Ф-ОБ-001/033

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

ӘОЖ-517.95

Мамадалиева Камола Абдикадирқызы

БӨЛШЕК РЕТТІ ТЕЛЕГРАФ ТЕҢДЕУІ ҮШІН НЕГІЗГІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МӘСЕЛЕЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

6М060100-МАТЕМАТИКА мамандығы бойынша математика ғылымдарының магистрі академиялық дәреже алу үшін магистрлік диссертация

ТҮРКІСТАН-2015

Ф-ОБ-001/033

ҚАЗАҚСТАН РЕСПУБЛИКАСЫНЫҢ БІЛІМ ЖӘНЕ ҒЫЛЫМ МИНИСТРЛІГІ
Қ.А.ЯСАУИ АТЫНДАҒЫ ХАЛЫҚАРАЛЫҚ ҚАЗАҚ-ТҮРІК УНИВЕРСИТЕТІ

Қорғауға жіберілді:
Математика кафедрасының
меңгерушісі, техн.ғ.к
__________Қошанова М.Д.
«___»__________2015 ж.

Магистрлік диссертация

БӨЛШЕК РЕТТІ ТЕЛЕГРАФ ТЕҢДЕУІ ҮШІН НЕГІЗГІ ЕСЕПТЕРДІҢ ШЕШІМДІЛІГІ МӘСЕЛЕЛЕРІН ЗЕРТТЕУ

мамандығы: 6М060100-МАТЕМАТИКА

Магистрант _______________________________ К.А.Мамадалиева
Ғылыми жетекшісі,
ф.-м.ғ.д., профессор _________________________ Б.Х.Турметов

ТҮРКІСТАН-2015

АННОТАЦИЯ

В настоящей диссертационной работе исследованы вопросы разрешимости основных задач для дробных аналогов гиперболических уравнений дробного порядка со секвенциальной производной. Для случая регулярных, но не усиленно регулярных краевых условий доказаны теоремы о существовании единиственности решения телеграфного уравнения дробного порядка. Получено решения и исследована гладкость решения в некоторых функциональных пространствах.

ÖZET

Aşağıdaki tez araştırmada hiperbolik denklemler sıralı tűrevi kesirli emri ile analogları icin solvability temel görevli sorular araştırılmış. . Durum normal değil, ama çok düzenli sınır koşulları teoremi ispat varlığını tel denklem çözüm haber denklemler kısmi sipariş. Alınan kararlar ve düzgünlüğü incelenmiştir çözüm, bazı fonksiyon uzayları.

ABSTRACT

In this dissertation, we have studied the questions of solvability of the main tasks for the fractional analogues of the hyperbolic equations of fractional order with sequential derivative. For the case of regular but not strongly regular boundary conditions theorem is about the existence of edinstvennoe solving Telegraph equations of fractional order. The solutions are obtained and investigated the smoothness of the solution in some functional spaces.

МАЗМҰНЫ

КІРІСПЕ

Зерттеу тақырыбынының көкейтестілігі. Бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің физикалық, химиялық процесстердегі фракталдық құбылыстарды зерртеуде және экономикалық , әлеуметтік-биологиялық құбылыстарды модельдеу кезінде көптеген қолданулары [1-19] әдебиеттерде келтірілген.

Көптеген математикалық моделдер параболалық және гиперболалық теңдеулердің бөлшек аналогтары үшін қисынды қойылған шеттік есептерді зерттеуге келтіріледі. Бұл бағыттағы зерттеулер [20-31] әдебиеттерде баяндалған.

Гиперболалық теңдеулердің бөлшек аналогтары үшін қисынды қойылатын есептердің мысалы төмендегідей болады. Егер Q, R^n-кеңістігіндегі шенелген жиын болса, $\Omega = Q\times(0,T), \Gamma = \partial Q\times[0,T]$ - деп белгілейік және

$$D^{\alpha}u(t,x) - Au(x,t) = 0, (x,t)\in\Omega \tag{0.1}$$

дифференциалдық теңдеу үшін

$$u(x,t) = g(x,t), (x,t)\in\Gamma, \tag{0.2}$$

түріндегі шекаралық шарт және келесі түрдегі бастапқы шарттармен берілген

1) $0<\alpha\le 1$ болғанда,

$$u(x,0) = \varphi(x), x\in Q,$$

2) $1<\alpha\le 2$ болғанда,

$$u(x,0) = \varphi(x), x\in Q,$$

$$Du(x,0) = \varphi(x), x\in Q$$

есепті қарастырйық.

Бұл жерде бастапқы шартта қатысатын D операторы (0.1)-теңдеуде берілген D^{α} оператор түріне қарай анықталады. Егер бұл теңдеуде D^{α}- Риман-Лиувилл операторы болса, онда P интегралдау операторы түрінде, ал D^{α}-Капуто операторы болса, онда туындылау операторы түрінде беріледі.
Гиперболалық теңдеулердің бөлшек ретті аналогтары үшін бастапқы-шеттік есептің қисынды қойылуы кәдімгі гиперболалық теңдеулердің жағдайындағы сияқты болады. [20,24] жұмыстарында бөлшек ретті туынды қатысқан теңдеулер үшін осы есептердің Штурм түріндегі шеттік шарттармен берілген жалпы жағдайы зерттелген.

Гиперболалық типтегі теңдеулердің көп қолданысқа ие болған бір түрі телеграф теңдеуі болып табылады. Бұл теңдеудің бөлшек ретті жалпыламалары [32-40] жұмыстарында зерттелінген.

Аралас есептер теориясының жаңа бір бағыты гиперболалық теңдеулердің секвенциал туындылы бөлшек ретті аналогтары үшін қисынды қойылған есептерді зерттеу болып табылады.

Секвенциал туындылы бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін аралас есептер [34,35] жұмыстарында қарастырылған.

Бұл диссертациялық жұмыста телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін аралас есептер секвенциал туынды қатысқан жағдайында зерттелінген.

Нәтижелердің ғылыми жаңалығы. Бұл бағытта негізгі нәтижелер бүтін ретті дифференциалдық теңдеулер және Риман-Лиувилл, Капуто операторы қатысқан жағдай үшін алынған. Секвенциал туындылы телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін мұндай есептер бірінші рет қарастырылуда.

Жұмыстың мақсаты мен міндеті. Гиперболалық тектес теңдеулердің бөлшек ретті аналогтары үшін қисынды қойылған есептердің жаңа кластарын зерттеу. Негізгі міндеттеріне өтсек, спектралдық әдісті қолданып бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық және бастапқы шарттарымен берілген есептердің шешімі бар, жалғыз болуы туралы теоремаларды дәлелдеу.

Зерттеу әдістері. Бұл ғылыми жұмысты жүргізуде математикалық физика теңдеулері, математикалық талдау, функционалдық талдау, интегралдық теңдеулер әдістері қолданылады.

Автордың жеке үлесі. Есептердің қойылуы автордың ғылыми жетекшісіне тиісті. Теориялық есептеулер мен негізгі ғылыми қорытындылар, диссертанттың жан-жақты көлемді зерттеулері негізінде шығарылды. Алынған нәтижелер мен оларды өңдеу, материалдарды баспаға шығару және конференцияларда жасалған баяндамаларды дайындау жұмыстарын диссертант өзі орындады.

Жұмыстың сынақтан өтуі. Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша ХҚТУ-нің "Математика" кафедрасы ғылыми семинарында және Ташкент қаласында М.Улугбек атындағы Ұлттық Узбекистан университетінде өткен Республикалық ғылыми конференцияда баяндамалар жасалынды.

Жұмыстың жариялылығы. Диссертациялық жұмыстың материалдары бойынша 2 ғылыми мақала жарияланған, оның ішінде 1 мақала конференция жинағында және 1 мақала ХҚТУ хабаршысы журналда жарық көрген.

Диссертациялық жұмыстың көлемі мен құрылымы. Диссертациялық жұмыс кіріспеден, 2 тараудан, қорытындыдан және әдебиеттер тізімінен тұрады. Негізгі материал бетпен берілген, бес қолданылған әдебиеттер атаулары келтірілген.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

Енді диссертациялық жұмыста қарастырылған есептерді баяндауға өтейік.

Бірінші тараудың бірінші параграфында секвенциал туындылы жәй дифференциалдық теңдеудің арнайы түрін шешу әдісі қарастырылған.

Айталық, $0 < \alpha \leq 1,\ \ a > 0$ болсын. Келесі Коши есебін қарастырайық:

$$D^{2\alpha}u(t) + 2aD^{\alpha}u(t) + bu(t) = f(t) \tag{0.3}$$

$$u(0) = A, \;\; D^{\alpha}u(0) = B \tag{0.4}$$

мұндағы $f(t)$ – берілген функция, b, A, B – тұрақтылар және $D^{2\alpha} = {}_C D^{\alpha}{}_C D^{\alpha}$.

1-лемма. Кез-келген $f(t) \in C[0,T]$ функциясы үшін (0.3)-(0.4) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде болады:

1) егер $b \neq a^2$ болса, онда

$$u(t) = \frac{A}{\lambda^{+} - \lambda^{-}}\left[\lambda^{+} E_{\alpha,1}\left(\lambda^{-} t^{\alpha}\right) - \lambda^{-} E_{\alpha,1}\left(\lambda^{+} t^{\alpha}\right)\right] +$$

$$+ \frac{B}{\lambda^{+} - \lambda^{-}}\left[E_{\alpha,1}\left(\lambda^{+} t^{\alpha}\right) - E_{\alpha,1}\left(\lambda^{-} t^{\alpha}\right)\right] +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right) f(\tau)\, d\tau; \tag{0.5}$$

2) егер $b = a^2$ болса, онда

$$u(t) = A\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+} t^{\alpha}\right) + \left(B - \lambda^{+} A\right)\mathrm{E}^{1}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}, t^{\alpha}\right) +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E^{1}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^{+}, \left(t-\tau\right)^{\alpha}\right) f(\tau)\, d\tau \tag{0.6}$$

мұндағы $\lambda^{+} = -a + \sqrt{a^2 - b}$, $\lambda^{-} = -a - \sqrt{a^2 - b}$.

Бірінші тараудың екінші параграфында $\Omega = \{(x,t):\; 0 < x < 1,\; 0 < t < 1\}$ облысында берілген келесі түрдегі дифференциалдық теңдеуді қарастырамыз:

$$D_t^{2\alpha} u(x,t) + 2aD^{\alpha}u(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \tag{0.7}$$

Мұндағы $0 < \alpha \leq 1$, a – оң таңбалы сан.

(0.3) теңдеуінің регуляр шешімі деп келесі функцияны айтамыз:

$$u(x,t) \in C(\bar{\Omega}), \quad D_t^{\alpha} u(x,t) \in C(\bar{\Omega}), \quad D_t^{2\alpha} u, u_{xx} \in C(\Omega).$$

Енді бастапқы шарттармен

$$u(x,0) = \varphi(x), \;\; D_t^{\alpha} u(x,0) = \psi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \tag{0.8}$$

және шеттік шарттар берілген

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(0,t)=0 \\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(0,t)=0 \end{cases} \quad (0.9)$$

есепті қарастырайық. Мұндағы $a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k,\ k=0,1$-тұрақтылар.

Бұл параграфтың негізгі нәтижелері

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(0,t)=0 \\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(0,t)=0 \end{cases}$$

шеттік шарттардың Дирихле, периодты және Нейман шарттарына сәйкес келеді.

Мысал үшін дирихле шартына сәйкес жағдайда төмендегідей теорема орынды.

1-теорема. $0<\alpha\le 1,\ a>0$ болсын және $\varphi(x),\ \psi(x)$ функциялары төменде көрсетілген шарттарды қанағаттандырады:

1) $\varphi(x)\in C^2[0,1],\quad \varphi(0)=\varphi(1)=0,\quad \varphi''(0)=\varphi''(1)=0;$

2) $\psi(x)\in C^1[0,1],\ \ \psi(0)=\psi(1)=0;$

3) $\varphi'''(x)$ және $\psi''(x)$ функциялары $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз болады.

Олай болса D есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде болады:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot u_{k,1}(t)\cdot\sin k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\cdot u_{k,2}(t)\cdot\sin k\pi x, \quad (0.10)$$

мұндағы

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin k\pi x dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin k\pi x dx,$$

$$u_{k,1}(t)=\begin{cases} \dfrac{1}{\lambda_k^+-\lambda_k^-}\left[\lambda_k^+\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^-t^\alpha)-\lambda_k^-\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+t^\alpha)\right],\ \lambda_k^+\ne\lambda_k^- \\ \mathrm{E}_{\alpha,1}(-at^\alpha)+a\mathrm{E}_{\alpha,1}^1(-at^\alpha),\ \lambda_k^+=\lambda_k^-=-a \end{cases} \quad (0.11)$$

$$u_{k,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_k^+-\lambda_k^-}\left[E_{\alpha,1}(\lambda_k^+t^\alpha)-E_{\alpha,1}(\lambda_k^-t^\alpha)\right],\ \lambda_k^+\neq\lambda_k^-\\ E_{\alpha,1}^1(-at^\alpha),\ \lambda_k^+=\lambda_k^-=-a\end{cases}. \qquad (0.12)$$

Екінші тараудың 1-ші параграфында екінші ретті эллипстік теңдеулер үшін Штурм-Лиувилл есебінің меншікті мәндері және меншікті функциялары туралы мәліметтер келтірілген.

Осы тараудың 2-ші параграфында $\Omega=\{(x,t):\ 0\le x<1,\ 0<t<T\}$ облысында берілген

$$D_t^{2\alpha}u(x,t)+2aD_t^\alpha u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u+f(x,t) \qquad (0.13)$$

$$\begin{cases}b_1u_x(0,t)+a_1u(0,t)=h_1(t),\ 0\le t\le T,\\ b_2u_x(1,t)+a_2u(1,t)=h_2(t),\ 0\le t\le T,\end{cases} \qquad (0.14)$$

$$u(x,0)=g_0(x),\ D_t^\alpha u(x,0)=g_1(x),\ \ 0\le x\le 1 \qquad (0.15)$$

есеп қарастырылады. Мұнда $p(x)$, $r(x)$ функциялары $[0,1]$ аралығында оң анықталған, $q(x)\ge 0,\ f(x,t),\ h_1(t),\ h_2(t)$ және $g_0(x), g_1(x)$- жеткілікті тегіс функциялар.

(0.13)-(0.15) есебінің шешімі деп t айнымалы бойынша $L_1(0,T)=\left\{f:\|f\|=\int_0^T|f(t)|dt<\infty\right\}$ класқа тиісті болған функцияға айтамыз.

Бұл есеп үшін төмендегі нәтиже орынды.

2-теорема. (0.13)-(0.15) есебінің $L(0,T)$ класына тиісті шешімі бар, жалғыз және ол

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)+\upsilon(x,t)$$

формуламен анықталады.

Бұл жерде

$$a_k(t)=\frac{\lambda^+E_{\alpha,1}(\lambda^-t^\alpha)-\lambda^-E_{\alpha,1}(\lambda^+t^\alpha)}{\lambda^+-\lambda^-}\tilde g_{0k}+\frac{E_{\alpha,1}(\lambda^+t^\alpha)-E_{\alpha,1}(\lambda^-t^\alpha)}{\lambda^+-\lambda^-}\tilde g_{1k},$$

$u_k(t)$ функциясы $u_k(t)=\int\limits_0^t \dfrac{\lambda^{+}\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_1(t-s)^{\alpha}\right)-\lambda_2\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_2(t-s)^{\alpha}\right)}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{f}_k(s)ds$ формуламен, $\upsilon(x,t)$ $\begin{cases} b_1U_x(0,t)+a_1U(0,t)=0, \\ b_2U_x(1,t)+a_2U(1,t)=0, \end{cases}$ формуламен анықталады, ал $\lambda^{+}=a+\sqrt{a^2-\lambda_k},\lambda^{-}=a-\sqrt{a^2-\lambda_k},\ \lambda_k, X_k(x)-$ Штурм-Лиувилл есебінің меншікті мәндері және меншікті функциялары.

2-ші тарудың 3-ші параграфында жалпы жағдайдағы келесі түрдегі есеп қарастырылады.

Айталық $\Omega=\{(x,t):\ \ 0<x<1,\ \ 0<t<T\}$ аймақта

$$D_t^{2\alpha}u(x,t)+2aD_t^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}(x,t)=0,\ \ (x,t)\in\Omega \tag{0.16}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ D^{\alpha}u(x,0)=\psi(x) \tag{0.17}$$

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u(1,t)+a_0u(1,t)+b_0u(0,t)=0 \\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(1,t)+d_0u(0,t)=0 \end{cases} \tag{0.18}$$

шарттарымен берілген есепті қарастырайық. Бұл жерде $a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k,\ k=0,1-$ тұрақтылар, $a>0$.

$D_t^2=D_t\cdot D_t=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ болғандықтан (0.16) теңдеу $\alpha=1$ мәнінде классикалық телеграф теңдеуді аламыз.

3-теорема. Егер (0.16)-(0.18) есептің (0.18) шеттік шарттары регуляр, бірақ әлсіз регуляр, яғни шеттік шарттардың коэффициенттері

$$\begin{aligned} &I.\quad a_1+b_1=0, c_0-d_0\neq 0 \\ &II.\quad a_1-b_1=0, c_0+d_0=0 \\ &III.\quad c_0-d_0=0, a_1+b_1\neq 0 \\ &IV.\quad c_0+d_0=0, a_1-b_1\neq 0 \end{aligned} \tag{0.19}$$

шарттардың біреуін қанағаттандыратын

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(1,t)=0 \\ c_0u_x(0,t)+d_0u_x(1,t)=0, \qquad |a_1|+|b_1|>0 \end{cases} \tag{0.20}$$

көріністе болса, онда (0.16)-(0.18) есептің $L_1(0,T)$ кеңістікке тиісті шешімі бар және жалғыз болады.

Бұл теорема төмендегі келтірілген леммаға сүйеніп дәлелденеді.

2-лемма. Егер (0.16)-(0.18) есепте шекаралық шарттар әлсіз регуляр болса, бұл есепті әрқашанда оған эквивалиент болған, екі күшті регулярлы шекаралық шартпен берілген есепке келтіруге болады.

1 БӨЛШЕК РЕТТІ ТЕЛЕГРАФ ТЕҢДЕУІ ҮШІН КЕЙБІР ШЕТТІК ЕСЕПТЕРДІҢ КЛАССИКАЛЫҚ ШЕШІМІ

1.1 Бөлшек ретті интеграл және туындының қарапайым қасиеттері.

Айталық, $a, b-$ нақты сандары берілген және болсын.

$[a,b]$ сегментінде анықталған $f(t)$ функциясының Риман-Лиувилл мағнасындағы $\alpha-$ ретті интегралы деп

$$J_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau, t > a \qquad (1.1.1)$$

формуламен анықталған өрнекке айтамыз .

Мұндағы $\Gamma(\alpha)$ саны $\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} z^{\alpha-1} e^{-x} dx$ Эйлер интегралымен анықталады.

Егер $a = 0$ болса, онда (1.1.1)-формуламен анықталған интегралды $J_0^{\alpha} = J$ түрінде белгілейміз. Біз кейінгі зерттеулерде $J_a^0 f(t) = f(t)$ деп есептейміз.

Егер $\alpha = n$ болса, онда гамма функцияның $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ түріндегі қасиетін ескере отырып, (1.1.1)-формуламен анықталған интегралды

$$J_a^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau$$

түрінде жазып алуға болады.

Енді α параметрінің мәндері $n-1 < \alpha \leq n, n = 1, 2, \ldots$ аралығында өзгергенде бөлшек ретті туынды ұғымын енгізейік.

$[a,b]$сегментінде анықталған $f(t)$ функциясының Риман-Лиувилл мағнасындағы $\alpha-$ ретті туындысы деп

$${}_{RL}D_a^{\alpha} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} J^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f(\tau) d\tau, t > a \qquad (1.1.2)$$

формуламен анықталған өрнекке айтамыз.

Егер $\alpha = n$ болса, онда $J_a^{n-n} f(t) = J_a^0 f(t) = f(t)$.

Олай болса,

$${}_{RL}D_a^n f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t), \qquad (1.1.3)$$

яғни параметрдің бүтін мәндерінде бөлшек ретті туынды кәдімгі туындымен бірдей болады.

$[a,b]$ сегментінде анықталған $f(t)$ функциясының Капуто мағнасындағы $\alpha-$ ретті туындысы деп

$$ {}_{C}D_a^{\alpha} f(t) = J^{n-\alpha} \frac{d^n}{dt^n} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{n-1-\alpha} f^{(n)}(\tau) d\tau, t > a \qquad (1.1.4) $$

формуламен анықталған өрнекке айтамыз.

Егер $\alpha = n$ болса, онда

$$ {}_{C}D_a^{n} f(t) = \frac{d^n}{dt^n} f(t) \qquad (1.1.5) $$

теңдік орынды болады.

Лемма 1.1.1. Егер $n-1 < \alpha \le n, n = 1, 2, ..., f(t) \in L_1[a,b]$ болса, онда $f(t)$ функцияның $\alpha-$ретті интегралы анықталған және $J_a^{\alpha} f(t) \in L_1[a,b]$ қатынас орынды.

Дәлелдеуі. Айталық, $f(t) \in L_1[a,b]$ болсын. Лемманы дәлелдеу үшін $\left\| J_a^{\alpha} f(t) \right\|_{L_1} \le C \Leftrightarrow J_a^{\alpha} f(t) \in L_1[a,b]$ болатынын көрсету жеткілікті. Мұндағы C-тұрақты. Анықтама бойынша

$$ \left\| J_a^{\alpha} f(t) \right\|_{L_1} = \int_a^b | J_a^{\alpha} f(t) | dt = \int_a^b \left| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \right| dt \le $$

$$ \le \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} | f(\tau) | d\tau dt = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b | f(\tau) | \int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt d\tau $$

Соңғы өрнектегі $\int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt$ ішкі интегралды зерттейік. Бұл интегралда айнымалды $t = \tau + (b-\tau)\xi$ түрінде ауыстырсақ, онда бұл интегралды есептеуге болады және нәтиже

$$ \int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt = (b-\tau)^{\alpha} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} d\xi = (b-\tau)^{\alpha} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(1)}{\Gamma(\alpha+1)}. $$

Олай болса,

$$ \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^b | f(\tau) | \int_\tau^b (t-\tau)^{\alpha-1} dt d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-\tau)^{\alpha} | f(\tau) | d\tau. $$

$[a,b]$ аралығында $(b-\tau)^{\alpha}$ үздіксіз және оң функция, сол себептен $\max_{[a,b]} (b-\tau)^{\alpha} = (b-a)^{\alpha} \equiv C.$

Сонда,

$$\left\| J_a^\alpha f(t) \right\|_{L_1} \le \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_a^b (b-\tau)^\alpha \, | f(\tau) | d\tau \le C \int_a^b (b-\tau)^\alpha \, | f(\tau) | d\tau = C \left\| f \right\|_{L_1}.$$

Лемма дәлелденді.

Лемма 1.1.2. Кез келген $\alpha, \beta > 0$ нақты сандары .үшін

$$J_a^\alpha \left[J_a^\beta [f] \right](t) = J_a^\beta \left[J_a^\alpha [f] \right](t) = J_a^{\alpha+\beta} [f](t)$$

теңдіктер орынды.

Дәлелдеуі. Лемманы дәлелдеу үшін

$$J_a^\alpha \left[J_a^\beta [f] \right](t) = J_a^{\alpha+\beta} [f](t)$$

теңдікті көрсету жеткілікті.

Бөлшек ретті интегралдың анықтамасы бойынша

$$J_a^\alpha \left[J_a^\beta [f] \right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} J_a^\beta [f](\tau) d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} \int_a^\tau (\tau-s)^{\beta-1} f(s) ds d\tau = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \int_a^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau ds.$$

Егер соңғы өрнектегі ішкі интералда $\tau = s + (t-s)\xi$ түрінде жаңа айнымалды енгізсек, онда

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau-s)^{\beta-1} d\tau = (t-s)^{\alpha+\beta-1} \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha-1} \xi^{\beta-1} d\xi = (t-s)^{\alpha+\beta-1} \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}.$$

Нәтижеде

$$J_a^\alpha \left[J_a^\beta [f] \right](t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds.$$

Анықтама бойынша

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha+\beta)} \int_a^t (t-s)^{\alpha+\beta-1} f(s) ds = J_a^{\alpha+\beta} [f](t).$$

Сонда, $J_a^\alpha \left[J_a^\beta [f] \right](t) = J_a^{\alpha+\beta} [f](t)$.

Осы жолмен $J_a^\beta \left[J_a^\alpha [f] \right](t) = J_a^{\beta+\alpha} [f](t)$ теңдіктіде дәлелдеуге болады.

Лемма дәлелденді.

Лемма 1.1.3. Кез-келген $f(t)\in L_1(0,l)$ функциясы үшін

$$_{RL}D^{\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)=f(t),\alpha>0 \tag{1.1.6}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Алдымен $\alpha=n$- бүтін болған жағдайды қарастырайық. Егер туынды және интеграл үшін

$$\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=f(t),$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left\{\int_0^t (t-\tau)f(\tau)d\tau\right\}=\frac{d}{dt}\left[(t-\tau)f(\tau)\Big|_{\tau=t}\right]+\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{d}{dt}(t-\tau)f(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\int_0^t f(\tau)d\tau,,$$

$$\frac{d^k}{dt^k}\left\{\frac{1}{\Gamma(k)}\int_0^t(t-\tau)^{k-1}f(\tau)d\tau\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\},k\geq 3$$

теңдікдердің орынды болатынын ескерсек, онда бүтін ретті туынды және интегралдың анықтамасы бойынша $(0,l)$ аралығында мына теңдікті жазуға болады:

$$_{RL}D^{n}\left[J^{n}[f]\right](t)=\frac{d^n}{dt^n}\left[J^{n}[f]\right](t)=\frac{d^n}{dt^n}\left\{\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t(t-\tau)^{n-1}f(\tau)d\tau\right\}=\frac{d}{dt}\left\{\int_0^t f(\tau)d\tau\right\}=f(t).$$

Егер де $n-1<\alpha<n$ болса, онда анықтама бойынша

$$_{RL}D^{\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)=\frac{d^n}{dt^n}J^{n-\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)$$

Бірақ, бөлшек ретті интегралдың группалық қасиеті бойынша

$$J^{n-\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)=J^{n}f(t)$$

теңдік орынды.

Олай болса, алынған теңдіктен

$$_{RL}D^{\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)=\frac{d^n}{dt^n}J^{n-\alpha}\left[J^{\alpha}[f]\right](t)=\frac{d^n}{dt^n}\left[J^{n}[f]\right](t)=f(t)$$

нәтижені аламыз.

Лемма дәлелденді.

Осы сияқты тұжырымды Капуто операторы үшін де дәлелдеуге болады.

Лемма 1.1.4. Кез-келген $f(t)\in C^n[0,l]$ функциясы үшін

$$J^{\alpha}\left[{}_{C}D^{\alpha}[f]\right](t)=f(t)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}f^{(k)}(0),\alpha>0 \tag{1.3}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$J^{\alpha}\left[{}_{C}D^{\alpha}[f]\right](t)=J^{n-\alpha}\left[{}_{C}D^{\alpha}[f]\right](t)=J^{\alpha}\left[J^{n-\alpha}[f^{(n)}]\right](t).$$

Бөлшек ретті интегралдың группалық қасиеті бойынша

$$J^{\alpha}\left[J^{n-\alpha}[f^{(n)}]\right](t)=J^{n}f^{(n)}(t)\,.$$

Ал соңғы интеграл үшін

$$J^{n}f^{(n)}(t)=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^t(t-\tau)^{n-1}f^{(n)}(\tau)d\tau=\frac{(t-\tau)^{n-1}}{\Gamma(n)}f^{(n-1)}(\tau)\Bigg|_{\tau=0}^{\tau=t}+\frac{n-1}{\Gamma(n)}\int_0^t(t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau=$$

$$=-\frac{t^{n-1}f^{(n-1)}(0)}{\Gamma(n)}+\frac{n-1}{\Gamma(n)}\int_0^t(t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau=-\frac{t^{n-1}f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}+\frac{1}{(n-2)!}\int_0^t(t-\tau)^{n-2}f^{(n-1)}(\tau)d\tau$$

теңдік орынды.

Осы түрлендіруді тағы да $n-1$ рет орындасақ, онда

$$J^{n}f^{(n)}(t)=-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(0)-\frac{t^{n-2}}{(n-2)!}f^{(n-2)}(0)-\ldots-\frac{t}{1!}f'(0)-f(0)+f(t).$$

Бұдан (1.3) теңдік келіп шығады.Лемма дәлелденді.

Лемма 1.1.5. Егер $n-1<\alpha<n$ және $f(t)$ функциясының $(0,l)$ аралығында $\alpha-$ретті туындысы бар болса, онда осы аралықта

$$J^{\alpha}\left[{}_{RL}D^{\alpha}[f]\right](t)=f(t)-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}J^{\alpha-k}f(t)\right\}_{t=0}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)} \tag{1.1.7}$$

теңдік орынды.

Дәлелдеуі. Анықтама бойынша

$$J^{\alpha}\left[{}_{RL}D^{\alpha}[f]\right](t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\cdot{}_{RL}D^{\alpha}[f](\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau.$$

Соңғы интегралды

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\frac{d^n}{d\tau^n}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau=\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha}\frac{d^n}{d\tau^n}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau\right\}$$

түрінде жазып алайықта, оны n рет бөліктеп интегралдайық.

Нәтижеде бұл интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n-1}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau-\sum_{k=1}^{n}\left\{\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}J^{n-\alpha}f(\tau)\right\}_{\tau=0}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma(1+\alpha-k)}$$

түрге келеді. Бұл өрнектің $f(t)$ функциясына қойылған шарттарда мәні бар.

Соңғы өрнектегі $\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n-1}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau$ интеграл

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha-n)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-n-1}J^{n-\alpha}f(\tau)d\tau=J^{\alpha-n}[J^{n-\alpha}f](t)=J^0 f(t)=f(t)$$

болатынын ескерсек, онда (1.1.7) теңдік келіп шығады. Лемма дәлелденді.

Бұл леммалардан мынандай нәтижелер келіп шығады.

Бұл теоремадан шығатын салдарлар.

Салдар 1.1.1. Егер $f'(t)\in L_1(0,l)$ болса, онда кез-келген $0<\alpha<1$ үшін ${}_{RL}D^{\alpha}f(t)$
туындысы бар, ол $L_1(0,l)$ класына тиісті және

$${}_{RL}D^{\alpha}f(x)=\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(0)+\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{-\alpha}f'(\tau)d\tau. \tag{1.1.8}$$

теңдік орынды болады.

Егер (1.1.8) теңдіктің оң жағындағы интеграл $f(t)$ функциясының Капуто мағнасындағы $\alpha-$ретті туындысы екендігін есекрсек, онда бұл теңдікті

$${}_{C}D^{\alpha}f(t)={}_{RL}D^{\alpha}f(t)-\frac{t^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}f(0) \tag{1.1.9}$$

түрінде жазуға да болады.

Олай болса, 3-леммадан Риман-Лиувилл және Капуто туындылары арасындағы қатынас туралы мынандай нәтиже келіп шығады.

Салдар 1.1.2. Егер $f^{(n)}(t)\in L_1(0,l)$ болса, онда кез-келген $n-1<\alpha<n, n=1,2,...$ үшін ${}_{C}D^{\alpha}f(t)$ туындысы бар және

$$ {}_{C}D^{\alpha}f\left(x\right)={}_{RL}D^{\alpha}f\left(x\right)-\sum_{k=1}^{n}\left\{J^{\alpha-k}f\left(t\right)\right\}_{t=0}\frac{t^{\alpha-k}}{\Gamma\left(1+\alpha-k\right)}. \tag{1.1.9} $$

теңдік орынды болады.

1.2 Бір өлшемді диференциалдық теңдеудің шешімі.

$0<\alpha\leq 1,\ \ a>0$ болсын. Келесі Коши есебін қарастырайық:

$$ D^{2\alpha}u(t)+2aD^{\alpha}u(t)+bu(t)=f(t) \tag{1.2.1} $$

$$ u(0)=A,\ \ D^{\alpha}u(0)=B \tag{1.2.2} $$

мұндағы $f(t)$ – берілген функция, $b,\ A,\ B$ – тұрақтылар.

$E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ – Миттаг-Леффлер түріндегі функция болсын, онда

$$ E^{1}_{\alpha,\beta}(\lambda,z)=\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}\frac{kz^{k}}{\Gamma(\alpha k+\beta)},\ \ \alpha,\beta>0. $$

Келесі тұжырым орынды болады.

Лемма 1.2.1. Кез-келген $f(t)\in C\left[0,T\right]$ функциясы үшін (1.2.1)-(1.2.2) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде болады:

1) егер $b\neq a^{2}$ болса, онда

$$ u(t)=\frac{A}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\left[\lambda^{+}E_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)-\lambda^{-}E_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)\right]+ $$

$$ +\ \frac{B}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\left[E_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)-\ E_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)\right]\ + $$

$$ +\ \int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)f(\tau)\ d\tau; \tag{1.2.3} $$

2) егер $b=a^{2}$ болса, онда

$$ u(t)=A\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)+\left(B-\lambda^{+}A\right)\mathrm{E}^{1}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+},t^{\alpha}\right)+ $$

$$ +\ \int_{0}^{t}(t-\tau)^{\alpha-1}E^{1}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^{+},\left(t-\tau\right)^{\alpha}\right)f(\tau)\,d\tau \tag{1.2.4} $$

мұндағы $\lambda^{+} = -a + \sqrt{a^2 - b}$, $\lambda^{-} = -a - \sqrt{a^2 - b}$.
Дәлелдеу. Егер $g(t) \in C\left[0,1\right]$ болса, онда Коши есебінің

$$\begin{cases} D^{\alpha} y(t) + \mu y(t) = g(t) \\ \\ y(0) = \alpha \end{cases}$$

шешімі болатындығы белгілі және ол жалғыз болып, келесі түрде болады:

$$y(t) = \alpha \mathrm{E}_{\alpha,1}(\mu t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\mu (t-\tau)^{\alpha}) g(\tau) d\tau.$$

$D^{\alpha}\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = \lambda \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})$ болғандықтан келесі теңдік орынды болады:

$$D^{2\alpha}\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + 2a\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + b\mathrm{E}_{\alpha,t}(\lambda t^{\alpha}) = (\lambda^2 + 2a\lambda + b)\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}).$$

Осылайша, егер $D(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b$ характеристикалық полиномдың түбірлері λ^{+}, λ^{-} болса, онда $\lambda^{+} \neq \lambda^{-}$ жағдайда (1.2.2), (1.2.3) есебі

$$\begin{cases} \left(D^{\alpha} - \lambda^{+}\right) u(t) = \vartheta(t),\ u(0) = A, \\ \left(D^{\alpha} - \lambda^{-}\right) \vartheta(t) = f(t),\ \vartheta(0) = B - \lambda^{+} A. \end{cases}$$

жүйесіне эквивалиент болады.

Екінші есептің шешімі келесі түрде болады:

$$\vartheta(t) = (B - \lambda^{+} A)\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^{-} t^{\alpha}) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda^{-}(t-\tau)^{\alpha}) f(\tau) d\tau.$$

$\vartheta(t)$ функциясын бірінші есепке койып,

$$u(t) = A\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^{+} t^{\alpha}) + \left(B - \lambda^{+} A\right) \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^{+}(t-\tau)^{\alpha}\right) \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^{-} t^{\alpha}) d\tau +$$

$$+ \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^{+}(t-\tau)^{\alpha}\right) \int_0^{\tau} (\tau - s)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^{-}(\tau - s)^{\alpha}\right) f(s) ds d\tau$$

теңдікті аламыз.

Төмендегі интегралдарды есептейміз:

$$\mathrm{I}_1=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda^+(t-\tau)^\alpha)\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda^-\tau^\alpha)d\tau,$$

$$\mathrm{I}_2=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda^+(t-\tau)^\alpha)\int_0^\tau(\tau-s)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}(\lambda^-(\tau-s)^\alpha).$$

$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)$ функциясының түрінен пайдаланып, келесі теңдікті аламыз:

$$\mathrm{I}_1=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^+)^\kappa\frac{(t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\right)\left(\int_{m=0}^{\infty}(\lambda^-)^m\frac{\tau^{2m}}{\Gamma(\alpha m+\alpha}\right)d\tau=$$

$$=\int_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda^+)}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}\int_0^t(t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1}\tau^{\alpha m}d\tau=\int_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{+^k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}$$

$$\times\int_0^1(1-\xi)^{\alpha k+\alpha-1}\xi^{\alpha m}d\xi t^{\alpha(k+m)+\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{+^k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\int_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha)\Gamma(\alpha m+1)}{\Gamma(\alpha(k+m)+\alpha+1)}t^{\alpha(k+m)+\alpha}=$$

$$=\int_{k=0}^{\infty}\lambda^{+^k}\int_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha(k+m)+\alpha+1)}t^{\alpha(k+m)+a}=(k+m=n)$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=k}^{\infty}\lambda^{+^k}(\lambda^-)^{n-k}\frac{t^{\alpha n+\alpha}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1)}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^-)^n\frac{t^{\alpha n+\alpha}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1)}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)^k=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^-)^n\frac{t^{\alpha n+\alpha}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1)}\cdot\frac{1-\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)^{n+1}}{1-\frac{\lambda^+}{\lambda^-}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(\lambda^-)^{n+1}-(\lambda^+)^{n+1}\right]}{\lambda^--\lambda^+}\frac{t^{\alpha n+\alpha}}{\Gamma(\alpha n+\alpha+1)}=(n+1=k)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\left(\lambda^-\right)^k-\left(\lambda^+\right)^k}{\lambda^--\lambda^+}\cdot\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=\frac{1}{\lambda^--\lambda^+}\left[\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^-)^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}-\right.$$

$$\left.-\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda^+)^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}\right]=\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\left[\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^+)\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}-(\lambda^+)^0-\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda^-)^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}+(\lambda^-)^0\right]=$$

$$=\frac{1}{\lambda^+-\lambda^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+t^\alpha)-\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^-t^\alpha)\right].$$

Осылайша ,

$$\mathrm{I}_1=\frac{\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+t^\alpha)-\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^-t^\alpha)}{\lambda^+-\lambda^-}$$

болады.

I_2 интегралының реттерінің орнын ауыстырып,

$$\mathrm{I}_2=\int_0^t f(s)\mathrm{I}(t,s)ds,$$

теңдікті аламыз. Мұндағы

$$\mathrm{I}(t,s)=\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}(\tau-s)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+(t-\tau)^{\alpha}\right)\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^-(\tau-s)\right)d\tau.$$

$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z)$ функциясының мәнін койып, интегралды есептейміз:

$$\mathrm{I}(t,s)=\int_s^t\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{+^k}\frac{(t-\tau)^{\alpha k+\alpha+1}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}(\lambda^-)^m\frac{(\tau-s)^{\alpha m+\alpha-1}}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}\right)d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{+^k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}\int_s^t(t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1}(\tau-s)^{\alpha m+\alpha-1}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^{+^k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(\lambda^-)^m}{\Gamma(\alpha m+\alpha)}\int_0^1(1-\xi)^{\alpha k+\alpha-1}\xi^{\alpha m+\alpha-1}d\xi\cdot(t-s)^{\alpha(k+m)+2\alpha-1}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\lambda^{+^k}(\lambda^-)^m\frac{(t-s)^{\alpha(k+m)+2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha(m+k)+2\alpha)}=(k+m=n)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{+^k}\sum_{n=m}^{\infty}(\lambda^-)^{n-k}\frac{(t-s)^{\alpha n+2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n+2\alpha)}=\begin{bmatrix}0\le k\le\infty\\ m\le n\le\infty\end{bmatrix}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^-)^n\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)^k\frac{(t-s)^{\alpha n+2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n+2\alpha)}=\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda^-)^n\frac{(t-s)^{\alpha n+2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n+2\alpha)}\frac{1-\left(\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)^{n-1}}{1-\dfrac{\lambda^+}{\lambda^-}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left[(\lambda)^{n+1}-\lambda^{+^{n+1}}\right]}{\lambda^--\lambda^+}\frac{(t-s)^{\alpha n+2\alpha-1}}{\Gamma(\alpha n+2\alpha)}=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\lambda^+-\lambda^-}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lambda^{+^{n+1}}-(\lambda^-)^{n-1}\right)\frac{(t-s)^{\alpha n+\alpha}}{\Gamma(\alpha n+2\alpha)}\right]=$$

$$=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\lambda^+-\lambda^-}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\left(\lambda^{+^k}-(\lambda^-)^k\right)\frac{(t-s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right]=\frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\lambda^+-\lambda^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+(t-s)^{\alpha}\right)-\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^-(t-s)^{\alpha}\right)\right],$$

және соңғы теңдікті аламыз.

Осылайша, I_2 интегралын табамыз:

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^t \left(t-s\right)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+(t-s)^\alpha\right) - \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^-(t-s)^\alpha\right)}{\lambda^+ - \lambda^-} f(s)ds.$$

Сонымен, егер $\lambda^+ \neq \lambda^-$ болса, онда (1.1.1)-(1.1.2) есебінің шешімі

$$u(t) = \mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right) + \frac{(\mathrm{B} - \lambda^+ \mathrm{A})}{\lambda^+ - \lambda^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+ t^\alpha) - \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^- t^\alpha)\right] +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+(t-s)^\alpha\right) - \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^-(t-s)^\alpha\right)}{\lambda^+ - \lambda^-} f(s)ds.$$

түрінде болады.

Түрлендіру жасап,

$$u(t) = \frac{\mathrm{A}}{\lambda^+ - \lambda^-}\left[\lambda^+ \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^- t^\alpha\right) - \lambda^- \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right)\right] +$$

$$+ \quad \frac{B}{\lambda^+ - \lambda^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right) - \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^- t^\alpha\right)\right] +$$

$$+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \frac{\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+(t-s)^\alpha\right) - \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^-(t-s)^\alpha\right)}{\lambda^+ - \lambda^-} f(s)ds$$

теңдігін аламыз.

2) $\lambda^+ \neq \lambda^-$ болсын. Бұл жағдайда (1.2.1) теңдеуі келесі теңдеуге пара-пар болады:

$$\left(D^\alpha - \lambda^+\right)u(t) = f(t).$$

[7] жұмыста соңғы теңдеудің жалпы шешімі келесі түрде болатындығы көрсетілген:

$$u(t) = C_1 \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right) + C_1 \mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(\lambda^+, t^\alpha\right) + f_1(t),$$

мұндағы

$$f_1(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}^1_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+, (t-\tau)^\alpha\right) f(\tau)d\tau.$$

Функцияның мәнін (1.2.1),(1.2.2) есебінің шартына қойып, келесі теңдікті аламыз:

$$u(0) = C_1 \mathrm{E}_{\alpha,1}(0) + C_1 \mathrm{E}^1_{\alpha,1}(0) + f_1(0) = \mathrm{A}.$$

$\mathrm{E}_{\alpha,1}(0) = 1,\ \mathrm{E}^1_{\alpha,1}(0) = 0,\ f_1(0) = 0$ болғандықтан, $C_1 = A$ теңдігі орынды.

Сонымен $\mathrm{E}^1_{\alpha,1}(\lambda, t^\alpha)$ функциясы төмендегі шартты қанағаттандырады

$$D^\alpha \mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(\lambda, t^\alpha\right) - \lambda \mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(\lambda, t^\alpha\right) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha),$$

яғни $D^\alpha \mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(\lambda, t^\alpha\right) = \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda t^\alpha\right) + \lambda \mathrm{E}^1_{\alpha,1}(\lambda, t^\alpha).$

Онда $D^\alpha \mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(\lambda, t^\alpha\right)\Big|_{t=0} = 1$ болады.

Сонымен,

$$D^\alpha f_1(t) - \lambda f_1(t) = f_0(t) \equiv \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda\left(t-\tau\right)^\alpha\right) f(\tau)\, d\tau$$

екені айқын.

Осыған байланысты $D^\alpha f_1(t)\big|_{t=0} = f_0(0) + \lambda f_1(0) = 0$ болады.

Онда

$$D^\alpha u(t)\big|_{t=0} = \mathrm{A}\lambda^+ + C_2 = B.$$

Мұндағы $C_2 = B - A\lambda^+$.

Бұл жағдайда (1.2.1), (1.2.2) есебінің шешімі келесі түрде болады:

$$u(t) = AE_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right) + \left(B - \lambda^+ \mathrm{A}\right) E^1_{\alpha,1}\left(\lambda^+, t^\alpha\right) + \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}^1_{\alpha,\alpha}\left(\lambda^+, (t-\tau)^\alpha\right) f(\tau)\, d\tau.$$

Лемма дәлелденді.

1.3 Жалпыланған телеграф теңдеуі үшін негізгі есептердің классикалық шешімдері.

Айталық $\Omega = \{(x,t):\ 0 < x < 1,\ 0 < t < 1\}.$ болсын. Осы облыста берілген келесі түрдегі дифференциалдық теңдеуді қарастырайық:

$$D_t^{2\alpha} u(x,t) + 2aD^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \qquad (1.3.1)$$

Мұндағы $0 < \alpha \le 1$, $a -$ оң таңбалы сан.

(1.3.1) теңдеуінің регуляр шешімі деп келесі функцияны айтамыз:

$$u(x,t)\in C(\bar{\Omega}),\quad D_t^{\alpha}u(x,t)\in C(\bar{\Omega}),\quad D_t^{2\alpha}u,u_{xx}\in C(\Omega).$$

Енді бастапқы шарттармен

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ D_t^{\alpha}u(x,0)=\psi(x),\ \ 0\le x\le 1, \tag{1.3.2}$$

және шеттік шарттар берілген

$$\begin{cases} a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(0,t)=0 \\ c_1u_x(0,t)+d_1u_x(1,t)+c_0u(0,t)+d_0u(0,t)=0 \end{cases} \tag{1.3.3}$$

есепті қарастырайық. Мұндағы $a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k,\ k=0,1$-тұрақтылар.

(1.3.1)-(1.3.4) есебіне Фурье әдісін қолданып, дифференциалдық түрде берілген L операторы үшін келесі спектральдық есепке :

$$L(y)=-y''(x)+\lambda y(x)=0,\ \ 0\le x\le 1 \tag{1.3.4}$$

және шеттік шарттармен берілген

$$\begin{cases} a_1y'(0)+b_1y'(1)+a_0y(0)+b_0y(1)=0 \\ c_1y'(0)+d_1y'(1)+c_0y(0)+d_0y(1)=0 \end{cases} \tag{1.3.5}$$

есепті аламыз.

Келесі есептерді қарастырайық.

D Есебі. (1.3.2) бастапқы шарттарымен

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0,\ \ 0\le t\le 1. \tag{1.3.6}$$

және (1.3.6) шеттік шарттарын қанағаттандыратын (1.3.1) теңдеуінің ругуляр шешімін табу.

P Есебі. (1.3.2) бастапқы шарттарымен

$$u(0,t)=u(1,t),\quad u_x(0,t)=u_x(1,t),\quad 0\le t\le 1. \tag{1.3.7}$$

және (1.3.7) шеттік шарттарын қанағаттандыратын (1.3.1) теңдеуінің ругуляр шешімін табу.

R Есебі. (1.3.2) бастапқы шарттарымен

$$\begin{cases} a_0 u(0,t) + a_1 u_x(0,t) = 0, \ \ 0 \le t \le 1 \\ b_0 u(1,t) + b_1 u_x(1,t) = 0, \ \ 0 \le t \le 1 \end{cases} \quad (1.3.8)$$

және (1.3.8) шеттік шарттарын қанағаттандыратын (1.3.1) теңдеуінің ругуляр шешімін табу.

Бірөлшемді бөлшек ретті дифференциалдық теңдеудің шешімі

$0 < \alpha \le 1$ болсын. Келесі Коши есебін қарастырайық

$$D^{2\alpha} u(t) + 2a D^{\alpha} u(t) + bu(t) = 0 \quad (1.3.9)$$

$$u(0) = A, \ \ D^{\alpha} u(0) = B \quad (1.3.10)$$

мұндағы a, b, A, B - берілген нақты сандар.

$\mathrm{E}_{\alpha,\beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$ – Миттаг-Леффлер функциясы болсын, $\alpha, \beta > 0$.

Келесі тұжырым орынды болады.

Лемма 1.3.1. (1.3.9) теңдеуінің жалпы шешімі келесі түрде болады.

1)егер $b \ne a^2$, онда

$$u(t) = c_1 \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^{+} t^{\alpha}) + c_2 \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^{-} t^{\alpha}), \quad (1..3.11)$$

2) егер $b = a^2$, онда

$$u(t) = c_1 \mathrm{E}_{\alpha,1}(-a t^{\alpha}) + c_2 \mathrm{E}^{1}_{\alpha,1}(-a t^{\alpha}) \quad (1.3.12)$$

мұндағы c_1, c_2 – кез-келген тұрақтылар,

$$\lambda^{+} = -a + \sqrt{a^2 - b}, \ \ \lambda^{-} = -a - \sqrt{a^2 - b},$$

$$\mathrm{E}^{1}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} k \frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k + 1)}.$$

Дәлелдеуі. [7] көрсетілген $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})$ функциясы үшін келесі теңдік орынды екендігі белгілі:

$$D^{\alpha} \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = \lambda \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}).$$

Онда

$$D^{2\alpha} \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + 2a D^{\alpha} \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) + b \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = \mathrm{P}_2(\lambda) \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})$$

мұндағы $\mathrm{P}_2(\lambda) = \lambda^2 + 2a\lambda + b.$

$\mathrm{P}_2(\lambda)$ полиномының түбірлері келесі түрде болады:

$$\lambda^+ = -a + \sqrt{a^2 - b}, \;\; \lambda^- = -a - \sqrt{a^2 - b}.$$

Егер $b = a^2$ болса, онда $\lambda^+ \neq \lambda^-$ және $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+ t^\alpha)$, $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^- t^\alpha)$ функциялары (1.3.9) теңдеуінің сызықтық тәуелсіз шешімдері болып табылады.

Осыған сәйкес (1.3.9) теңдеуінің жалпы шешімі (1.3.11) түрінде борлады.

Егер $b = a^2$болса , онда $\lambda^+ = \lambda^- = -a.$(1.3.9) теңдеуінің бір шешімі $\mathrm{E}(-at^\alpha)$ түрде болады.

[41] жұмыста $\mathrm{E}^1_{\alpha,1}(\lambda t^\alpha)$ функциясының

$$\left(D^\alpha - \lambda\right)^2 y(t) = 0$$

теңдеуін қанағаттандыруы көрсетілген,яғни

$$\left(D^\alpha + a\right)\left(D^\alpha + a\right)\mathrm{E}^1_{\alpha,1}(-at^\alpha) = 0.$$

Онда $b = a^2.$ болған жағдайда (1.3.9) теңдеуінің шешімі $\mathrm{E}^1_{\alpha,1}(-at^\alpha)$ болып табылады.

$\mathrm{E}_{\alpha,1}(-at^\alpha)$ және $\mathrm{E}^1_{\alpha,1}(-at^\alpha)$ функцияларының сызықты тәуелсіз екендігін көрсетуге болады. Осыған сәйкес, жалпы шешім (1.3.12) түрінде болады.. Лемма дәлелденді.

Лемма 1.3.2. (1.3.9),(1.3.10) есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде болады:

1) егер $b \neq a^2$ болса, онда

$$u(t) = \frac{\mathrm{A}}{\lambda^+ - \lambda^-}\left[\lambda^+ \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^- t^\alpha\right) - \lambda^- \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right)\right] + \frac{\mathrm{B}}{\lambda^+ - \lambda^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^+ t^\alpha\right) - \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^- t^\alpha\right)\right] \qquad (1.3.13)$$

2) егер $b = a^2$ болса, онда

$$u(t) = \mathrm{A}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(-at^\alpha\right) + \left(\mathrm{B} + a\mathrm{A}\right)\mathrm{E}^1_{\alpha,1}\left(-at^\alpha\right). \qquad (1.3.14)$$

D есебінің зерттеуі.

$$\lambda_k^+ = -a + \sqrt{a^2 - (k\pi)^2}, \;\; \lambda_k^- = -a - \sqrt{a^2 - (k\pi)^2}$$

белгілейік. D есебіне байланысты негізгі тұжырым келесі болып табылады.

Теорема 1.3.1. $0<\alpha\le 1,\ a>0$ болсын және $\varphi(x),\ \psi(x)$ функциялары төменде көрсетілген шарттарды қанағаттандырады:

1) $\varphi(x)\in C^2[0,1],\ \ \varphi(0)=\varphi(1)=0,\ \ \varphi''(0)=\varphi''(1)=0;$

2) $\psi(x)\in C^1[0,1],\ \ \psi(0)=\psi(1)=0;$

3) $\varphi'''(x)$ және $\psi''(x)$ функциялары $[0,1]$ кесіндісінде үзіліссіз болады.

Олай болса D есебінің шешімі бар, жалғыз және келесі түрде болады:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot u_{k,1}(t)\cdot\sin k\pi x+\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\cdot u_{k,2}(t)\cdot\sin k\pi x, \tag{1.3.15}$$

мұндағы

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin k\pi x dx,\quad \psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin k\pi x dx,$$

$$u_{k,1}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_k^+-\lambda_k^-}\left[\lambda_k^+\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^-t^\alpha)-\lambda_k^-\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+t^\alpha)\right],\ \lambda_k^+\ne\lambda_k^-\\[2ex] \mathrm{E}_{\alpha,1}(-at^\alpha)+a\mathrm{E}_{\alpha,1}^1(-at^\alpha),\ \lambda_k^+=\lambda_k^-=-a\end{cases} \tag{1.3.16}$$

$$u_{k,2}(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{\lambda_k^+-\lambda_k^-}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+t^\alpha)-\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^-t^\alpha)\right],\ \lambda_k^+\ne\lambda_k^-\\[2ex] \mathrm{E}_{\alpha,1}^1(-at^\alpha),\ \lambda_k^+=\lambda_k^-=-a\end{cases}.$$

D есебінің шешу ушүн Фурье әдісін қолданып,

$$\begin{cases}y''(x)+\lambda y(x)=0,\quad 0<x<1\\[2ex] y(0)=y(1)=0\end{cases}$$

спектралдық есепті аламыз.

Бұл есептің меншікті мәндері $\lambda_k=(k\pi)^2,\ \ k=1,2,...$болады, ал оларға сәйкес меншікті функциялары $y_k(x)=\sqrt{2}\sin kx$ болады. $y_k(x)$ жүйесі $L_2(0,1)$. кеңістігінде ортонормалданған базис құрайды. Осыған байланысты D есебінің кез-келген регуляр шешімі барлық $t\in(0,1)$ үшін келесі түрде болады:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)y_k(x). \tag{1.3.17}$$

$\varphi(x)$ және $\psi(x)$ функцияларын $y_k(x)$ жүйесі бойынша Фурье қатарына жіктейміз:

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k y_k(x), \tag{1.3.18}$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k y_k(x), \tag{1.3.19}$$

мұндағы $\varphi_k = (\varphi, y_k),\ \psi_k = (\psi, y_k),\ k = 1, 2, \dots$.

[51] жұмысында көрсетілген әдістді қолданып,

$$u_k(t) = 2\int_0^1 u(x,t)\sin k\pi x dx, \quad k = 1, 2, \dots \tag{1.3.20}$$

функциялары қарастырылды.

(1.3.20) функциясына $D^{2\alpha} + 2aD^{\alpha}$ операторын қолданып, және (1.3.1) теңдеуін есепке алып , келесі теңдікті аламыз:

$$D^{2\alpha}u_k(t) + 2au_k(t) = 2\int_0^1 \left[D^{2\alpha}u(x,t) + 2au(x,t) \right] \sin k\pi x dx = -2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin k\pi x dx.$$

Соңғы алынған интегралды бөліктеп интегралдау арқылы және (1.3.2) бастапқы шарттарда ескере отырып, $u_k(t)$ белгісіз функциялары үшін келесі есепті аламыз:

$$\begin{cases} D^{2\alpha}u_k(t) + 2aD^{\alpha}u_k(t) + (k\pi)^2 u_k(t) = 0 \\ u_k(0) = \varphi_k,\ D^{\alpha}u_k(0) = \psi_k,\ k = 1, 2, \dots \end{cases} \tag{1.3.21}$$

1.3.2-Лемманың тұжырымдамасы бойынша,(1.3.21) есебінің шешімі бар, жалғыз және λ_k^+, λ_k^- параметрлерінің мәніне байланысты (1.3.13) немесе (1.3.14) түрінде болады. Біздің жағдайда $u_k(t)$ келесі түрде болады:

$$u_k(t) = \varphi_k u_{k,1}(t) + \psi_k u_{k,2}(t), \tag{1.3.22}$$

мұндағы $u_{k,i}(t),\ i = 1, 2$ (1.3.10) және (1.3.11) теңдіктерінен анықталады.

Болжам бойынша $a > 0$. Онда $\lambda_k^+ = \lambda_k^-$ теңдігі тек $a^2 = (k\pi)^2$ болған жағдайда мүмкін, яғни $k = \frac{a}{\pi} \in N$. Демек, егер a π санына еселі болмаса, онда біз ыңғайлы болуы үшін барлық уақытта $\lambda_k^+ \neq \lambda_k^-$ орынды деп аламыз.

$\mathrm{E}_{\alpha,1}(z)$ функциясы үшін $|z| \to \infty$ және $\arg(z) = \pi$ болғанда төменде көрсетілген асимптотикалық бағалау орынды. [7]

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(z) = \frac{c}{1+|z|} \tag{1.3.23}$$

Біздің жағдайда кейбір k_0 нөмерінен бастап $k \geq k_0$ үшін $(k\pi)^2 > a^2$ теңсіздігі орынды. Онда $\arg(\lambda_k^+ t^\alpha) = \arg(\lambda_k^- t^\alpha) = \pi$ және (1.3.13) бағалауынан келесі теңдікті

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+ t^\alpha) = \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^- t^\alpha) = O\left(\frac{1}{1+kt^\alpha}\right), \quad k \to \infty.$$

аламыз.

Осыдан келіп $k \to \infty$ ұмтылғанда асимптотикалық бағалау шығады

$$\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+ t^\alpha) - \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^- t^\alpha) = O(1),$$

$$\frac{\lambda_k^+ \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^- t^\alpha) - \lambda_k^- \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda_k^+ t^\alpha)}{\lambda_k^+ - \lambda_k^-} = O(1).$$

Осыған байланысты (1.3.22) сонымен қатар (1.3.18),(1.3.19) теңдіктерінен

$$|u_k(t)| \leq C\left(|\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right) \tag{1.3.24}$$

(1.3.24) аламыз.

$\varphi(x)$ және $\psi(x)$-ке байланысты теорама шартының орындалуы барысында осы функциялардың Фурье коэффициенттері ба,аланады:

$$|\varphi_k| \leq \frac{c}{k^3}, \quad |\psi_k| \leq \frac{c}{k^2}.$$

Онда

$$|u(x,t)| = c\sum_{k=1}^{\infty}\left[|\varphi_k| + \frac{|\psi_k|}{k}\right] \leq c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3} < \infty$$

яғни $u(x,t) \in C(\overline{\Omega})$.

Осы сияқты, $D^{\alpha}u(x,t)$ функциясы үшін

$$\left|D^{\alpha}u(x,t)\right| \le c\sum_{k=1}^{\infty} k\left[\left|\varphi_k\right| + \frac{\left|\psi_k\right|}{k}\right] \le c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty,$$

аламыз, яғни $D^{\alpha}u(x,t) \in C(\bar{\Omega})$.

Сонымен, $\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})$ функциясы үшін келесі теңдікті аламыз

$$\lambda\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha}) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{t^{\alpha k+\alpha}}{\Gamma(\alpha k+1)}\cdot\frac{1}{t^{\alpha}} = \frac{1}{t^{\alpha}}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k+1}\frac{t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha k+1)} = \frac{1}{t^{\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}t^{k}\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1)}.$$

Онда

$$\left|\lambda^2\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})\right| \le \frac{c\cdot\lambda}{t^{\alpha}}\left|\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda t^{\alpha})\right|.$$

Демек, барлық $t \ge t_0 > 0$ үшін

$$\left|D^{2\alpha}u(x,t)\right| \le c\sum_{k=1}^{\infty}(k\pi)\left|\varphi_k\right|\left|u_{k,1}(t)\right| + c\sum_{k=1}^{\infty}(k\pi)\left|\psi_k\right|\left|u_{k,2}(t)\right| \le c\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty,$$

яғни $D^{2\alpha}u(x,t) \in C(\Omega)$.

Осы сияқты $u_{xx}(x,t) \in C(\Omega)$ үшін де дәлелденеді.

Теорема дәлелденді.

Р есебіне зерттеу.

(1.3.7) есебіне сәйкес келетін спектралдық есеп

$$-y''(x) = \lambda y(x), \qquad 0 < x < 1$$

$$y(0) = y(1),\, y'(0) = y'(1)$$

түрінде болады.

Бұл есептің меншікті мәндері $\lambda_k = (2k\pi)^2, k = 0,1,...,$ ал меншікті функциялары

$$y_0(x) = 1,\;\; y_{k_1}(x) = \sqrt{2}\cos(2k\pi x),\;\; y_{k_2}(x) = \sqrt{2}\sin(2k\pi x),\;\; k = 1,2,...$$

көріністегі функциялар болады.

$\left\{y_0, y_{k_1}(x), y_{k_2}(x)\right\}$ жүйе $L_2(0,1)$ кеңістігінің ортонормал базисін құрайды. Олай болса, Р есебінің кез-келген шешімін және $\varphi(x), \psi(x)$ функцияларын

$$u(x,t) = u_0(t) + \sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{k_1}(t)y_{k_1}(x) + u_{k_2}(t)y_{k_2}(x)\right],$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{k_1}y_{k_1}(x) + \varphi_{k_2}y_{k_2}(x)\right],$$

$$\psi(x) = \psi_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left[\psi_{k_1}y_{k_1}(x) + \psi_{k_2}y_{k_2}(x)\right],$$

қатарларға жіктеледі.

Д есебін шешу үшін кезінде қолданылған әдістен пайдаланып мынандай теореманы дәлелдеуге болады.

Теорема 1.3.2 . Айталық $0 < \alpha \le 1,\ a > 0$ және $\varphi(x),\ \ \psi(x)$ функциялары

1) $\varphi(x) \in C^2[0,1], \varphi(0) = \varphi(1), \varphi'(0) = \varphi'(1), \varphi''(0) = \varphi''(1);$

2) $\psi(x) \in C^2[0,1], \psi(0) = \psi(1), \psi'(0) = \psi'(1);$

3) $\varphi'''(x),\ \psi''(x)$ функциялары $[0,1]$ аралығында бөлікті үздіксіз шарттарын қанағаттандырсын. Онда Р есебінің шешімі бар және жалғыз болады.

R есебін зерттеу кезінде сәйкес спектралдық есеп

$$-y''(x) = \lambda y(x),\quad 0 < x < 1 \tag{1.3.25}$$

$$\begin{cases} a_0 y(0) + a_1 y'(0) = 0, \\ b_0 y(1) + b_1 y'(1) = 0 \end{cases} \tag{1.3.26}$$

түрінде болады. Бұл жердегі $a_0 + a_1 > 0,\ b_0 + b_1 > 0$ Штурм-Лиувилл есебінің шарты.

Бұл есеп Штурм-Лиувилл шарттарымен берілген есеп болып табылады.

(1.3.25), (1.3.26) есебінің меншікті мәндері λ_k ал меншікті функциялары $y_k(x)$ болса, онда жалпы теория бойынша (қараңыз 2-тарау 2.1 параграф) $\{y_k(x)\}$ жүйе $L_2(0,1)$ кеңістігінің ортонормал базисін құрайды. Онда R есебінің кез-келген шешімі және $\varphi(x),\ \ \psi(x)$ функциялары

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) y_k(x)$$

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \varphi_k y_k(x)$$

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \psi_k y_k(x)$$

қатарларға жіктеледі.

Жоғарыда көрсетілген әдісті қолданып мына теореманы дәлелдейміз .

Теорема 1.3.3 . Егер $0<\alpha\leq 1,\ a>0$ және $\varphi,\ \psi,\ \varphi'',\ \psi'$ функциялары (1.3.26) шеттік шарттарды қанағаттандырса, онда R есебінің шешімі бар және жалғыз болады.

2 ЖАЛПЫ ТЕЛЕГРАФ ТЕҢДЕУІ ҮШІН БАСТАПҚЫ ШЕТТІК ЕСЕПТІҢ ШЕШІМДІЛІГІ

2.1 Штурм-Лиувилл есебі.

Гиперболалық

$$\rho(x)u_{xx} + Lu = 0 \tag{2.1.1}$$

теңдеуін қарастырайық. Мұндағы

$$Lu = -div(p(x)gradu(x) + q(x)u(x))$$

$$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in D \subset R^n, \rho(x) > 0, \rho(x) \in C(\bar{D})$$

$$\rho(x) > 0, \rho(x) \in C'(D), q(x) \geq 0, q(x) \in C(\bar{D}).$$

Тұйық құрама жатық S бетімен шектелген D аймағында $t > 0$ болғанда (2.1.1) теңдеуді және

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x) \tag{2.1.2}$$

бастапқы шарттармен

$$(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \upsilon})\big|_S = 0, \quad \alpha(x), \beta(x) \geq 0, \alpha^2 + \beta^2 \neq 0 \tag{2.1.3}$$

шекаралық шартын қанағаттандыратын тұйық аймағында үзіліссіз туындысы бар $u(x,t)$ функциясын табу – аралас есебін қарастырайық.

Алдымен (2.1.1)-(2.1.3) аралас есебін біртектес (2.1.1) теңдеу үшінқарастырсақ, онда егер $u_1, u_2, ..., u_m$ функциялары (2.1.3) шартты қанағаттандыратын біртектес (2.1.1) теңдеуінің шешімдері болса, олардың

$$u = \sum_{k=1}^{m} c_k u_k \ \ (c_k\text{-тұрақтылар})$$

сызықтық кешені де (2.1.3) шартты қанағаттандыратын (2.1.1) біртектес теңдеудің шешімі болады.

Енді жоғарыда келтірілген барлық дербес шешімдердің сызықтық кешені көмегімен (2.1.2) бастапқы шарттарды қанағаттандырамыз. Ол үшін (2.1.1) біртектес теңдеудің (2.1.3) шартты қанағаттандыратын нөлден өзгеше дербес шешімдерін

$$u(x,t) = X(x)T(t), \qquad \left(T(t) \in C[0,+\infty), X(x) \in C(\bar{D})\right)$$

түріндегі функциялар класында іздейік.

$X(x)T(t)$ функциясын (2.1.1) теңдеуге қойып, алынған

$$\rho(x)X(x)T''(t) = -LX(x)T(t)$$

теңдеуін $\rho(x)X(x)T(t)$ функциясына бөліп,

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)X(x)}$$

айнымалылары бөліктенген теңдеуін аламыз. Бұл теңдік тепе-тең болуы үшін (яғни $T(t)X(x)$ теңдеуді қанағаттандыруы үшін) екі бөлшек те тұрақтыға тең болуы қажетті және жеткілікті:

$$\frac{T''(t)}{T(t)} = -\frac{LX(x)}{\rho(x)X(x)} = -\lambda = const$$

Сонымен $T(t)$ және $X(x)$ функцияларын анықтау үшін

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0 \qquad (2.1.4)$$

$$LX(x) = \lambda \rho(x)X(x) \qquad (2.1.5)$$

теңдеулерін аламыз. (2.1.4) теңдеу оңай табылады. Ал біз (2.1.5) теңдеудің

$$(\alpha(x)TX + \beta(x)T\frac{\partial X}{\partial \upsilon})\big|_S = 0$$

(2.1.3) шарты қанағаттандыратын шешімін іздейміз. Біз есептің нөлден өзгеше шешімдерін іздегенімізден $T(t) \neq 0$ және $(\alpha X + \beta \frac{\partial X}{\partial \nu})\big|_S = 0$ (2.1.5)-(2.1.6) есепті Штурм-Луивилл есебі деп атайды. Жоғарыда атап өттік: «біз тек нөлден өзгеше шешім іздейміз»-деп. Ал (2.1.5)-(2.1.6) есептің оңай шешімдері әруақытта бола бермейді.

Анықтама 2.1.1: Штурм-Луивилл есебінің нөлден өзгеше шешімдері болатын λ мәндері меншікті сандар немесе меншікті мәндер, ал оған сәйкес нөлге тең болмайтын Штурм-Лиувилл есебінің шешімі меншікті функциялар деп аталады.

Анықтама2.1.2: λ меншікті санның еселігі немесе рангы деп осы меншікті санға сәйкес сызықтық тәуелсіз меншікті функциялардың ең жоғарғы санын айтады.

Біз дәлелдеусіз Стекловтың мынадай өте маңызды теоремасын келтіреміз. Тұйық $\bar{D}$ аймағында екінші ретті дербес туындылары үзіліссіз және (2.1.6) формула шекаралық шартты қанағаттандыратын кез келген f функциясы $\bar{D}$ аймағында абсолютты және бірқалыпты жинақталатын (2.1.5)-(2.1.6) шекаралық есеп меншікті функцияларының Фурье қатарына жіктеледі.

L операторы үшін Грин формулалары.

Бізге

$$u(x) \in C^2(D) \cap C'(\bar{D}), \quad \nu(x) \in C'(\bar{D})$$

функциялары берілсін. $u(x)$ функциясына L операторын қолданып,

$$Lu = -div(\rho(x) gradu + q(x)u)$$

оның екі жағын да $\nu(x)$ функциясына көбейтсек,

$$\nu Lu = -\nu div(\rho(x) gradu + q(x)u\nu) = \rho(x)\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \nu}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} -$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x}(\rho(x)\nu(x)\frac{\partial u}{\partial x}) + qu\nu = p(\nabla u, \nabla \nu) - div(p\nabla u) + qu\nu$$

теңдеуін аламыз. Енді соңғы теңдікті $\bar{D}$ аймағы бойынша интегралдап, оған Грин-Остроградский формуласын қолдансақ,

$$\int_D \nu Ludx = \int_D p(\nabla u, \nabla \nu)dx - \int_S p\nu\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds + \int_D qu\nu dx \qquad (2.1.7)$$

Бұл формуланы әдебиетте, әдетте, L операторы үшін І-ші Грин формуласы деп атайды.

u мен ν функцияларының орындарын ауыстырып:

$$\int_D uL\nu dx = \int_D p(\nabla u, \nabla \nu)dx - \int_S pu\frac{\partial u}{\partial \upsilon}ds + \int_D qu\nu dx$$

одан (2.1.7) теңдікті шегерсек,

$$\int_D (uL\nu - \nu Lu)dx = \int_S p(\nu\frac{\partial u}{\partial \upsilon} - u\frac{\partial \nu}{\partial \upsilon})ds \qquad (2.1.8)$$

L операторы үшін ІІ-ші Грин формуласы деп аталатын теңдікке келеміз.

L операторының анықталу аймағы $D(L)$ деп (2.1.6) шартты қанағаттандыратын $Lf \in L_2(D)$ болатын $Lf \in L_2(D) f \in C^2(D) \cap C'(\bar{D})$ функциялар жиынын айтамыз. Штрум-Лиувилл есебінің шешімін $D(L)$ аймағында іздейміз.

L **операторының қасиеттері.**

1) L операторы Лагранж бойынша өзіне өзі түйіндес яғни кез келген $f(x),\ g(x) \in D(L)$ функциялары үшін

$$(Lf, g) = (f, Lg), \forall f, g \in D(L)$$

Шынында да II—ші текті Грин формуласында $u = f, v = g$ десек,

$$\int_D (fLg - gLf)dx = \int_S p(v\frac{\partial f}{\partial \upsilon} - u\frac{\partial g}{\partial \upsilon})ds = 0,$$

өйткені S бетінде

$$\alpha f + \beta \frac{df}{d\upsilon} = 0,\ \alpha g + \beta \frac{dg}{d\upsilon} = 0$$

және $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$ демек, S бетінде

$$\begin{vmatrix} f & \dfrac{df}{d\upsilon} \\ g & \dfrac{dg}{d\upsilon} \end{vmatrix} \neq 0 \text{ немесе } f\frac{dg}{d\upsilon} - g\frac{df}{d\upsilon} = 0$$

Онда $\int_D fLgdx = \int_D gLfdx$ мұнан $(f, Lg) = (g, Lf)$.

2) L операторы оң, яғни

$$(Lf, f) \geq 0,\ \forall f \in D(L)$$

шынында да, 1-ші текті Грин формуласында $u = f = v$ десек,

$$\int_D fLfdx = \int_D p(x)(\nabla f, \nabla f)dx - \int_S pf\frac{\partial f}{\partial \upsilon}ds + \int_D qf^2dx$$

және мұнан $(Lf, f) \geq 0$ екенін көреіз. Өйткені бұл тендеудің оң жағындағы бірінші және үшінші қосылғыштары теріс емес, ал екінші қосылғышының теріс еместігін былай көрсетуге болады: $f \in D(L)$ болғандықтан,

$$(\alpha f+\beta\frac{\partial f}{\partial \upsilon})\big|_S=0$$

мұнан егер $\beta(x)\neq 0$ болса, онда $\frac{\partial f}{\partial \upsilon}\big|_S=-\frac{\alpha}{\beta}f\big|_S$, ал егер $\beta=0$ болса, онда $\alpha\neq 0$ және $f\big|_S=0$ сондықтан

$$-\int_S pf\frac{\partial f}{\partial \upsilon}ds=\int_D q\frac{\alpha}{\beta}f^2ds\geq 0,$$

егер $\beta\neq 0$ $-\int_S pf\frac{\partial f}{\partial \upsilon}ds=0$, $\beta=0$ болса. Әдебиетте (Lf,f) квадраттық түрпатын энергия интегралы деп атайды.

Меншікті сандар мен меншікті функциялардың жалпы қасиеттері

А) Егер X_0 нүктесі λ_0 меншікті санына сәйкес меншікті функция болса, онда CX_0 (C-тұрақты сан) функциясы да осы λ_0 меншікі санына сәйкес меншікті функция болады.

Дәлелдеу: Егер $LX_0=\lambda\rho X_0$ және $(\alpha X_0+\beta\frac{\partial X_0}{\partial \upsilon})\big|_S=0$ болса, онда

$$L(CX_0)=CLX_0=C\lambda_0\rho X_0=\lambda_0\rho(CX_0)$$

және

$$C(\alpha X_0+\beta\frac{\partial X_0}{\partial \upsilon})\big|_S=(\alpha C(X_0)+\beta\frac{\partial C(X_0)}{\partial \upsilon})\big|_S=0.$$

Мұнан мынадай қорытынды жасауға болады: егер Штурм-Лиувилль есебінің нөлден өзгеше ең болмағанда бір шешімі бар болса, онда оның нөлден өзгеше шексіз көп шешімі бар әрі олардың кез келген сызықтық кешені де шешім болады.

Б) Әртүрлі λ_1 және λ_2 меншікті сандарына сәйкес X_1 және X_2 меншікті функциялары D аймағында $\rho(x)$ функциясының көбейтіндісімен ортогонал, яғни

$$\int_D p(x)X_1(x)X_2(x)dx=0.$$

Дәлелдеу. Теорема шарты бойынша:

$$LX_1 = \lambda_1 \rho X_1, \quad LX_2 = \lambda_2 \rho X_2.$$

Бірінші теңдікті X_2, екінші X_1 функцияларына көбейтіп, сонан соң D аймағы бойынша интегралдасақ

$$L(X_1, X_2) = \lambda_1 (\rho X_1, X_2), \quad (LX_2, X_1) = \lambda_2 (\rho X_2, X_1)$$

теңдіктерін аламыз. Ал L операторының өзіне өзі түйіндестігі мен $\lambda_1 \neq \lambda_2$ екенін ескерсек,

$$\int_D p(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0$$

теңдігін аламыз.

Осы екі қасиеттен мынадай қорытынды жасауға бооады: әртүрлі меншікті сандарға сәйкес меншікті функциялар жүйесін ортонормалдауға болады.

Шынында да, C санын таңдау арқылы X_1 функциясының $\rho(x)$ функциясына көбейтіндісін D аймағында нормалдауға болады, яғни

$$\int_D p(x) X_1{}^2(x) dx = 1.$$

В) L операторының меншікті сандары әрқашанда нақты.

Дәлелдеу: Біз теорема тұжырымына кері (2.1.5)-(2.1.6) Штурм-Лиувилл есебінің меншікті саны $\lambda_1 = a + ib, b \neq 0$ кешен сан, ал оған сәйкес меншікті функция $X_1 = X_1^{(1)} + iX_1^{(2)}$ кешен мәнді функция болсын деп ұйғарайық. Онда (2.1.5)-(2.1.6) есептің теңдеуі мен шекаралық шартының еселеуіштері нақты мәнді функциялар болғандықтан, $\lambda_2 = a - ib$ саны да меншікті сан және $X_2 = X_1^{(1)} - iX_1^{(2)}$ оған сәйкес меншікті функция болады. Алдыңғы қасиет бойынша $\lambda_1 \neq \lambda_2$ болғандықтан,

$$\int_D p(x) X_1(x) X_2(x) dx = 0.$$

Мұны ашып жазсақ,

$$\int_D p(x) [X_1^{(1)^2} + iX_1^{(2)^2}] dx = 0$$

мұнан $X_1^{(1)} = 0, X_1^{(2)} = 0$. Демек, λ_1 меншікті санына нөлдік шешім сәйкес келеді, бұл меншікті сан анықтамасына қайшы.

Г) меншік сандар теріс емес.

Дәлелдеу: Егер λ меншікті сан , ал X оған сәйкес меншікті функция болса, онда $(LX,X)=\lambda\int\limits_D pX^2dx$ және ол теріс емес, өйткені L операторы оң. Сондықтан $\lambda\geq 0$

Д) $\lambda=0$ саны (2.1.5)-(2.1.6) есептің меншікті саны болады, сонда және тек қана сонда егер $\lambda=0,\ q=0$ болса әрі оған сәйкес меншікті функция $X(x)=const.$
Дәлелдеу: $\lambda=0$ меншікті сан, ал $X(x)\neq 0$ оған сәйкес меншікті функция болсын, яғни

$$LX=0,\ \ (\alpha X+\beta\frac{\partial X}{\partial \upsilon})\big|_S=0$$

Онда І-ші ретті Грин формуласында $u=v=X$ деп алып,

$$0=\int\limits_D XLXdx=\int\limits_D p(\nabla X)^2dx-\int\limits_S pX\frac{\partial X}{\partial \upsilon}ds+\int\limits_D qX^2dx$$

немесе

$$\int\limits_D p(\nabla X)^2dx+\int\limits_S p\frac{\alpha}{\beta}X^2ds+\int\limits_D qX^2dx=0$$

теңдігін аламыз. Мұнан $\nabla X=0,\ \ \alpha(x)=0,\ \ q(x)=0$ теңдіктері шығады.

Енді керісінше, $\lambda=0,\ q=0$ болсын, онда (2.1.5)-(2.1.6) Штурм-Лиувилл есебі

$$-div(p\nabla X)=\lambda\rho X,\ \ \beta(x)\frac{\partial X}{\partial \upsilon}\big|_S=0$$

түрінде жазылады. Ал $\beta(x)\neq 0$ болғандықтан $\frac{\partial X}{\partial \upsilon}\big|_S=0$.

Егер $\lambda=0$ болса , онда $X(x)=const.$ функциясы

$$div(p\nabla X)=0,\ \ \frac{\partial X}{\partial \upsilon}\big|_S=0$$

есебінің шешімі болады. Яғни $\lambda=0$ меншікті сан. Қасиет дәлеленді.

Меншікті сандар мен меншікті функциялардың бар болуы.

Меншікті сандар мен меншікті функциялардың бар болуын бір өлшемді

$$\begin{cases} \rho(x)\dfrac{\partial^2 u}{dt^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}(p(x)\dfrac{\partial u}{\partial x}) - q(x)u \\ (p(x), p'(x), q(x) \in C[0,l], \quad \rho(x), p(x) > 0, q(x) \geq 0) \end{cases} \tag{2.1.9}$$

гиперболалық теңдеу үшін бастапқы шарттары

$$u\big|_{t=0} = \varphi_1(x), \quad u_t\big|_{t=0} = \varphi_2(x), \quad 0 < x < l \tag{2.1.10}$$

және шекаралық шарттары

$$(\alpha_1 u - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x})\big|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x})\big|_{x=l} = 0 \tag{2.1.11}$$

(α_i, β_i-оң сандар әрі $\alpha_i^{\ 2} + \beta_i^{\ 2} \neq 0, i = 1,2$) болатын есеп үшін көрсетеміз

Егер $Lu = \dfrac{\partial}{\partial x}(p(x)\dfrac{\partial u}{dx}) - q(x)u$ болса, онда Штурм-Лиувилл есебін

$$LX = \lambda p(x)X(x) \tag{2.1.12}$$

$$(\alpha_1 u - \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x})\big|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_2 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial x})\big|_{x=l} = 0 \tag{2.1.13}$$

түрінде жазуға болады.

(2.1.12) теңдеу екінші ретті $LX = f(x)$, $(f(x) = \lambda p(x)X)$ жәй дифференциалдық теңдеу.

Алдымен

$$LX = 0 \tag{2.1.14}$$

біртектес теңдеуін қарастырамыз.

Оның

$$(\alpha_1 \nu_1 - \beta_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x})\big|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_2 \nu_2 + \beta_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial x})\big|_{x=l} = 0 \tag{2.1.15}$$

шарттарын қанағаттандыратын ν_1, ν_2 екі шешімін алайық. Бұлай алынған ν_1, ν_2 шешімдері сызықтық тәуелсіз. Шынында да, егер олар сызықты тәуелді болса, онда $\nu_1(x) = C\nu_2(x)$ және (2.1.15) шарттардың теңдеуінен $\nu_1(x)$ үшін тағы да

$$(\alpha_2 \nu_2 + \beta_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial x})\big|_{x=l} = 0 \tag{2.1.16}$$

шартының орындалатынын көреміз.
Демек, $\nu_1(x)$ функциясы

$$L\nu_1 = 0, \quad (\alpha_1 \nu_1 - \beta_1 \frac{\partial \nu_1}{\partial x})\Big|_{x=0} = 0, \quad (\alpha_2 \nu_2 + \beta_2 \frac{\partial \nu_2}{\partial x})\Big|_{x=l} = 0$$

есебінің $\lambda = 0$ меншікті санына сәйкес меншікті функция болады. Демек, алдыңғы параграфтың д) қасиетінен, $\nu_1(x) = C_1, \quad \nu_2(x) = C_2$.

Сонымен, $\nu_1(x), \ \nu_2(x)$ сызықтық тәуелсіз функциялар. Олай болса Вронски анықтауышы

$$W(x) = \begin{vmatrix} \nu_1(x) & \nu_2(x) \\ \nu_1'(x) & \nu_2'(x) \end{vmatrix} \neq 0$$

онда Остроградский-Лиувилл

$$W(x) = W(0)e^{-\int_0^x \frac{P'(x)}{p(x)}dx}$$

формуласынан

$$W(x)p(x) = w(0)p(0) \tag{2.1.17}$$

теңдігін аламыз.

Енді $Lx = f$ теңдеуінің шешімін

$$X(x) = C_1\nu_1(x) + C_2\nu_2(x)$$

түрінде іздейік. Тұрақтыларды вариациалау әдісі бойынша

$$\begin{cases} C_1'\nu_1(x) + C_2'\nu_2(x) = 0 \\ C_1'\nu_1'(x) + C_2'\nu_2'(x) = -\dfrac{f}{p} \end{cases}$$

теңдеулерінен

$$C_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & V_2 \\ -\dfrac{f}{p} & \nu_2' \end{vmatrix}}{W(x)}, \quad C_2' = \frac{\begin{vmatrix} V_1 & 0 \\ \nu_1' & -\dfrac{f}{p} \end{vmatrix}}{W(x)}$$

немесе

$$C_1' = \frac{f(x)\nu_2(x)}{W(x)p(x)}, \quad C_2' = -\frac{f(x)\nu_1(x)}{W(x)p(x)}$$

табамыз. Мұнан (2.1.17) теңдікті ескерсек,

$$\begin{cases} C_1(x) = -\dfrac{1}{W(0)p(0)}\displaystyle\int_x^l f(\xi)\nu_2(\xi)d\xi \\ C_2(x) = -\dfrac{1}{W(0)p(0)}\displaystyle\int_0^x f(\xi)\nu_1(\xi)d\xi. \end{cases} \qquad (2.1.18)$$

Демек, осылай таңдалып алынған $C_1(x), C_2$ функцияларында

$$X(x) = -\frac{\nu_1(x)}{W(0)p(0)}\int_0^x f(\xi)\nu_2(\xi)d\xi - \frac{\nu_2(x)}{W(0)p(0)}\int_x^l f(\xi)\nu_1(\xi)d\xi \qquad (2.1.19)$$

функциясы (2.1.12) теңдеуді ($f(x) = \lambda p(x)X(x)$ болғанда) және (2.1.13) шарттарды қанағаттандырады.

Сонымен,

$$X(x) = \int_0^l G(x,\xi)f(\xi)d\xi \qquad (2.1.20)$$

мұндағы

$$G(x,\xi) = -\frac{1}{W(0)p(0)}\begin{cases} \nu_1(x)\nu_2(\xi), & 0<\xi<x<l \\ \nu_1(\xi)\nu_2(x), & 0<x<\xi<l \end{cases} \qquad (2.1.21)$$

Грин функциясы немесе (2.1.12)-(2.1.13) шекаралық есебінің әсер ету функциясы деп аталады.

Оның x айнымалысының функциясы ретінде мынадай қасиеттері бар:

1) $G(x,\xi)$ функциясы $0 \le x, \ \xi < l$ аралығында нақты мәнді және үзіліссіз.

2) $G(x,\xi)$ функциясы $[0,x]$, $[\xi,l]$ аралықтарында екі реті үзіліссіз дифференциалданатын функция және $LG=0$.

3) $G(x,\xi)$ функциясы

$$(\alpha_1 G-\beta_1\frac{\partial G}{\partial x})\big|_{x=0}=0,\quad (\alpha_2 G+\beta_2\frac{\partial G}{\partial x})\big|_{x=l}=0$$

шарттарын қанағаттандырады.

4) $\frac{\partial G}{\partial\xi}\big|_{\xi=x+0}-\frac{\partial G}{\partial\xi}\big|_{\xi=x-0}=-\frac{1}{p(x)}$.

5) $G(x,\xi)$ функциясы x,ξ аргументтері бойынша симметриялы:

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

(2.1.1)-(2.1.3) қасиеттер әсер ету функциясын құру тәсілінен тікелей шығады, ал 4) қасиеті былай дәлелдеуге болады:

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}=-\frac{1}{W(0)p(0)}\nu_1(\xi)\nu_2'(\xi)\quad \text{егер } x>\xi \text{ болса,}$$

$$\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial\xi}=-\frac{1}{W(0)p(0)}\nu_1'(\xi)\nu_2(\xi)\quad \text{егер } x<\xi \text{ болса,}$$

онда

$$\frac{\partial G}{\partial\xi}\big|_{\xi=x+0}-\frac{\partial G}{\partial\xi}\big|_{\xi=x-0}=-\frac{1}{p(0)W(0)}\cdot(\nu_1\nu_2'-\nu_2\nu_1')\big|_{x=\xi}=-\frac{p(0)W(0)}{p(x)}\frac{1}{p(0)W(0)}=-\frac{1}{p(x)}.$$

Енді 5) қасиеттің орындалатынына көз жеткізу үшін (2.1.21) теңдіктен

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{W(0)p(0)}\nu_1(x)\nu_2(\xi)\quad \text{егер } x<\xi \text{ болса,}$$

$$G(x,\xi)=-\frac{1}{W(0)p(0)}\nu_1(\xi)\nu_2(x)\quad \text{егер } x\geq\xi \text{ болса,}$$

Демек,

$$G(x,\xi)=G(\xi,x)$$

Сонымен (2.1.12) теңдеудің (2.1.13) шарттары қанағаттандыратын шешімін табу

$$X(x)=\lambda\int_0^l G(x,\xi)p(\xi)X(\xi)d\xi$$

біртектес Фредгольм интегралдық теңдеуінің шешімін табумен тең мағыналы.

Бұл интегралдық теңдеуде $\sqrt{p(x)}X(x)=\varphi(x)$ ауыстыруын жасасақ,

$$\varphi(x)=\lambda\int_0^l K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi$$

(өзегі $K(x,\xi)=G(x,\xi)\sqrt{p(x)p(\xi)}$ -симметриялық) интегралдық теңдеуіне келеміз. Демек, (2.1.12)-(2.1.13) Штурм-Лиувил есебінің меншікті сандары мен меншікті функцияларының бар болуы функциялық талдау курсында өтілетін өзегі симметриялы (2.1.22) интегралдық теңдеуінің меншікті сандары мен меншікті функцияларының бар болуын зерттеуге келтіреді екен. Ол курста мынадай тұжырымдар дәлелденеді:

1) Кез келген нөлге теңбе-тең болмайтын үзіліссіз симметриялық өзектің ең болмағанда бір меншікті саны болады.
2) Өзегі симметриялы интегралдық теңдеудің барлық меншікті сандары нақты.
3) Интегралдық теңдеудің әртүрлі меншікті сандарына сәйкес меншікті $\varphi_1(x),\varphi_2(x)$ функциялары $[0,l]$ кесіндісінде ортогонал:

$$\int_0^l \varphi_1(x)\varphi_2(x)=0\,.$$

4) Әрбір $[a,b]$ ақырлы кесіндісінде меншікті функциялар сандары ақырлы.
5) Әрбір λ меншікті санына сандары ақырлы сызықтық тәуелсіз $\varphi_1(x),\varphi_2(x),...,\varphi_n(x)$ меншікті функциялары сәйкес келеді.
6) Өзегі симметриялы интегралдық теңдеудің спектрі арқылы болуы үшін оның өзегі тозғындалған болуы қажетті және жеткілікті.

2.2 Жалпы телеграф теңдеуі үшін бастапқы шеттік есептің шешімділігі.

$\Omega=\{(x,t):\ \ 0\le x<1,\ \ 0<t<T\}$ облысында берілген

$$D_t^{2\alpha}u(x,t)+2aD_t^{\alpha}u(x,t)=\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right]-q(x)u+f(x,t) \qquad (2.2.1)$$

$$\begin{cases} b_1u_x(0,t)+a_1u(0,t)=h_1(t),\ 0\le t\le T, \\ b_2u_x(1,t)+a_2u(1,t)=h_2(t),\ 0\le t\le T, \end{cases} \qquad (2.2.2)$$

$$u(x,0) = g_0(x), \quad D_t^{\alpha} u(x,0) = g_1(x), \quad 0 \le x \le 1 \tag{2.2.3}$$

есепті қарастырайық. Мұнда $p(x)$, $r(x)$ функциялары $[0,1]$ аралығында оң анықталған, $q(x) \ge 0$, $f(x,t)$, $h_1(t)$, $h_2(t)$ және $g_0(x), g_1(x)$ - жеткілікті тегіс функциялар.

Есептің шешімі деп t айнымалы бойынша $L_1(0,T) = \left\{ f : \|f\| = \int_0^T |f(t)|\, dt < \infty \right\}$ класқа тиісті болған функцияға айтамыз.

Есептің шешімін

$$u(x,t) = U(x,t) + \upsilon(x,t) \tag{2.2.4}$$

түрінде іздейік.

$\upsilon(x,t)$ функциясын (2.2.2) , яғни

$$\begin{cases} b_1 \upsilon_x(0,t) + a_1 \upsilon(0,t) = h_1(t) \\ b_2 \upsilon_x(1,t) + a_2 \upsilon(1,t) = h_2(t) \end{cases} \tag{2.2.4}$$

шарттарды қанағаттандыратындай етіп таңдайық. Оның үшін

$$\upsilon(x,t) = \frac{a_2 x - b_2 - a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_1(t) + \frac{b_1 - a_1 x}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_2(t) \tag{2.2.5}$$

функцияны қарастыру жеткілікті.

Шынында да (2.2.5) теңдіктен

$$\upsilon(x,t) = \frac{a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_1(t) - \frac{a_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_2(t).$$

Бұдан

$$\upsilon_x(0,t) = \frac{a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_1(t) - \frac{a_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_2(t)$$

$$\upsilon(0,t) = \frac{-b_2 - a_2}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_1(t) + \frac{b_1}{a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 a_2} h_2(t).$$

Нәтижеде

$$b_1\upsilon_x(0,t)+a_1\upsilon(0,t)=\frac{b_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)-\frac{a_1b_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t)-\frac{a_1b_2+a_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)$$

$$+\quad\frac{a_1b_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}\,h_2(t)\;=\;\left[\frac{b_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}\;-\;\frac{a_1b_2+a_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}\right]h_1(t)\;+$$

$$+\;\left[\frac{a_1b_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}\;+\;\frac{a_1b_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}\right]h_2(t)\;=\frac{b_1a_2-a_1b_2-a_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)\;\equiv h_1(t).$$

Екінші теңдікті тексерейік,

$$\upsilon_x(1,t)\frac{a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)\text{ - }\frac{a_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t),$$

$$\upsilon(1,t)=\frac{a_2-b_2-a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)\quad+\quad\frac{b_1-a_1}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t).$$

Онда

$$b_2\upsilon_x(1,t)+\;a_2\upsilon\left(1,t\right)=\;\frac{b_2a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)\text{ - }\frac{a_1b_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t)+$$

$$+\frac{a_2b_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_1(t)\;+\frac{a_2b_1-a_1a_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t)=\frac{a_2b_1-a_1a_2-a_1b_2}{a_2b_1-a_1b_2-a_1a_2}h_2(t)\equiv h_2(t)$$

.

Енді $U(x,t)$ функциясын қандай шарттарды қанағаттандыратынын анықтаймыз. (2.2.4) шарттарды ескерсек, онда $U(x,t)$ функциясы

$$\begin{cases} b_1U_x(0,t)+a_1U(0,t)=0, \\ b_2U_x(1,t)+a_2U(1,t)=0, \end{cases} \tag{2.2.5}$$

шеттік шарттарды қанағаттандырады.

(2.2.3) бастапқы шарттардан

$$\begin{cases} U(x,0)=g_0(x)-\upsilon(x,0)=\tilde{g}_0(x), \\ D_t^{\alpha}U(x,0)=g_1(x)-D_t^{\alpha}\upsilon(x,0)=\tilde{g}_1(x) \end{cases} \tag{2.2.6}$$

теңдіктерге ие боламыз.

$U(x,t)$ функциясын

$$U(x,t) = U_1(x,t) + U_2(x,t) \tag{2.2.7}$$

түрінде жазып алайық .
Онда

$$D_t^{2\alpha} U(x,t) = D_t^{2\alpha} U_1(x,t) + D_t^{2\alpha} U_2(x,t),$$

$$2aD^{\alpha} U(x,t) = 2aD^{\alpha} U_1(x,t) + 2aD^{\alpha} U_2(x,t),$$

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] - q(x)\right\} U(x,t) = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] - q(x)\right\} U_1(x,t) + \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] - q(x)\right\} U_2(x,t).$$

Нәтижеде

$$D^{2\alpha}\left[U_1(x,t) + U_2(x,t)\right] = \left\{\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial}{\partial x}\right] - q(x)\right\}\left[U_1(x,t) + U_2(x,t)\right] +$$

$$+ f(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)\upsilon(x,t) - D_t^{2\alpha}\upsilon(x,t) - 2aD_t^{2\alpha}\upsilon(x,t)$$

теңдікке ие боламыз.
Егер

$$\tilde{f}(x,t) = f(x,t) + \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial \upsilon(x,t)}{\partial x}\right] - q(x)\cdot\upsilon(x,t) - D_t^{2\alpha}\upsilon(x,t) - 2aD_t^{2\alpha}\upsilon(x,t) \tag{2.2.8}$$

деп алсақ, онда $U_1(x,t)$ және $U_2(x,t)$ функциялары үшін

$$D_t^{2\alpha} U_1(x,t) + 2aD_t^{\alpha} U_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial U_1}{\partial x}\right] - q(x)U_1(x,t) \tag{2.2.9}$$

$$\begin{cases} b_1 U_{1x}(0,t) + a_1 U_1(0,t) = 0 \\ b_2 U_{1x}(1,t) + a_2 U_1(1,t) = 0 \end{cases} \tag{2.2.10}$$

$$U_1(x,0) = \tilde{g}_0(x), \quad D^{\alpha} U_{1t}(x,0) = \tilde{g}_1(x), \tag{2.2.11}$$

және

$$D_t^{2\alpha} U_2(x,t) + 2aD_t^{\alpha} U_2(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial U_2}{\partial x}\right] - q(x)U_2(x,t) + \tilde{f}(x,t), \tag{2.2.12}$$

$$\begin{cases} b_1 U_{2x}(0,t) + a_1 U_2(0,t) = 0 \\ b_2 U_{2x}(1,t) + a_2 U_2(1,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.13)$$

$$U_2(x,0) = 0, D_t^{\alpha} U_2(x,0) = 0 \qquad (2.2.14)$$

есептері шығады.

(2.2.9) теңдеудің шешімін табу үшін айнымалыларды ажырату әдісін қолданамыз, яғни $U_1(x,t)$ функциясын

$$U_1(x,t) = X(x) \cdot T(t)$$

түрінде іздейміз.
Нәтижеде

$$D^{2\alpha} T(t) + 2a D^{\alpha} T(t) + \lambda T(t) = 0, \qquad (2.2.15)$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dX}{dx} \right] - q(x) X(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (2.2.16)$$

теңдеулерге ие боламыз. Мұнда λ- ажырату тұрақтысы. Егер $U_1(x,t)$ функциясы (2.2.10) шеттік шарттарды қанағаттандыратынын ескерсек онда $X(x)$ функциясы үшін

$$b_1 x'(0) + a_1 x(0) = 0; \;\; b_2 x'(1) + a_2 x(1) = 0 \qquad (2.2.17)$$

шеттік шарттар келіп лшығады.

(2.2.16) теңдеу (2.2.17) шеттік шарттармен Штурм –Лиувилл есебі депе аталады.

2.1 параграфтың нәтижесі бойынша (2.2.16), (2.2.17) есептің $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_n < \ldots$ меншікті мәндері бар болса оларға сәйкес клетін $X_n(x)$ меншікті функциялары $L_2(0,1)$ Гильберт кеңістігінде базис құрайды және

$$\int_0^1 X_n^2(x) dx = \|X_n\|^2$$

болады.
(2.2.15) теңдеудің шешім

$$T(t) = c_1 \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+} t^{\alpha}\right) + c_2 \mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-} t^{\alpha}\right) \qquad (2.2.18)$$

түріндегі функция болады. Мұндағы c_1, c_2-кез-келген тұрақтылар, ал λ^+, λ^- сандары

$$\lambda^+ = -a + \sqrt{a^2 - \lambda_k}, \lambda^- = -a - \sqrt{a^2 - \lambda_k}$$

теңдіктерден анықталады.

Нәтижеде (2.2.9)-(2.2.11) есебінің жалпы шешімі

$$U_1(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} \mathrm{E}_{\alpha,1} \left(\lambda^+ t^\alpha \right) + c_{2k} \mathrm{E}_{\alpha,1} \left(\lambda^- t^\alpha \right) \right] X_n(x)$$

қатар түрінде анықталады.

Егер $\tilde{g}_0(x), \tilde{g}_1(x)$ функциялары $X_n(x)$ базис бойынша қатарға жіктесек, онда

$$\tilde{g}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{0k} X_k(x),$$

$$\tilde{g}_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{g}_{1k} X_k(x)$$

(2.2.11) бастапқы шарттардан

$$U_1(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} \mathrm{E}_{\alpha,1}(0) + c_{2k} \mathrm{E}_{\alpha,1}(0) \right] X_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{1k} + c_{2k} \right) X_n(x) = \tilde{g}_0(x),$$

$$D^\alpha U_1(x,0) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[c_{1k} \lambda^+ \mathrm{E}_{\alpha,1}(0) + c_{2k} \lambda^- \mathrm{E}_{\alpha,1}(0) \right] X_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_{1k} \lambda^+ + c_{2k} \lambda^- \right) X_n(x) = \tilde{g}_1(x).$$

Бұдан c_{1k}, c_{2k}-коэффициенттер үшін мына

$$\begin{cases} c_{1k} + c_{2k} = \tilde{g}_{0k} \\ c_{1k} \lambda^+ + c_{2k} \lambda^- = \tilde{g}_{1k} \end{cases}$$

алгебралық теңдеулерге ие боламыз.

Бұл теңдеулер жүйесінің шешімі

$$\left(\lambda^+ - \lambda^- \right) c_{2k} = \lambda^+ \tilde{g}_{0k} - \tilde{g}_{1k}$$

$$c_{2k}=\frac{\lambda^{+}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}-\frac{1}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{1k}$$

$$c_{1k}=\tilde{g}_{0k}-\frac{\lambda^{+}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}+\frac{1}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{1k}=\frac{1}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{1k}-\frac{\lambda^{-}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}$$

Демек,

$$c_{1k}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)+c_{2k}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)=\frac{\tilde{g}_{1k}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)-\frac{\lambda^{-}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)+$$

$$+\frac{\lambda^{+}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)-\frac{1}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{1k}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)=\frac{\tilde{g}_{0k}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\left[\lambda^{+}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)-\lambda^{-}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)\right]+$$

$$+\frac{\tilde{g}_{1k}}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\left[\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)-\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)\right].$$

Нәтижеде $U_1(x,y)$ функциясы

$$U_1(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{+}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)-\lambda^{-}\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{0k}X_k(x)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{+}t^{\alpha}\right)-\mathrm{E}_{\alpha,1}\left(\lambda^{-}t^{\alpha}\right)}{\lambda^{+}-\lambda^{-}}\tilde{g}_{1k}X_k(x). \tag{2.2.19}$$

қатар түрінде жазылады.

Енді (2.2.12)-(2.2.14) есептің шешімін, яғни $U_2(x,y)$ функциясын табамыз.

Бұл функцияны

$$U_2(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)X_k(x) \tag{2.2.20}$$

түрінде іздейміз.

Егер $\tilde{f}(x,t)$ функциясы

$$\tilde{f}(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}_k(t)X_k(x) \tag{2.2.21}$$

қатар түрінде өрнектеледі есептейік. Бұл жерде

$$\tilde{f}_k(t) = \frac{1}{\|X_k(x)\|^2}\int_0^1 \tilde{f}(x,t)X_k(x)dx \qquad (2.2.22)$$

жіктелу коэффициенттері.

(2.2.20) және (2.2.21) теңдіктерді ескере отырып , (2.2.12) теңдеуден

$$D^{2\alpha}U_2(x,y) + 2aD^{\alpha}U_2(x,y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial U_2}{\partial x}\right] - q(x)U_2(x,y) - \tilde{f}(x,t) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{2\alpha}u_k(t) + 2aD^{\alpha}u_k(x,y)\right]X_n(x) - \sum_{k=1}^{\infty}U_k(t)\left\{\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dx_k}{dx}\right] - qX_k(x)\right\} - \sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}_k(x)X_k(x) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left[D^{2\alpha}u_k(t) + 2aD^{\alpha}u_k(t) + \lambda_k u_k(t) - \tilde{f}_k(t)\right]X_k(x) = 0$$

теңдікті аламыз.

Меншікті функциялар үшін $X_k(x) \neq 0$ теңсіздік орынды.Олай болса $u_k(t)$ белгісіз коэффициенттері

$$D^{2\alpha}u_k(t) + 2aD^{\alpha}u_k(t) + \lambda_k u_k(t) - \tilde{f}_k(t) = 0$$

немесе

$$D^{2\alpha}u_k(t) + 2aD^{\alpha}u_k(t) + \lambda_k u_k(t) = \tilde{f}_k(t) \qquad (2.2.23)$$

теңдеудің шешімі болуы қажет.

(2.2.14) шарттардан $u_k(t)$ функциялары үшін

$$u_k(0) = 0, \quad D^{\alpha}u_k(0) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \qquad (2.2.24)$$

бастапқы шарттар келіп шығады.

Сонымен $u_k(t)$ белгісіз коэффициенттерді табу үшін (2.2.23), (2.2.24) есептің шешімін табу қажет.

Бұл есептің шешімін табу үшін төмендегі көмекші есепті қарастырайық.

$$\begin{cases} D^{2\alpha}y(t) + 2aD^{\alpha}y(t) + \lambda y(t) = f(t), \\ y(0) = 0, \quad D^{\alpha}y(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.25)$$

Егер λ_1, λ_2 сандары

$$k^2 + 2ak + \lambda = 0$$

квадрат теңдеудің түбірлері болса, онда (2.2.25) есеп

$$\begin{cases} \left(D^\alpha - \lambda_1\right)\left(D^\alpha - \lambda_2\right) y(t) = f(t) \\ \\ y(0) = 0, \quad D^\alpha y(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.26)$$

есепке эквивалиент.

Ал (2.2.26) есеп

$$\begin{cases} \left(D^\alpha - \lambda_2\right) y(t) = z(t) \\ \\ y(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.7)$$

$$\begin{cases} \left(D^\alpha - \lambda_1\right) z(t) = f(t) \\ \\ z(0) = 0 \end{cases} \qquad (2.2.28)$$

есептерге эквивалиент.

[61] әдебиетте (2.2.27), (2.2.28) есептердің шешімдері айқын көрсетілген.

Сол нәтиже бойынша

$$z(t) = \int_0^1 (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_1 (t-\tau)^\alpha\right) f(\tau) d\tau$$

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}\left(\lambda_2 (t-\tau)^\alpha\right) z(\tau) d\tau$$

функциялары сәйкесінше (2.2.27), (2.2.28) есептердің шешімдері болады.

Олай болса

$$y(t) = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_2 (t-\tau)^\alpha\right) \cdot \int_0^\tau (\tau - s)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_1 (\tau - s)^\alpha\right) f(s) d\tau \, .$$

Интегралдардың орындарын ауыстырсақ

$$y(t) = \int_0^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1} (\tau - s)^{\alpha-1} \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_2 (t-\tau)^\alpha\right) \mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_1 (\tau - s)^\alpha\right) d\tau ds.$$

Ішкі интегралды I деп белгілеп алып оны зерттейік.

$$I=\int_s^t (t-\tau)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_2(t-\tau)^\alpha\right)(\tau-s)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_1(\tau-s)^\alpha\right)d\tau.$$

Егер соңғы интегралда айнымалыларды $\tau-s=\xi$ түрінде ауыстырсақ, онда келесі түрде болады:

$$I=\int_0^{t-s} \xi^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_2\xi^\alpha\right)(t-s-\xi)^{\alpha-1}\mathrm{E}_{\alpha,\alpha}\left(\lambda_1(t-s-\xi)^\alpha\right)d\xi.$$

[7] әдебиетінде бұл интегралдың мәні анық табылған және ол

$$\frac{\lambda_1\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_1(t-s)^\alpha\right)-\lambda_2\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_2(t-s)^\alpha\right)}{\lambda_1-\lambda_2}$$

шамаға тең.

Олай болса

$$y(t)=\int_0^t \frac{\lambda_1\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_1(t-s)^\alpha\right)-\lambda_2\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_2(t-s)^\alpha\right)}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)ds \qquad (2.2.29)$$

формуламен анықталады.

Сонымен (2.2.25) есептің шешімі (2.2.29) формуламен анықталады.

Осыған сәйкес (2.2.23), (2.2.24) Коши есебінің шешімі

$$u_k(t)=\int_0^t \frac{\lambda^+\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_1(t-s)^\alpha\right)-\lambda_2\mathrm{E}_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda_2(t-s)^\alpha\right)}{\lambda^+-\lambda^-}\tilde{f}_k(s)ds \qquad (2.2.30)$$

теңдікпен анықталады.

$u_k(t)$ функцияларының бұл мәндерін (2.2.20) формулаға қойсақ (2.2.12)-(2.2.14) есептің шешімін табамыз.

Сонымен біз бастапқы (2.2.1)-(2.2.3) есептің шешімін

$$u(x,t)=U_1(x,t)+U_2(x,t)+\upsilon(x,t)$$

түрінде табамыз.

Нәтижеде мынандай теорема дәлелденді.

Теорема 2.2.1. (2.2.1)-(2.2.3) есебінің $L(0,T)$ класына тиісті шешімі бар, жалғыз және ол

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k(t)X_k(x)+\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k(x)+\upsilon(x,t)$$

формуламен анықталады.

Бұл жерде

$$a_k(t) = \frac{\lambda^+ \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^- t^\alpha) - \lambda^- \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+ t^\alpha)}{\lambda^+ - \lambda^-} \tilde{g}_{0k} + \frac{\mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^+ t^\alpha) - \mathrm{E}_{\alpha,1}(\lambda^- t^\alpha)}{\lambda^+ - \lambda^-} \tilde{g}_{1k},$$

$u_k(t)$ функциясы (2.2.30) формуламен , $\upsilon(x,t)$ (2.2.5) формуламен анықталады, ал $\lambda^+ = a + \sqrt{a^2 - \lambda_k}, \lambda^- = a - \sqrt{a^2 - \lambda_k}, \lambda_k, X_k(x) -$ Штурм-Лиувилл есебінің меншікті мәндері және меншікті функциялары.

2.3 Әлсіз регуляр шартты есептердің шешімділігін зерттеу.

Айталық $\Omega = \{(x,t):\ \ 0 < x < 1,\ \ 0 < t < T\}$ аймақта

$$D_t^{2\alpha} u(x,t) + 2aD_t^\alpha u(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \qquad (2.3.1)$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \ \ D^\alpha u(x,0) = \psi(x) \qquad (2.3.2)$$

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,t) + b_1 u(1,t) + a_0 u(1,t) + b_0 u(0,t) = 0 \\ c_1 u_x(0,t) + d_1 u_x(1,t) + c_0 u(1,t) + d_0 u(0,t) = 0 \end{cases} \qquad (2.3.3)$$

есепті қарастырайық. Бұл жерде $a_k,\ b_k,\ c_k,\ d_k,\ k = 0,1 -$ тұрақтылар, $a > 0$.

$D_t^2 = D_t \cdot D_t = \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}$ болғандықтан (2.3.1) теңдеу $\alpha = 1$ мәнінде классикалық телеграф теңдеуді аламыз.

[61] әдебиетіндегі классификация бойынша (2.3.3) шеттік шарттарды төменде берілген үш жағдайда:

$$i \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0;$$

$$ii \quad a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0, |a_1| + |b_1| > 0, a_1 d_0 + b_1 c_0 \neq 0;$$

$$iii \quad a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0, a_1 d_0 + b_1 c_0 \neq 0;$$

регуляр шарттар деп атаймыз.

Бірінші және үшінші жағдайда және екінші жағдайда қосымша

$$a_1 c_0 + b_1 d_0 \neq \pm [a_1 d_0 + b_1 c_0]$$

теңсіздік орындалғанда (2.3.3) шарттарды әлді регуляр шарттар деп атаймыз. Штурм шарттары, яғни $b_0 = b_1 = c_0 = c_1 = 0$ болса (2.3.3) шеттік шарттардың мысалы болады.

Мына нәтиже [63] жұмысында дәлелденген.

Лемма 2.3.1. Егер (2.3.3) шеттік шарттар регуляр, бірақ әлсіз регуляр болса, онда бұл шарттарда әрқашанда коэффициенттері

$$I. \quad a_1 + b_1 = 0, c_0 - d_0 \neq 0$$

$$II. \quad a_1 - b_1 = 0, c_0 + d_0 = 0$$

$$III. \quad c_0 - d_0 = 0, a_1 + b_1 \neq 0$$

$$IV. \quad c_0 + d_0 = 0, a_1 - b_1 \neq 0 \tag{2.3.4}$$

шартардың біреуін қанағаттандыратындай

$$\begin{cases} a_1 u_x(0,t) + b_1 u_x(1,t) + a_0 u(0,t) + b_0 u(1,t) = 0 \\ c_0 u_x(0,t) + d_0 u_x(1,t) = 0, \qquad |a_1| + |b_1| > 0 \end{cases} \tag{2.3.5}$$

көрініске келтіруге болады.

(2.3.1)-(2.3.3) есеп үшін негізгі нәтиже төмендегі теоремада баяндалады.

Теорема 2.3.1. Егер (2.3.1)-(2.3.3) есептің (2.3.3) шеттік шарттары регуляр, бірақ әлсіз регуляр, яғни шеттік шарттардың коэффициенттері (2.3.4) шарттардың біреуін қанағаттандыратын (2.3.5) көріністе болса, онда (2.3.1)-(2.3.3) есептің $L_1(0,T)$ кеңістікке тиісті шешімі бар және жалғыз болады.

Кейінгі зерттеулерде тек қана (2.3.5) түрдегі шеттік шарттарды ғана қарастырамыз.

$u(x,t)$ функциясының x айнымалысы бойынша жұп және тақ бөліктерін, яғни

$$\begin{cases} C(x,t) = \dfrac{u(x,t) + u(1-x,t)}{2} \\ S(x,t) = \dfrac{u(x,t) - u(1-x,t)}{2} \end{cases} \tag{2.3.6}$$

функцияларын қарастырайық.

$$u(x,t) = C(x,t) + S(x,t)$$

болатыны айқын.

Ω аймақтың кез-келген (x,t) нүктелері үшін

$$\begin{cases} C(x,t)=C(1-x,t), S(x,t)=-S(1-x,t) \\ C_x(x,t)=-C_x(1-x,t), S_x(x,t)=S_x(1-x,t) \end{cases} \tag{2.3.7}$$

теңдіктер орынды болады.

Шынында да

$$C(x,t)=\frac{u(x,t)+u(1-x,t)}{2}=\frac{u(1-x,t)+u(x,t)}{2}=C(1-x,t),$$

$$C_x(x,t)=\frac{u_x(x,t)-u_x(1-x,t)}{2}=-\frac{u_x(1-x,t)-u_x(x,t)}{2}=-C_x(1-x,t),$$

$$S(x,t)=\frac{u(x,t)-u(1-x,t)}{2}=-\frac{u(1-x,t)-u(x,t)}{2}=-S(1-x,t),$$

$$S_x(x,t)=\frac{u_x(x,t)+u_x(1-x,t)}{2},$$

$$S_x(1-x,t)=\frac{u_x(1-x,t)+u_x(x,t)}{2},$$

$$S_x(x,t)=S_x(1-x,t).$$

Олай болса $u(x,t)$ функцияны құру үшін $C(x,t)$ және $S(x,t)$ функцияларын

$$\Omega=\{(x,t):\ \ 0<2x<1,\ \ 0<t\}\subset\Omega$$

ішкі аймақта табу жеткілікті. Себебі Ω аймақтың басқа нүктелерінде $u(x,t)$ функциясының мәнін табу үшін (2.3.7) теңдіктерде қолдануға болады.

Енді $C(x,t)$ және $S(x,t)$ функциялары қанағаттандыратын шарттарды табамыз.

$u(x,t)$ функциясы (2.3.1)-(2.3.2) есептің шешімі болса, онда

$$D^{2\alpha}u(x,t)=D^{2\alpha}C(x,t)+D^{2\alpha}S(x,t),$$

$$D^{\alpha}u(x,t)=D^{\alpha}C(x,t)+D^{\alpha}S(x,t),$$

$$u_{xx}(x,t)=C_{xx}(x,t)+S_{xx}(x,t),$$

теңдіктерден

$$D^{2\alpha}C(x,t)+2aD^{2\alpha}C(x,t)-C_{xx}(x,t)=\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(x,t)+D^{2\alpha}u(1-x,t)\right]+$$

$$+\frac{a}{2}\left[D^{2\alpha}u(x,t)+D^{2\alpha}u(1-x,t)\right]-\frac{1}{2}\left[u_{xx}(x,t)+u_{xx}(1-x,t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(x,t)+2aD^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}(x,t)\right]+\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(1-x,t)+2aD^{\alpha}u(1-x,t)-u_{xx}(1-x,t)\right]=0.$$

Демек, $C(x,t)$ функциясы

$$D^{2\alpha}C(x,t)+2aD^{\alpha}C(x,t)-C_{xx}(x,t)=0$$

теңдеуді қанағаттандырады.

Сондай-ақ,

$$C(x,0)=\frac{u(x,0)+u(1-x,0)}{2}=\frac{\varphi(x)+\varphi(1-x)}{2}=\varphi^{+}(x),$$

$$D^{\alpha}C(x,0)=\frac{D^{\alpha}u(x,0)+D^{\alpha}u(1-x,t)}{2}=\frac{\psi(x)+\psi(1-x)}{2}=\psi^{+}(x).$$

Нәтижеде $C(x,t)$ функциясы

$$D^{2\alpha}C(x,t)+2aD^{\alpha}C(x,t)-C_{xx}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega \tag{2.3.8}$$

теңдеуі және

$$C(x,0)=\varphi^{+}(x),\quad D^{\alpha}C(x,0)=\psi^{+}(x) \tag{2.3.9}$$

бастапқы шарттарды қанағаттандырады. Осы сияқты

$$D^{2\alpha}S(x,t)+2aD^{\alpha}S(x,t)-S_{xx}(x,t)=$$

$$=\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(x,t)-D^{2\alpha}u(1-x,t)\right]+\frac{a}{2}\left[D^{\alpha}u(x,t)-D^{\alpha}u(x,t)\right]-\frac{1}{2}\left[u_{xx}(x,t)-u_{xx}(1-x,t)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(x,t)+2aD^{\alpha}u(x,t)-u_{xx}(x,t)\right]-\frac{1}{2}\left[D^{2\alpha}u(1-x,t)+2aD^{\alpha}u(1-x,t)-u_{xx}(1-x,t)\right]=0$$

(2.3.2) бастапқы шарттардан

$$S(x,0)=\frac{1}{2}\left[u(x,0)-u(1-x,0)\right]=\frac{1}{2}\left[\varphi(x)-\varphi(1-x)\right]=\varphi^{-}(x),$$

$$D^{\alpha}S(x,0)=\frac{1}{2}\left[D^{\alpha}u(x,0)-D^{\alpha}u(1-x,0)\right]=\frac{1}{2}\left[\psi(x)-\psi(1-x)\right]=\psi^{-}(x).$$

Сонымен $S(x,t)$ функциясы

$$D^{2\alpha}S(x,t)+2aD^{\alpha}S(x,t)-S_{xx}(x,t)=0, \tag{2.3.10}$$

$$S(x,0)=\varphi^{-}(x), D^{\alpha}S(x,0)=\psi^{-}(x) \tag{2.3.11}$$

шарттарды қанағаттандырады.

Енді $C(x,t)$, $S(x,t)$ функциялары үшін шеттік шарттарды анықтайық.

Егер $u(x,t)=C(x,t)+S(x,t)$ функциясы (2.3.3) шеттік шартарды қанағаттандырса , онда (2.3.5) шарттардың біріншісін есепке алсақ

$$a_1u_x(0,t)+b_1u_x(1,t)+a_0u(0,t)+b_0u(1,t)=a_1C_x(0,t)+a_1S_x(0,t)+b_1C_x(1,t)+b_1S_x(1,t)+$$

$$+a_0C(0,t)+a_0S(0,t)+b_0C(1,t)+b_0S(1,t)=(a_1-b_1)C_x(1,t)+(a_1+b_1)S_x(0,t)+$$

$$+(a_0+b_0)C(0,t)+(a_0-b_0)S(1,t)=0.$$

Екінші шеттік шарттан

$$c_0u(0,t)+d_0u(1,t)=c_0C(0,t)+c_0S(0,t)+d_0C(1,t)+$$

$$+d_0S(1,t)=(c_0+d_0)C(0,t)+(c_0-d_0)S(0,t)=0.$$

Нәтижеде

$$\begin{cases}(a_1-b_1)C_x(1,t)+(a_1+b_1)S_x(0,t)+(a_0+b_0)C(0,t)+(a_0-b_0)S(0,t)=0\\ (c_0+d_0)C(0,t)+(c_0-d_0)S(0,t)=0\end{cases} \tag{2.3.12}$$

шеттік шартарға ие боламыз.

Егер (2.3.4) шартардың біреуі орындалса, онда (2.3.12) шеттік шарттардағы коэффициенттердің біреуі 0-ге тең болады. Осы ескертуді есепке алсақ (2.3.7) теңдіктерден $C(x,t)$ және $S(x,t)$ функциялар үшін Ω_0 облысының сол жақ шекарасында төмендегі шарттардың біреуін аламыз:

I. Егер $a_1+b_1=0,\ \ c_0-d_0\neq 0$ болса, онда

$$(a_1-b_1)(c_0-d_0)C_x(0,t)-(a_0d_0-b_0c_0)C(0,t)=0,$$

$$S(0,t)=-\frac{c_0+d_0}{c_0-d_0}C(0,t).$$

II. Егер $a_1-b_1=0,\ \ c_1+d_0\neq 0$ болса, онда

$$(a_1+b_1)(c_0+d_0)S_x(0,t)+(a_0d_0-b_0c_0)S(0,t)=0,$$

$$C(0,t)=\frac{c_0-d_0}{c_0+d_0}S(0,t).$$

III. Егер $a_1+b_1\neq 0,\ \ c_0-d_0=0$ болса, онда

$$C(0,t)=0$$

$$(a_1+b_1)S_x(0,t)+(a_0-b_0)S(0,t)=-(a_1-b_1)C_x(0,t).$$

IV. Егер $a_1-b_1\neq 0,\ \ c_0+d_0=0$ болса, онда

$$S(0,t)=0$$

$$(a_1-b_1)C_x(0,t)+(a_0+b_0)C(0,t)=-(a_1+b_1)S_x(0,t).$$

Бұл шарттарға қосымша , Ω_0 аймағының оң шетінде

$$C_x\left(\frac{1}{2},t\right)=0,\quad S\left(\frac{1}{2},t\right)=0$$

шеттік шарттар келіп шығады.

Нәтижеде $C(x,t),S(x,t)$ функциялары төмендегі екі түрдегі есептердің шешімі болады:

Есеп 2.3.1. Ω_0 аймағында

$$D_t^{2\alpha}C(x,t)+2aC(x,t)-C_{xx}(x,t)=0,\quad (x,t)\in\Omega_0, \tag{2.3.13}$$

$$C(x,0)=\varphi^+(x),\quad D^\alpha C(x,0)=\psi^+(x),\quad 0\le x\le 1, \tag{2.3.14}$$

$$\begin{cases} (a_1 - b_1)(c_0 - d_0)C_x(0,t) - (a_0 d_0 - b_0 c_0)C(0,t) = 0 \\ C_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2.3.15}$$

және

$$D_t^{2\alpha} S(x,t) + 2aS(x,t) - S_{xx}(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega_0, \tag{2.3.16}$$

$$S(x,0) = \varphi^-(x), \quad D^\alpha S(x,0) = \psi^-(x), \quad 0 \le x \le 1, \tag{2.3.17}$$

$$\begin{cases} S(0,t) = -\frac{c_0 + d_0}{c_0 - d_0} C(0,t) \\ S\left(\frac{1}{2}, 1\right) = 0 \end{cases} \tag{2.3.18}$$

шарттарды қанағаттандыратын $C(x,t), S(x,t)$ функцияларын табу қажет.

Есеп 2.3.2. Ω_0 аймағында (2.3.15) теңдеу, (2.3.17) бастапқы шарттар,

$$\begin{cases} (a_1 + b_1)(c_0 + d_0)S_x(0,t) + (a_0 d_0 - b_0 c_0)S(0,t) = 0 \\ S\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2.3.18}$$

және (2.3.13) теңдеу, (2.3.14) бастапқы шарттармен

$$\begin{cases} C(0,t) = \frac{c_0 - d_0}{c_0 + d_0} S(0,t) \\ C_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \end{cases} \tag{2.3.20}$$

шекаралық шарттарда қанағаттандыратын $C(x,t), S(x,t)$ функцияларын табу қажет.

Есеп 2.3.3. Ω_0 аймағында (2.3.13) теңдеу ,(2.3.14) басиапқы шарттар

$$C(0,t) = 0, \quad C_x\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0, \quad 0 \le t \le T \tag{2.3.21}$$

шекаралық шарттар және (2.3.16) теңдеу, (2.3.17) бастапқы шарттармен

$$\begin{cases} (a_1+b_1)S_x(0,t)+(a_0-b_0)S(0,t)=-(a_1-b_1)C_x(0,t) \\ S\left(\frac{1}{2},t\right)=0 \end{cases} \quad (2.3.22)$$

шекаралық шарттарды қанағаттандыратын $C(x,t), S(x,t)$ функцияларын табу қажет.

Есеп 2.3.4. Ω_0 аймағында (2.3.16) теңдеу (2.3.17) бастапқы шарттармен

$$S(0,t)=0, \quad \mathrm{S}\left(\frac{1}{2},t\right)=0, \quad 0\le t\le T \quad (2.3.23)$$

шекаралық шарттар және (2.3.13) теңдеу (2.3.14) бастапқы шарттармен

$$\begin{cases} (a_1-b_1)C_x(0,t)+(a_0+b_0)C(0,t)=-(a_1+b_1)S_x(0,t) \\ C_x\left(\frac{1}{2},t\right)=0, \quad 0\le t\le T \end{cases} \quad (2.3.24)$$

шекаралық шартарды қанағаттандыратын $C(x,t), S(x,t)$ функцияларын табу қажет.

(2.3.1)-(2.3.4) есептердегі шекаралық шарттарды барлығы күшті регуляр шарттар болады. Демек, Ω аймағында әлсіз регуляр шекаралық шарттармен берілген (2.3.1)-(2.3.3) есеп түрлендіру нәтижесінде екі күшті регуляр шекаралық шартты есептерді шешу мәселесіне келтірілді.

Сонымен төменде аталған нәтиже алдық.

Лемма 2.3.2. Егер (2.3.1)-(2.3.3) есепте шекаралық шарттар әлсіз регуляр болса, бұл есепті әрқашанда оған эквивалиент болған, екі күшті регулярлы шекаралық шартпен берілген есепке келтіруге болады.

Ω_0 аймағында табылған $C(x,t)$ және $S(x,t)$ функциялары бойынша (2.3.1)-(2.3.3) есептің шешімі

$$u(x,t)=\begin{cases} C(x,t)+S(x,t), & 2x\le 1, \\ C(1-x,t)-S(1-x,t), & 2x\ge 1 \end{cases}$$

формуламен табылады.

Осы леммадан және осы тараудың 2.2 бөліміндегі негізгі теорема бойынша (2.3.1)-(2.3.3) есептің шешімі бар және жалғыз болады. Сонымен теорема дәлелденді.

ҚОРЫТЫНДЫ

Бұл диссертациялық жұмыста физикалық, химиялық процесстердегі фракталдық құбылыстарды зерттеуде және экономикалық , әлеуметтік-биологиялық құбылыстарды модельдеу кезінде туындайтын бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін кейбір бастапқы-шеттік есептердің шешілімдігі мәселесі қарастырылған.

Көптеген математикалық моделдер параболалық және гиперболалық теңдеулердің бөлшек аналогтары үшін қисынды қойылған шеттік есептерді зерттеуге келтірілді.

Гиперболалық типтегі теңдеулердің көп қолданысқа ие болған бір түрі телеграф теңдеуі . Бұл теңдеудің бөлшек ретті жалпыламаларын зерттеу актуалды мәселе.

Аралас есептер теориясының жаңа бір бағыты гиперболалық теңдеулердің секвенциал туындылы бөлшек ретті аналогтары үшін қисынды қойылған есептерді зерттеу болып табылады.

Бұл диссертациялық жұмыста телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін аралас есептер секвенциал туынды қатысқан жағдайында зерттелінді.

Бұл бағытта негізгі нәтижелер бүтін ретті дифференциалдық теңдеулер және Риман-Лиувилл, Капуто операторы қатысқан жағдай үшін алынған. секвенциал туындылы телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін мұндай есептер бірінші рет қарастырылды.

Гиперболалық тектес теңдеулердің бөлшек ретті аналогтары үшін қисынды қойылған есептердің жаңа кластары зерттелінді. Спектралдық әдісті қолданып бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін шекаралық және бастапқы шарттарымен берілген есептердің шешімі бар, жалғыз болуы туралы теоремаларды дәлелденді.

Бұл диссертациялық жұмысты жүргізуде математикалық физика теңдеулері, математикалық талдау, функционалдық талдау, интегралдық теңдеулер әдістері қолданылды.

Диссертациялық жұмыстың негізгі нәтижелері:

- секвенциал туындылы жәй дифференциалдық теңдеудің арнайы түрін шешу әдісі қарастырылды;.
- бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулердің жалпы шешімі табылды;
- бөлшек ретті дифференциалдық теңдеулер үшін Коши және Дирихле түріндегі есептер қарастырылды;
- телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Дирихле түріндегі бастапқы шеттік есептің классикалық шешімдері табылды;
- телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін периодты шарттармен берілген есептің классикалық шешімдері табылды;
- телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Робен түріндегі бастапқы шеттік есептің классикалық шешімдері табылды;
- Дирихле, периодты, Робен шарттарымен берілген есептердің шешімінің айқын түрі табылды;

- Дирихле, периодты, Робен шарттарымен берілген есептердің шешімінің тегістігі анықталды;
- телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін Штурм-Лиувилл шарттармен берілген есептің жалпыланған шешімі табылды;
- регулярлық, бірақ әлсіз регулярлық шарттармен берілген есептердің классификациясы жүргізілді;
- телеграф теңдеуінің бөлшек ретті аналогы үшін регулярлық, бірақ әлсіз регулярлық шарттармен берілген есептің жалпыланған шешімдері табылды.

ПАЙДАЛАНЫЛҒАН ӘДЕБИЕТТЕР ТІЗІМІ

1. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва, Ижевск: РХД. – 2010. –568с.
2. Baleanu D.,Diethelm K., Scalas E, Trujillo J.J.Fractional Calculus: Models and Numerical Methods. World Scientific Publishing Company .New Jersey. – 2012. – 428 p
3. Diethelm K., Ford N.J. Analysis of Fractional Differential Equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. – 2002. – V. 265. – P. 229–248.
4. Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam, Elsevier Science B.V, 2006. – 523 p.
5. Magin R. L. Fractional calculus in bioengineering //Critical Reviews in Biomedical Engineering. – 2004. – V. 32,№ 1. –P. 1-104.
6. Miller K. S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. – John Wiley & Sons, New York, 1993. –276 p.
7. Podlubny I. Fractional Differential Equations. – San Diego, Academic Press, 1999. –340 p.
8. Sabatier J., Agrawal O. P., Machado J. A. T., Eds. Advances in Fractional Calculus: Theoretical Developments and Applications in Physics and Engineering. – Springer, Dordrecht, The Netherlands, 2007. –416 p.
9. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. –Gordon and Breach, Switzerland,1993. –976 p.
10. Ortigueira M. D., and Tenreiro Machado J. A. Special issue on Fractional signal processing and applications // Signal Processing. –2003. –V. 83,№ 11. – P. 2285–2286.
11. Oldham K. B. Fractional differential equations in electrochemistry //Advances in Engineering Software. –2010. –V. 41, №. 1. –P. 9–12.
12. Sorrentinos G. Fractional derivative linear models for describing the viscoelastic dynamic behavior of polymeric beams //in Proceedings of IMAS. – Saint Louis, Mo, USA, 2006.
13. Aghajani A., Jalilian Y., Trujillo J. J. On the existence of solutions of fractional integro-differential equations //Fractional Calculus and Applied Analysis. –2012. –V. 15, № 1, –P. 44–69.
14. Agarwal R. P., Ahmad B., Alsaedi A., Shahzad N. Existence and dimension of the set of mild solutions to semilinear fractional differential inclusions //Advances in Difference Equations. –2012. –V. 2012. article 74.
15. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 4. –С. 3–42.

16. Jarad F., Abdeljawad T., Baleanu D., K. Biзen. On the stability of some discrete fractional nonautonomous systems //Abstract and Applied Analysis. –2012. –Vl. 2012, Article ID 476581, 9 pages.
17. Atangana A. Secer A. He time-fractional coupled-Korteweg-de-Vries equations //Abstract and Applied Analysis. –2013. –V. 2013, Article ID 947986, 8 pages.
18. Xiang Sh., Han Zh., Zhao P., Sun Y. Oscillation Behavior for a Class of Differential Equation with Fractional-Order Derivatives //Abstract and Applied Analysis. –2014. –V.2014. Article ID 419597, 9 pages.
19. Baleanu D., Mustafa O. G., Agarwal R. On the solution set for a class of sequential fractional differential equations //Journal of Physics A. –2010. –V. 43, № 38. –7p.
20. Agrawal Om.P. Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain //Nonlinear Dynamics. –2002. –V. 29,1-4. –P. 145-155.
21. Nakagawa J., Sakomoto K., Yamamoto M.. Overview to mathematical analysis for fractional diffusion equations –new mathematical aspects motivated by industrial collaboration //Journal of Math-for-Industry. –2010. –V.2 (2010A-10). –P.99-108.
22. Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving multi-term linear and non-linear diffusion–wave equations of fractional order by Adomian decomposition method //Applied Mathematics and Computation. –2008. –V.202. –P. 113–120.
23. Daftardar-Gejji V., Bhalekar S. Solving fractional boundary value problems with Dirichlet boundary conditions using a new iterative method.//Computers & Mathematics with Applications. –2010. –V. 59,№ 5. –P. 1801–1809.
24. Sandev T., Tomovski Z. The general time fractional wave equation for a vibrating string. J. Phys. A: Math. Theor. – 2010. –V. 43. –12p.
25. Luchko Y., Al-Refai M. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications //Fract. Calc. Appl. Anal. –2014. –V.17. –P.483-498.
26. Luchko Y., Mainardi F.Some properties of the fundamental solution to the signalling problem for the fractional diffusion-wave equation //Central European Journal of Physics. –2013. –V.11. –P. 666–675.
27. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation //Fract. Calc. Appl. Anal. –2012. –V.15. –P.141-160.
28. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2011. –V.374. –P. 538-548.
29. Luchko Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations.//Fract. Calc. Appl. Anal. –2011. –V.11. –P.110-124.
30. Cascaval R.C., Eckstein E. C. , Frota C.L., Goldstein J.A. Fractional telegraph equations //J. Math. Anal. Appl. –2002. –V.275. –P. 145-159.

31. Wei Zh., Li Q., Che J. Initial value problems for fractional differential equations involving Riemann–Liouville sequential fractional derivative.//Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2010. –V. 367,№ 1. –P. 260–272.
32. Samko S.G., Kilbas A.A., Marichev O.I. Fractional Integrals and Derivatives, Theory and Applications. Gordon and Breach, Switzerland. –1993.515p.
33. Учайкин В.В. Метод дробных производных. –Изд.”Артишок”.–2008. –518с.
34. Hilfer R. Applications of fractional calculus in physics. – New Jersey.World Scientific. – 2000. – 85 p.
35. Miller K.S., Ross B. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. —John Wiley & Sons, INC. —1993. —384 p.
36. Luchko Y., Hilfer R., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives //Fract. Calc. Appl. Anal. –2009. –V.12. –P.299-318.
37. Luchko Y. Operational method in fractional calculus//Fract. Calc. Appl. Anal. –1999. –V2. –P.463-489.
38. Luchko Y. Gorenflo R . An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives//Acta Mathematica Vietnamica. –1999. –V.24. –P.207-233 .
39. Pskhu A.V. Initial-value problem for a linear ordinary differential equation of noninteger order //Sbornik Mathematics. –2011. –V. 202:4. P.571–582.
40. Karachik V.V. Method for constructing solutions of linear ordinary differential equations with constant coefficients //Comput. Math. Math. Phys. – 2012. –V. 52:2. –P.219–234.
41. Turmetov B.Kh., Shinaliyev K.M. On a method for constructing solutions of differential equations of fractional order with a Hadamard type operator // International Journal of Pure and Applied Mathematics. –2013. –V.84(4). –P. 435 – 450.
42. Shinaliyev K.M., Umarov S.R., Turmetov B.Kh. A fractional operator algorithm method for construction of solutions of fractional order differential equations //Fractional Calculus and Applied Analysis. –2012. –V.15(2), –P. 267 – 281.
43. Турметов Б.Х., Касимов Ш.Г. Шиналиев К.М. Об одном методе решения дифференциальных уравнений дробного порядка с оператором Миллера-Росса. Вестник НУУз. Ташкент. –2011. –№4/1. –С.96-103
44. Турметов Б.Х., Шиналиев К.М.Об одном операторном методе построения решения дифференциальных уравнений дробного порядка // Вестник ЕНУ. –2011. –№ 2(81). – С.10-17.
45. Hua Y., Luoa Y, Lua Z. Analytical solution of the linear fractional differential equation by Adomian decomposition method // Journal of Computational and Applied Mathematics. –2008. –V.215. –P.220 – 229.

46. Saha R.S., Bera R.K. Analytical solution of the Bagley Torvik equation by Adomian decomposition method //Appl. Math. Comput. –2005. –V.168. –P.398–410.
47. Saha R.S., Bera R.K. Solution of an extraordinary differential equation by Adomian decomposition method// J. Appl. Math. –2004. –V.4. –P.331–338.
48. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. –Москва,Наука– 1966. 671с.
49. Нахушев А.М. Дробное исчисление и их применение. –М: Физматлит, –2003 . –272с.
50. Бейтмен Г., Эрдеи А. Таблицы интегральных преобразований. Преобразования Фурье, Лапласа, Меллина. –М: Физ.мат.лит., –1969, –344с.
51. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной краевой задачи. //Дифференциальные уравнения. –1999. –Т.35. –№8. –С.1094-1100.
52. Kumar S. A new analytical modelling for fractional telegraph equation via Laplace transform//Applied Mathematical Modelling. –2014. –V. 38. –№ 13. –P. 3154–3163.
53. Chen J., Liu F., Anh V. Analytical solution for the time-fractional telegraph equation by the method of separating variables// Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2008. –V. 338. –№ 2. –P.1364–1377.
54. Cascaval R., Eckstein E., Frotac C., Goldstein J. Fractional telegraph equations// Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2002. –V. 276. –№1. –P.145–159.
55. Huang F.Analytical solution for the time-fractional telegraph equation// Journal of Applied Mathematics. –2009. –V. 7. –№4. –P. 45–59.
56. Momani S.Analytic and approximate solutions of the space-and time-fractional telegraph equations// Applied Mathematics and Computation. –2005. –V. 4. –№2. –P. 15–19.
57. Orsingher E., Beghin L.Time-fractional telegraph equations and telegraph processes with Brownian time//Probability Theory and Related Fields. –2004. –V.6. –№1. –P. 425–459.
58. - E Orsingher E., Zhao X.The space-fractional telegraph equation and the related fractional telegraph process // Chinese Annals of Mathematics. –2011. –V.3. –№4. –P. 145–159.
59. Fino A.Z., Ibrahim H.Analytical solution for a generalized space-time fractional telegraph equation // Mathematical Methods in the Applied. –2013. –V.11. –№9. –P. 111–123.
60. Jiang W., Lin Y.Representation of exact solution for the time-fractional telegraph equation in the reproducing kernel space. Communications in Nonlinear Science and Numerical. –2011. –V.2. –№1. –P. 211–223.
61. Kilbas A., Srivastava H. M., Trujillo J. J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations, vol. 204 of Elsevier Science BV, Amsterdam, The Netherlands, 2006.
62. Naimark M.A. Linear Differential operators. Nauka, Moscow 1954.-P. 528.

63. Sadybekov M. A., Orazov I. On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature. Siberian Mathematical Journal. 2012,Vol.53, Issue 1, pp 146-151.