертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

Секвенциал туынды қатысқан бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі құрылды;

Секвенциал туынды қатысқан бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеулердің шешімін құрудың операциялық әдісі зерттелінді;

Капуто туындысы қатысқан дифференциалдық теңдеу үшін Дирихле есебінің шешімдері айқындалды;

Секвенциал туынды қатысқан бөлшек ретті жәй дифференциалдық теңдеулер үшін Коши және Дирихле түріндегі есептердің шешімі айқын түрде табылды;

Төртбұрышта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Дирихле есебінің шешімі қатар түрінде анықталды;

Төртбұрышта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін периодты шартты есептің шешілімділі айқындалды;

Төртбұрышта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Нейман түріндегі шеттік есептің шешілімділі айқындалды;

Жарты жолақта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Дирихле есебінің шешімі қатар түрінде анықталды;

Жарты жолақта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін периодты шартты есептің шешілімділі айқындалды;

Жарты жолақта Лаплас теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Нейман түріндегі шеттік есептің шешілімділі айқындалды;

Шеттік есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоремалар дәлелденді.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1 Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва, Ижевск: РХД. – 2010. –568с.

2 Umarov S. Introduction to Fractional and Pseudo-Differential Equations with Singular Symbols. Springer, International Publishing: Switzerland. – 2015. – 434 p.

3 Diethelm K., Ford N.J. Analysis of Fractional Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – V. 265. – P. 229–248.

4 Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, Elsevier Science B.V, 2006. –523 p.

5 Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering //Critical Reviews in Biomedical Engineering. – 2004. – V. 32,№ 1. –P. 1-104.

6 Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – John Wiley & Sons, New York, 1993. – 276 p.

7 Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego, Academic Press, 1999. –340 p.

8 Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T., Eds. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. – Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007. –416 p.

9 Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. –Gordon and Breach, Switzerland,1993. –976 p.

10 Ortigueira M. D., and Tenreiro Machado J. A. Special issue on Fractional signal processing and applications // Signal Processing. –2003. –V. 83,№ 11. –P. 2285–2286.

11 Oldham K. B. Fractional differential equations in electrochemistry //Advances in Engineering Software. –2010. –V. 41, №. 1. –P. 9–12.

12 Sorrentinos G. Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams //in Proceedings of IMAS. – Saint Louis, Mo, USA, 2006.

13 Aghajani A., Jalilian Y., Trujillo J. J. On the existence of solutions of fractional integro-differential equations //Fractional Calculus and Applied Analysis. –2012. –V. 15, № 1, –P. 44–69.

14 Agarwal R. P., Ahmad B., Alsaedi A., Shahzad N. Existence and dimension of the set of mild solutions to semilinear fractional differential inclusions //Advances in Difference Equations. –2012. –V. 2012. article 74.

15 Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления.

I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 4. –С. 3–42.

16 Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., K. Biзen. On the stability of some discrete fractional nonautonomous systems //Abstract and Applied Analysis. –2012. –Vl. 2012, Article ID 476581, 9 pages.

17 Atangana A. Secer A. He time-fractional coupled-Korteweg-de-Vries equations //Abstract and Applied Analysis. –2013. –V. 2013, Article ID 947986, 8 pages.

18 Xiang Sh., Han Zh., Zhao P., Sun Y. Oscillation Behavior for a Class of Differential Equation with Fractional-Order Derivatives //Abstract and Applied Analysis. –2014. –V.2014. Article ID 419597, 9 pages.

19 Baleanu D., Mustafa O. G., Agarwal R. On the solution set for a class of sequential fractional differential equations //Journal of Physics A. –2010. –V. 43, № 38. –7p.

20 Cascaval R.C., Eckstein E. C. , Frota C.L., Goldstein J.A. Fractional telegraph equations //J. Math. Anal. Appl. –2002. –V.275. –P. 145-159.

21 Wei Zh., Li Q., Che J. Initial value problems for fractional differential equations involving Riemann–Liouville sequential fractional derivative.//Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2010. –V. 367,№ 1. –P. 260–272.

22 НахушевА.М.Оматематических и информационных технологиях моделирования и управления региональным развитием//Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук.-2007. -Т 9, №1. -С. 128-137.

23 Масаева О. Х. Задача Дирихле для фрактального уравнения Лапласа в прямоугольной области. //Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2008. – Т.10. №2. –С.

24 Масаева О.Х. Задача Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа с производной Капуто. //Дифференциальные уравнения. – 2012. – Т.48. №3. – С.442-446.

25 Масаева О.Х. К вопросу единственности решения задачи Дирихле для обобщенного уравнения Лапласа в полосе. //Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 2010. – Т.12. №2. – С.36-38.

26 Saxena Ram K., Tomovski Z., Sandev T. Fractional Helmholtz and fractional wave equations with Riesz-Feller and generalized Riemann-Liouville fractional derivatives. arXiv:1406.3722v1. [math-ph].14 Jun.2014.

27 M. Dalla Riva and S. Yakubovich, On a Riemann–Liouville fractional analog of the Laplace operator with positive energy. //Integral Transforms and Special Functions. – 2012.– V.23. №.4. – PP.277–295.

28 Yakubovich S. Eigenfunctions and Fundamental Solutions of the Fractional Two-Parameter Laplacian. //International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences. – V.2010, – 18 p.

29 Липневич В.В. Дробный аналог оператора Лапласа и его простейшие свойства. //Труды Института математики. НАН РБ. – 2011. – Т.19. № 2. – С.82–86
30 Barrios B., Colorado E., dePablo A., Sánchez U. On some critical problems for the fractional Laplacian operator.//J. Differential Equations .-2012.-252.PP. 6133–6162.
31 Sandev T., Metzler R., Tomovski Z. Fractional diffusion equation with a generalized Riemann-Liouville time fractional derivative.// J. Phys. A: Math. Theor. -2011.- 44 .- PP. 25-52.
32 Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving fractional boundary value problems with Dirichlet boundary conditions using a new iterative method.//Computers & Mathematics with Applications. –2010. –V. 59,№ 5. –P. 1801–1809.
33 Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, Switzerland. –1993.515p.
34 Agrawal Om.P. Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain //Nonlinear Dynamics. –2002. –V. 29,1-4. –P. 145-155.
35 Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving multi-term linear and non-linear diffusion–wave equations of fractional order by Adomian decomposition method //Applied Mathematics and Computation. –2008. –V.202. –P. 113–120.
36 Sandev T., Tomovski Z. The general time fractional wave equation for a vibrating string. J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. –V. 43. –12p.
37 Учайкин В.В. Метод дробных производных. –Изд.”Артишок”.–2008.–518с.
38 Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. – New Jersey.World Scientific. – 2000. – 85 p.
39 Kirane M., Turmetov B.Kh., Torebek B.T. A nonlocal fractional Helmholtz equation // Fractional Differential Calculus. – 2017. – V. 7, № 2, – P. 225–234
40 Luchko Y., Al-Refai M. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications //Fract. Calc. Appl. Anal. –2014. –V.17. –P.483-498.
41 Luchko Y., Mainardi F.Some properties of the fundamental solution to the signalling problem for the fractional diffusion-wave equation //Central European Journal of Physics. –2013. –V.11. –P. 666–675.
42 Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation //Fract. Calc. Appl. Anal. –2012. –V.15. –P.141-160.
43 Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2011. –V.374. –P. 538-548.

44 Luchko Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations.//Fract. Calc. Appl. Anal. –2011. –V.11. –P.110-124.
45 Luchko Y., Hilfer R., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives //Fract. Calc. Appl. Anal. –2009. –V.12. –P.299-318.
46 Luchko Y. Operational method in fractional calculus//Fract. Calc. Appl. Anal. –1999. –V2. –P.463-489.
47 Luchko Y. Gorenflo R . An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives//Acta Mathematica Vietnamica. –1999. –V.24. –P.207-233 .
48 Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. —John Wiley & Sons, INC. —1993. —384 p.
49 Nakagawa J., Sakomoto K., Yamamoto M.. Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations –new mathematical aspects motivated by industrial collaboration //Journal of Math-for-Industry. –2010. –V.2 (2010A-10). –P.99-108.
50 Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order //Sbornik Mathematics. –2011. –V. 202:4. P.571–582.
51 Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для дробного аналога уравнений Лапласа в полуполосе // Вестник КарГУ. Серия " Математика".–2014.№. 3.– С.139-147.
52 Turmetov B.Kh, Torebek B. T. On a class of fractional elliptic problems with an involution perturbation // AIP Conference Proceedings. – 2016. –V. 1759, 020070-1-020070-6 ; doi: 10.1063/1.4959684.
53 Turmetov B. Kh.,Torebek B. T.On solvability of some boundary value problems for a fractional analogue of the Helmholtz equation//New York Journal of Mathematics. –2014. –V 20(2014).–P.1237-1251.
54 Turmetov B.Kh., Torebek, B.T., Ontuganova Sh. Some problems for fractional analogue of Laplace equation // International Journal of Pure and Applied Mathematics.2014. – V. 94, № 4. – P. 525 - 532.
55 Ильин В.А., Поздняк Е.Г. Основы математического анализа. Физмат, Москва. - 2002.
56 Baleanu D.,Diethelm K., Scalas E, Trujillo J.J.Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific Publishing Company .New Jersey. – 2012. – 428 p