Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО-ТУРЕЦКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Х.А.ЯСАВИ

УДК-517.956.4, 517.968.72

На правах рукописи

Халиков Шерали Маратович

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

Магистерская диссертация по специальности 6М060100-МАТЕМАТИКА на соискание академической степени магистра естественных наук

ТУРКЕСТАН – 2016

Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН

МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО-ТУРЕЦКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ Х.А.ЯСАВИ

Допущено к защите:

Заведующий кафедрой

«Математика», к.техн.н

__________Қошанова М.Д.

«____» _________2016 г.

Магистерская диссертация

ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДРОБНЫХ ДИФФУЗИОННЫХ УРАВНЕНИЙ

специальность: 6М060100-МАТЕМАТИКА

Магистрант _______________________________ Ш.М.Халиков

Научный руководитель,

д.ф.-м.н., профессор ________________________ Б.Х.Турметов

ТУРКЕСТАН -2016

СОДЕРЖАНИЕ

	ВВЕДЕНИЕ...	4
	АННОТАЦИЯ………………….………………………………………	13
1	ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНЫХ НАЧАЛЬНО - КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ	
1.1	Решение начальной задачи для обыкновенного дифференциального уравнения дробного порядка...	14
1.2	Начально-краевые задачи с условием Дирихле.....................................	23
1.3	Начально-краевые задачи с периодическими условиями…………….	30
1.4	О начально-краевой задаче для дифференциального уравнения дробного порядка с отклоняющимся аргументом…………………….	38
2	ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА	
2.1	Основные обозначение и определение...	46
2.2	Диффузионные и поли-диффузионные уравнение дробного порядка....	51
2.3	Задача Коши и начально краевые задачи………………………………	54
2.4	О полиномиальных решениях дифференциальных уравнений с частными производными дробного порядка………………………………	56
	ЗАКЛЮЧЕНИЕ………………………………………………………...	62
	СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ………………….	63

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы: Настоящая работа посвящена исследованию вопросов разрешимости начально-краевых задач для уравнения субдиффузии – дробного аналога уравнения диффузии.

Отметим, что в последние десятилетия возрос интерес к исследованию дифференциальных уравнений дробного порядка. Это обусловлено как с развитием самой теории дробного интегрирования и дифференцирования, так и их многочисленными применениями. Теория дробного исчисления применяется при описании широкого класса физических и химических процессов, протекающих во фрактальных средах.

Развитие теории фракталов вызвало повышенный интерес к явлениям самоподобия, характерным для степенных законов, и к математическому анализу нецелых порядков. Последний основан на систематическом использовании понятий производных и интегралов, порядки которых не являются целыми числами, а могут быть дробными, иррациональными и комплексными.

Как известно, дробные интегралы и производные - это обычные интегралы и производные. Однако в случае дробного порядка эти понятия имеют своеобразную специфику, которая проявляется, например, в том, что для них в разных ситуациях возникают их различные модификации. Различные определения дробных интегралов, производных и их модификации приведены в работе A.A. Kilbas и др. [1]. Использование операторов дробного порядка позволяет глубже понять известные результаты теории функции и краевых задач и получить новый класс решений, позволяющий охватить широкий круг задач.

Первоначальные результаты, связанные с интегро-дифференцированием дробного порядка, принадлежат Н. Абелью и Ж Лиувиллю. Следует особо отметить цикл работ А.В. Летникова [2-4], который за время своей 20-летней научной деятельности разработал полную теорию дифференцирования с произвольным показателем.

Дальнейшее развитие этой теории разрабатывались в работах М.М.Джрбашян [5,6], А.М. Нахушева [7,8], С.Г.Самко, А.А. Килбас, О.И.Маричев [9], Luchko Y., Gorenflo R, Mainardi F и др [12-19].

Развитию дробного исчисления способствовала весьма содержательная книга С. Г. Самко, А. А. Килбаса и О. А. Маричева «Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения». В ней впервые в мировой монографической литературе систематически излагаются классические и современные результаты, полученные по указанной теории.

Физическая интерпретация интегралов дробного порядка впервые приведена в работе Р.Р. Нигматуллина [20]. Подробный обзор, посвящённый проблемам использования дробного интегро - дифференциального исчисления для описания динамики различных систем и процессов управления, приведены в работах А.Г. Бутковского и других [21,22]. Приложение дробного исчисления в моделировании динамических систем описана в работе В.В.Васильева [23], а различные модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка изложены в работах В. Е.Тарасова [24] и В. В. Учайкина [25].

В течение последних нескольких десятилетий дифференциальные уравнения дробного порядка в частных производных начали играют важную роль в моделировании так называемых аномальных явлений и в теория сложных систем (см. например, [26]-[34] и ссылки в них). В связи с этим, особо отметим так называемое дробно-диффузионное уравнение, которое получается из классического диффузионного уравнения путем замены производной по времени первого порядка на дробную производную порядка α с $0<\alpha<1$.
В следствии, дробно-диффузионное уравнения оказались удобной математической моделью для так называемых суб-диффузионных процессов и, таким образом, стали важными и полезными в различных областях применения.

Для различных случаев дифференциальных уравнений дробного порядка начально-краевые задачи исследовались в работах [35]-[45]

В связи с этим актуальным является разработка методов решения начально-краевых задач для дифференциальных уравнений дробного порядка с различными модифицированными операторами.

Научная новизна работы. В диссертационной работе исследованы вопросы разрешимости новых классов начально-краевых задач для суб – диффузионных уравнений с модифицированными операторами дробного порядка. Разработан операторный метод построения точных решений дробных аналогов поликалорических уравнений и рассмотрены задачи Коши для таких уравнений.

Цель диссертации. Основной целью диссертационной работы является исследования вопросов разрешимости начально-краевых задач для суб – диффузионных уравнений с модифицированными операторами дробного порядка. Разработка методов решения некоторых обобщений поликалорических уравнений и рассмотрение задачи Коши для таких уравнений.

Основными задачами диссертации являются. Доказательства теорем о существовании и единственности начально – краевых задач. Применение метода Фурье для исследования этих задач. Доказательства сходимости полученных рядов. Разработка методов построения частных решений специальных классов дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы уравнений математической физики, математического анализа, функционального анализа, и методы интегральных уравнений.

Личный вклад автора. Подстановка задачи принадлежить научному руководителю автора. Исследования при теоретических расчетах и научных выводах проведены диссертантом. Издания материалов, обработки и подготовки докладов в конференции выполнено личным участием диссертанта.

Апробация работы. По материалам диссертации были проведены доклады на научном семинаре МКТУ кафедры «Математика» и в международной конференции РФ в городе Омск в Омском Государственном Техническом Университете .

Публикации работы. По материалом исследовательских работ были опубликованы 2 статья, в том числе 1 статья опубликовано в трудах конференции и 1 статья опубликовано в журнале Вестник МКТУ

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введение, двух глав, заключения и использованных литератур. Основной материал состоит из 66 страниц, список использованных литератур 52 наименований.

Краткое содержание диссертации

Пусть заданы действительные числа α и γ удовлетворяющие условиям $0<\alpha\leq\gamma\leq 1$. Для заданных α ,γ и функции $f(t)$ выражение

$$D^{\alpha,\gamma} f(t)=I^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma} f(t) \qquad (1)$$

называется оператором дробного дифференцирования порядка α и типа γ . Данный оператор введен в работе [46]. Особенность данного оператора в том, что он обобщает известные операторы дробного дифференцирования. А именно, при $\alpha=\gamma$ получаем $D^{\alpha,\alpha} f(t)=\frac{d}{dt}\mathrm{I}^{1-\alpha} f(t)\equiv{}_{RL}D^{\alpha} f$ - оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Если $\gamma=1$, то $D^{\alpha,1} f(t)=\mathrm{I}^{1-\alpha}\frac{d}{dt}f(t)\equiv{}_{C}D^{\alpha} f(t)$- оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто.

В первом параграфе главы 1 настоящей работы исследуется задача Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений дробного порядка. Задача решается сведением его к интегральному уравнения Вольтерра и применением теоремы Джрбашяна из [5].

Далее, в последующих параграфах для дифференциального уравнения теплопроводности дробного порядка с модифицированным производным Римана – Лиувилля исследуются начально – краевые задачи с условиями Дирихле, периодическими условиями и условиями Неймана.

Рассмотрим в области $\Omega=\{(x,t):\ 0<x<l, 0<t<T\}$ следующую задачу

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega, \qquad (2)$$

$$I^{1-\gamma}\,u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ 0\leq x\leq 1, \qquad (3)$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ 0<t\le T. \qquad (4)$$

Здесь $D_t^{\alpha,\gamma}u$ означает , что оператор $D^{\alpha,\gamma}$ действует к функции $u(x,t)$ по переменной t.

Решением задачи (2) - (4) назовём функцию $u(x,t)$ для которой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\in C(\Omega),\ D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega),$$

$I^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}),\ u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}\setminus\{t=0\}$ и удовлетворяшая условием (2) - (4) в классическом стиле.

Таким образом, решению задачи (2) - (4) допускает разрыв на линии $t=0$.

Сформируем оснавное утверждение относительно задачи (2)-(4).

Теорема 1. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1,\ \varphi(x)\in C^2[0,1]$ и выполняются условие $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. Тогда решение задачи (2)-(4) существует единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda k t^{\alpha}\right)\sin k\pi x,$$

где $\lambda_k=(k\pi)^2,\varphi_k=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin k\pi x dx$, а $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{i=0}^{\infty}\frac{z^i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}$, функция типа Миттаг-Леффлера [1].

В третьем параграфе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<l,0<t<T\}$ рассмотрена следующая задача

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega, \qquad (5)$$

$$t^{1-\gamma}\cdot u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \qquad (6)$$

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ 0<t\le T. \qquad (7)$$

Решением задачи (5)-(7) назовём функцию $u(x,t)$ для которой $u_{xx}(x,t)\in C(\Omega)$, $D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$, $t^{1-\gamma}\cdot u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$, $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}\setminus\{t=0\}$ и удовлетворяющая условиям (5)-(7) в классическом смысле.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$, функция $\varphi(x)\in C^2[0,1]$ и удовлетворяет условием $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$.

Тогда решение задачи (5)-(7) существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}\int_0^1\varphi(x)\,dx+$$

$$+\sqrt{2}\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}\sum_{k=1}^{\infty}E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2t^{\alpha}\right)\left[\cos 2k\pi x\int_0^1\varphi(x)\cos 2k\pi x dx+\right.$$

$$\left.+\sin 2k\pi x\int_0^1\varphi(x)\sin 2k\pi x dx\right].$$

В четвертом параграфе изучена начально – краевае задача для уравнения с отклонящимся аргументами.

В области $\Omega=\{(x,t):-\pi<x<\pi,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t)-\varepsilon u_{xx}(-x,t) \tag{8}$$

где $0<\alpha<1$, $|\varepsilon|\le 1$. Так как $D_t^{1,\gamma}=\dfrac{\partial}{\partial t}$, то при $\alpha=1$, $\varepsilon=0$ уравнение (8) совпадает с классическим уравнением теплопроводности. А при $\varepsilon=0$ уравнение (8) есть уравнение субдиффузий [25, с.240].

Регулярным решением уравнения (8) будем называть функцию из класса гладкости $u\in C_{x,t}^{2,0}(\Omega)$, $D^{\alpha,\gamma}u\in C_{x,t}^{0,0}(\Omega)$, $u\in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega}\cap(t>0)\right)$, $t^{1-\gamma}u\in C_{x,t}^{0,0}(\overline{\Omega})$. Последнее обусловлено особенностями при $t\to 0$, возникающими у решений уравнений с дробными производными.

В области Ω рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (8), удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}u(x,t)=\varphi(x),\ \ -\pi\le x\le\pi\ . \tag{9}$$

и краевым условиям

$$u(-\pi,t)=0, u(\pi,t)=0, 0\le t\le T\ . \tag{10}$$

Основным результатом этого параграфа является следующее утверждение.

Теорема 3. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям: $\varphi \in C[-\pi,\pi]$, $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=0,$ ее производная $\varphi'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых существуют конечные левая и правая производные. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(\gamma)}{t^{1-\gamma}}\left[\sum_{k=1}^{\infty} a_k E_{\alpha,\gamma}\left(-(1+\varepsilon)k^2 t^{\alpha}\right)\sin kx + \right.$$
$$\left. +\sum_{k=0}^{\infty} b_k E_{\alpha,\gamma}\left(-(1-\varepsilon)k^2 t^{\alpha}\right)\cos(k+0.5)x\right] \qquad (11)$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются равенствами

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx, k=\overline{1,\infty} \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(k+0.5)xdx, k=\overline{0,\infty} \end{cases}, \qquad (12)$$

Во второй главе работы исследуются вопросы построения решений некоторых дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.

Пусть L - линейный оператор, действующий на функции $f(x)$, определенные в некоторой области $\Omega \subset R^n$ и принадлежащие соответствующим классам.

Определение 1. Степенью оператора L назовём выражение L^m, пологая

$$L^0 f = f,\ L^k f = L\left(L^{k-1}f\right),\quad k=1,2,\ldots.$$

Определение 2. Порядком итерации или полилинейным порядком функции f относительно оператора L в области Ω назовем наименьшее натуральное число p, такое, что всюду в области Ω

$$L^p f(x)=0$$

Если выражение $L^p f(x)$ имеет смысл для любых p, но ни при одном их них не выполняется равенство $L^p f=0$, то полилинейный порядок такой функции относительно данного оператора L будем считать равным бесконечности.

Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$. Рассмотрим в области $Q=\{(x,t):x\in\Omega, 0<t<T\}$ следующее уравнение

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)^l u(x,t)=0 \qquad (13)$$

где L_x - линейный дифференциальный оператор действующий по переменной x, $l=1,2...$.

Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора L_x полилинейный порядок равный q (q-конечное или бесконечное).

Рассмотрим функцию

$$\Phi_p^q(t,g)=\sum_{i=p}^{q+p-1}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L_x^{i-p}g(v)\ , \qquad (14)$$

где $\binom{i}{p}=\frac{i!}{p!(i-p)!}$, $p=0,1,...$.

Если полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора L_x равен бесконечности то сумма (14) превращается в ряд вида

$$\Phi^\infty(t,g)=\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L_x^{i-p}g(x). \qquad (15)$$

В этом случае мы будем предполагать, что ряд (15) сходится равномерно и абсолютно в области Q .

Теорема 4. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$, функция $g(x)$ имеет конечный полилинейный порядок q относительно оператора L_x. Тогда функция (14) при всех $p=0,1,...,l-1$ является решением уравнения (13), в области Q .

Теорема 5. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$, функция $g(x)$ имеет относительно оператора L_x полилинейный порядок равный бесконечности. Тогда функция (15) для всех значений $p=0,1,...,l-1$ является решением уравнения (13).

Далее, изучены так называемые диффузионные и поли-диффузионные уравнение дробного порядка.

Пусть Δ_x- оператор Лапласа от n -переменных $x=(x_1,x_2,...x_n)\in\Omega\subset R^n$, $0<\alpha\le\gamma\le 1$

Рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка следующего вида

$$\left(\Delta_x - D_t^{\alpha,\gamma}\right)^l u(x,t) = F(x,t) \quad (16)$$

где $l = 1,2,...,$ $F(x,t)$ - заданная функция. Если $F(x,t)=0$, то уравнение (16) называется однородным поли-диффузионным (поли-калорическим) уравнением.

Рассмотрим функцию

$$T^q(t,g) = \sum_{l=p}^{q+p-1} \binom{l}{p} \frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} \Delta_x^{i-p} g(x) \quad (17)$$

Где $p = 0,1,...,$ q-полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора Δ_x в некоторой области $\Omega \subset R^n$.

Заменив в равенстве (1) индекс i на $i+p$ получим

$$T_p^q(t,g) = \sum_{l=0}^{q-1} \binom{l+p}{p} \frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)} \Delta_x^i g(x) \quad (18)$$

Если полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора Δ_x равен ∞, то получаем следующий ряд

$$T_p^\infty(t,g) = \sum_{l=0}^{\infty} \binom{l+p}{p} \frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)} \Delta_x^i g(x) \quad (19)$$

Справедливы следующие утверждение

Теорема 6. Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x конечный полилинейный порядок q Тогда функция (18) удовлетворяет условиям

$$\left(D_t^{\alpha,\gamma} - \Delta_x\right) T_0^q(t,g) = 0,\ t>0,\ x\in\Omega, \quad (20)$$

$$\left(D_t^{\alpha,\gamma} - \Delta_x\right) T_0^q(t,g) = T_{p-1}^q(t,g),\ p\ge 1. \quad (21)$$

Теорема 7. Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x бесконечный полилинейный порядок q . Тогда функция (19) удовлетворяет условиям (20) и (21).

Теорема 8. Пусть $F(x,t)=0$, функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x в $\Omega \subset R^n$ конечный или бесконечный порядок равный q. Тогда функции (18) и (19) при $p = 0,1,2,...,l-1$ удовлетворяет уравнению (16).

Рассмотрим пример.

Пример 1. Пусть $n=1, g(x)=\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$, m - натуральное число. Тогда

$$\Delta_x g(x)=\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\frac{2m\cdot(2m-1)\cdot x^{2m-2}}{(2m)!}=\frac{x^{2(m-1)}}{(2(m-1))!}$$

$$\Delta_x^i g(x)=\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\frac{x^{2(m-i)}}{(2(m-i))!}, \text{ если } i\le m$$

и

$$\Delta_x^{m+1} g(x)=\frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=0.$$

Таким образом, функция $g(x)=\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}=0$ относительно оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ имеет конечный полилинейный порядок равный $q=m+1$. В этом случае функция (18) представляется в виде

$$T_p^q(t,g)=\sum_{l=0}^{m}\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)}=\frac{x^{2(m-i)}}{(2(m-i))!}$$

АҢДАТПА

Бұл диссертациялық жұмыста диффузиялық теңдеулердің бастапқы шекаралық есептердің шешімділігі қарастырылған. Поликалориялық теңдеулердің кейбір шешу әдістері және бұл теңдеулер үшін коши есебі қарастырылған. Бастапқы шекаралық есептердің бар болу теоремалары дәлелденді. Бұл есептерді зеттеуде Фурье әдісі қолданылды. Бұл қатарлардың жинақтылығы дәлелденді. Бөлшек ретті дербес туындылы дифференциалдық теңдеулер шешімінің салу әдісі әзірленді, атап айтқанда туындының арнаулы сыныптары. Параболалық теңдеулердің фракциялық шешімдерінің аналогтары қарастырылды.

ÖZET

Analog fraksiyonel difüzyon denklemi. Bu tez denklemi subdiffusion için sınır değer problemlerinin solvability araştırdık. Bu tür denklemler için Cauchy problemi olarak kabul polikaloricheskih bazı denklemleri ve genellemeler çözmek için bir yöntem. Sınır değer problemlerinin - ilk varlık ve tekliği üzerine teoremler. Bu sorunların incelenmesi için Fourier yöntemi uygulayın. Biz elde edilen serinin yakınsaması kanıtlamak. kesir dereceden kısmi türevlerinin diferansiyel denklemlerin özel sınıfların özel çözümler oluşturmak için bir yöntem.Dahili fraksiyonel polinom çözümler benzersiz parabolik denklemler.

ABSTRACT

This thesis investigated the solvability of boundary value problems for the equation subdiffusion - analog fractional diffusion equation. A method for solving some equations and generalizations poly caloric considered the Cauchy problem for such equations. Theorems on the existence and uniqueness of the initial - boundary value problems. Apply a Fourier method for the study of these problems. We prove the convergence of the series obtained. A method for constructing particular solutions of special classes of differential equations of fractional-order partial derivatives.
Built fractional polynomial solutions unique parabolic equations.

1 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ ОСНОВНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ОБОБЩЕНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

В этой главе исследуются вопросы разрешимости основных начально краевых задач для уравнения диффузии дробного порядка. Доказываются теоремы о существования и единственности решения рассматриваемых задач.

1.1 РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть на отрезке $[0,l]$ задана некоторая функция $f(t)$. Для любого действительного числа $\alpha>0$ выражение

$$I^{\alpha} f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau)d\tau, \quad t>0$$

называется оператором интегрирования порядка α от функции $f(t)$ в смысле Римана-Лиувилля. Будем считать $I^0 f(t)=f(t)$.

Пусть заданы действительные числа α и γ удовлетворяющие условиям $m-1<\alpha\le\gamma\le m, \quad m=1,2,\ldots$. Для заданных α ,γ и функции $f(t)$ выражение

$$D^{\alpha,\gamma} f(t)=I^{\gamma-\alpha}\frac{d^m}{dt^m}I^{m-\gamma} f(t) \qquad (1.1.1)$$

называется оператором дробного дифференцирования порядка α и типа γ .
Данный оператор при $m=1$ был введен в работе [46].
Особенность данного оператора в том, что он обобщает известные операторы дробного дифференцирования. А именно, при $\alpha=\gamma$ получаем $D^{\alpha,\alpha} f(t)=\frac{d^m}{dt^m}\mathrm{I}^{m-\alpha} f(t)\equiv {}_{RL}D^{\alpha} f$ - оператор дробного дифференцирования порядка α в смысле Римана-Лиувилля. Если $\gamma=m$, то $D^{\alpha,m} f(t)=\mathrm{I}^{m-\alpha}\frac{d^m}{dt^m} f(t)\equiv {}_C D^{\alpha} f(t)$- оператор дробного дифференцирования в смысле Капуто.

Рассмотрим на отрезке $[0,l]$ следующее диффренциальное уравнения дробного порядка

$$D^{\alpha,\gamma} y(t)=\lambda y(t)+f(t), \qquad (1.1.2)$$

где λ-действительное число, $f(t)$ - заданная функция и $0<\alpha\le\gamma\le 1$.
Найдем общее решение уравнения (1.1.2).
Применим к равенству (1.1.2) с двух сторон оператор I^{α}

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t)=\lambda I^{\alpha}y(t)+I^{\alpha}f(t) \qquad (1.1.3)$$

Далее, вычислим $I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t)$. По определению операторов I^{α} и $D^{\alpha,\gamma}$ имеем

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t)=I^{\alpha}\cdot I^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t).$$

Используя полугрупповое свойство оператора интегрирования дробного порядка а именно равенство

$$I^{\alpha}\cdot I^{\gamma-\alpha}=I^{\alpha+\gamma-\alpha}=I^{\gamma}$$

получаем

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t)=I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t).$$

Исследуем функцию $I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t)$. По определению

$$I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t)\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\frac{d}{d\tau}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau.$$

Последний интеграл можно записать в виде ,

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}\frac{d}{d\tau}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{d}{dt}\int_0^t\frac{(t-\tau)^{\gamma}}{\gamma}\frac{d}{d\tau}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau.$$

Тогда интегрируя по частям последний интеграл, имеем

$$I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t)=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{d}{dt}\left[\frac{(t-\tau)^{\gamma}}{\gamma}\frac{d}{d\tau}I^{1-\gamma}y(\tau)\Big|_0^t+\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{d}{dt}\left[-\frac{t^{\gamma}}{\gamma}I^{1-\gamma}y(0)+\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau\right]=$$

$$=-\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}I^{1-\gamma}y(0)+\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{d}{dt}\int_0^t(t-\tau)^{\gamma-1}I^{1-\gamma}y(\tau)d\tau.$$

Последний интеграл по определению

$$\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\frac{d}{dt}\int_0^t (t-\tau)^{\gamma-1} I^{1-\gamma} y(\tau) d\tau = \frac{d}{dt} I^{\gamma} \cdot I^{1-\gamma} y(t).$$

Но опять же используя полугрупповое свойство оператора интегрирование дробного порядка, получаем

$$I^{\gamma} \cdot I^{1-\gamma} y(t) = Iy(t) = \int_0^t y(\tau) d\tau .$$

Так как

$$\frac{d}{dt}\int_0^t y(\tau) d\tau = y(t),$$

то для для интеграла $I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t)$ имеем

$$I^{\gamma}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}y(t) = y(t) - \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} I^{1-\gamma} y(0).$$

Так как $I^{1-\gamma}y(0)$ - постоянное , то обозначим через C т.е. $I^{1-\gamma}y(0) = C$.
Тогда интеграл $I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t)$ представляется в виде

$$I^{\alpha}\left[D^{\alpha,\gamma}y\right](t) = y(t) - \frac{c}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1}.$$

Следовательно, уравнение (1.1.2) можно записать в виде

$$y(t) = h(t) + \lambda \int_0^t \frac{(t-\tau)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} y(\tau) d\tau, \tag{1.1.4}$$

где обозначено $h(t) = I^{\alpha} f(t) + C\frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)}$.

В работе [5] доказано следующее утверждение

Лемма 1.1.1. Если $h(t) \in L_1(0,T)$, то решение уравнения (1.1.4) существует, единственно и представляется в виде

$$y(t) = h(y) + \lambda \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda (t-\tau)^{\alpha}\right) h(\tau) d\tau, \tag{1.1.5}$$

где $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{\Gamma(\alpha k+\beta)}$ - функция типа Миттаг-Леффлера.

В работе [1] доказано, что если функция $f(t)$ принадлежит классу $L_1(0,l)$, то интеграл $I^\alpha f(t)$ существует и функция $I^\alpha f(t)$ принадлежит классу $L_1(0,l)$.

В нашем случае функция $f(t)=t^{\gamma-1},\ \gamma\le 1$, принадлежит классу $L_1(0,l)$. Действительно,

$$\int_0^l t^{\gamma-1}dt=\left.\frac{t^\gamma}{\gamma}\right|_0^l=\frac{l}{\gamma}<\infty .$$

Поэтому для любого $f(t)\in L_1(0,l)$ функция $h(t)=I^\alpha f(t)+\frac{c}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}$ также принадлежит $L_1(0,T)$. Тогда по утверждению Леммы 1.1.1 уравнение (1.1.4) имеет единственное решение и это решение представима в виде (1.1.5).
Исследуем это решение для нашего случая.

Рассмотрим интегралы

$$I_1=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^\alpha\right)\tau^{\gamma-1}d\tau ,$$

$$I_2=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^\alpha\right)I^\alpha f(\tau)d\tau .$$

Вычеслим значение этих интегралов. Используя определение функции типа Миттаг-Леффлера для I_1 получаем

$$I_1=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^\alpha\right)\tau^{\gamma-1}d\tau=\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{(t-\tau)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right)\tau^{\gamma-1}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^t (t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1}\tau^{\gamma-1}d\tau=[\tau=t\xi]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{\alpha k+\alpha-1}\xi^{\gamma-1}d\xi\cdot t^{\alpha+\gamma-1+\alpha k}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\cdot\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha)\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\gamma)}\cdot t^{\alpha k+\alpha+\gamma-1}=$$

$$=\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\gamma)}=\Gamma(\gamma)t^{\alpha+\gamma-1}E_{\alpha,\gamma+\alpha}\left(\lambda t^\alpha\right).$$

Таким образом, для интеграла I_1 получили следующее выражение

$$I_1 = \Gamma(\gamma) t^{\alpha+\gamma-1} E_{\alpha,\alpha+\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right).$$

Для этого интеграла можно получит и другое представление.

А именно

$$I_1 = \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha k+\alpha}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+\gamma)} = \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \frac{t^{\alpha(k+1)}}{\Gamma(\alpha(k+1)+\gamma)} = [k+1=i]$$

$$= \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i-1} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} = \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^{\infty} \lambda^{i} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} =$$

$$= \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \frac{1}{\lambda} \left[\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^{i} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \right] = \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \frac{1}{\lambda} \left[E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \right].$$

Следовательно, верно равенство

$$I_1 = \Gamma(\gamma) t^{\gamma-1} \frac{1}{\lambda} \left[E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right) - \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \right] \tag{1.1.6}$$

Далее, для интеграла I_2 получаем

$$I_2 = \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E\alpha,\alpha(\lambda(t-\tau)^{\alpha})) \int_0^{\tau} \frac{(\tau-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} f(s)\, ds\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{\Gamma(\alpha i+\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} \int_0^{\tau} (\tau-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)} \int_0^t f(s) \int_s^t (t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} (\tau-s)^{\alpha-1}\, d\tau\, ds .$$

В последнем выражении исследуем внутренний интеграл.После замены переменных $\tau = (t-s)\xi + s$

этот интеграл можно привести к виду

$$\int_s^t (t-\tau)^{\alpha k+\alpha-1} (\tau-s)^{\alpha-1}\, d\tau = \int_0^1 (1-\xi)^{\alpha k+\alpha-1} \xi^{\alpha-1} d\xi\, (t-s)^{\alpha k+2\alpha-1} = (t-s)^{\alpha k+2\alpha-1} \frac{\Gamma(\alpha k+\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha k+2\alpha)}$$

Тогда

$$I_2=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+2\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha k+2\alpha-1} f(s)ds=\int_0^t (t-s)^{2\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k \frac{(t-s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+2\alpha)}\right)f(s)ds=$$

$$=\int_0^t (t-s)^{2\alpha-1} E_{\alpha,2\alpha}\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds\,.$$

Используя свойства функции $E_{\alpha,2\alpha}$ интеграл I_2 можно привести к виду

$$I_2=\frac{1}{\lambda}\left[\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds-\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)ds\right].$$

Отсюда для $\lambda\cdot I_2$ получаем

$$\lambda\cdot I_2=\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds-I^{\alpha}f(t). \tag{1.1.7}$$

Далее,так как в нашем случае в равенстве $(1.1.5)$ функция $h(t)$ имеет вид

$$h(\tau)=I^2 f+\frac{c}{\Gamma(\alpha)}\Gamma^{\alpha-1},$$

то из равенств $(1.1.6)$ и $(1.1.7)$ следует

$$\lambda\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)h(\tau)d\tau=\frac{\lambda C}{\Gamma(\gamma)}I_1+\lambda I_2=$$

$$=Ct^{\gamma-1}\left[E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)-\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right]+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau-I^{\alpha}f(t).$$

Подставляя полученные выражения в правый часть равенства $(1.1.5)$ имеет

$$y(t)=\frac{C}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+I^{\alpha}f(t)+Ct^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)-\frac{C}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+$$

$$+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau-I^{\alpha}f(t)=$$

$$= Ct^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau .$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Лемма 1.1.2. Для любого $f(t)\in L_1(0,l)$ общее решение уравнение (1.1.2) имеет вид

$$y(t) = Ct^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau , \qquad (1.1.8)$$

где C - произвольная постоянная.

Из Леммы 1.1.2 вытекает:

Следствие 1.1.1.

1) Если в уравнении (1.1.2) $\lambda = 0$, то

$$y(t) = \frac{C}{\Gamma(\gamma)}t^{\gamma-1}+I^{\alpha}f(t) \;;$$

2) Если в уравнении (1.1.2) $f(t)=0$, то

$$y(t) = Ct^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right).$$

Теперь рассмотрим постановку задачи Коши для уравнения (1.1.2). Здесь возможно два вида постановки задачи Коши:

Так как функция $t^{\gamma-1}$ имеет особенность в точке $t=0$, то условие Коши нужно задавать в виде

$$t^{1-\gamma}y(t)\Big|_{t=0} = a,$$

или

$$I^{1-\gamma}y(t)\Big|_{t=0} = a .$$

Мы рассмотрим второй вариант, а именно

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}y(t) = \lambda y(t)+f(t) \\ I^{1-\gamma}y(t)\Big|_{t=0} = a \end{cases} \qquad (1.1.9)$$

Справедливо утверждение

Лемма 1.1.3. Для любого $f(t)\in L_1(0,l)$ решение задачи Коши (1.1.9) существует, единственно и имеет вид

$$y(t)=at^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\int_0^t (t-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda (t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds$$

Доказательство. По Лемме 1.1.2 общее решение уравнение (1.1.2) имеет вид (1.1.8) . Вычислим интеграл $I^{1-\gamma}y(t)$.

По определению

$$I^{\gamma-1}\left[Ct^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\right]=\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\tau^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)d\tau=$$

$$=\frac{C}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\tau^{\gamma-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{\tau^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}\right)d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C\lambda^k}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha k+\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\tau^{\gamma-1+\alpha k}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C\lambda^k}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha k+\gamma)}\int_0^1 (1-\xi)^{-\gamma}\xi^{\alpha k+\gamma-1}d\xi\cdot t^{\alpha k}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C\lambda^k}{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha k+\gamma)}\cdot\frac{\Gamma(1-\gamma)\Gamma(\alpha k+\gamma)}{\Gamma(\alpha k+1)}t^{\alpha k}=C\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}=C\,E_{\alpha,1}\left(\lambda t^{\alpha}\right).$$

Аналогично,

$$I^{1-\gamma}\left[\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda (t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau\right]=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t (t-\tau)^{-\gamma}\int_0^{\tau}(\tau-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\tau-s)^{\alpha}\right)f(s)dsd\tau=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(1-\gamma)}\int_0^t f(s)\int_s^{\tau}(t-\tau)^{-\gamma}(\tau-s)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(\tau-s)^{\alpha}\right)d\tau ds\,.$$

Исследуем внутренний интеграл. Имеем

$$\int_s^{\tau}(t-\tau)^{-\gamma}(\tau-s)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{(t-s)^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\right)d\tau=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_s^{\tau}(t-\tau)^{-\gamma}(\tau-s)^{\alpha k+\alpha-1}d\tau=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\int_0^1 (1-\xi)^{-\gamma}\xi^{\alpha k+\alpha-1}d\xi\,(t-s)^{\alpha k+\alpha-\gamma}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{\Gamma(\alpha k+\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha k+\alpha)\Gamma(1-\gamma)}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1-\gamma)}(t-s)^{\alpha k+\alpha-\gamma}=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k\frac{(t-s)^{\alpha k+\alpha-\gamma}}{\Gamma(\alpha k+\alpha+1-\gamma)}(t-s)^{\alpha-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right).$$

Отсюда

$$I^{1-\gamma}\left[\int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1}E_{\alpha,\alpha}\left(\lambda(t-\tau)^{\alpha}\right)f(\tau)d\tau\right]=\int_0^t (t-s)^{\alpha-\gamma}E_{\alpha,\alpha-\gamma}\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds.$$

Тогда

$$I^{1-\gamma}y(t)=CE_{\alpha,1}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\int_0^t (t-s)^{\alpha-\gamma}E\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds.$$

Следовательно,

$$a=I^{1-\gamma}y(t)\Big|_{t=0}=C\cdot 1+0$$

т.е $C=a$.
Значит, решение задачи Коши имеет вид

$$y(t)=at^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)+\int_0^t (t-s)^{\alpha-\gamma}E\left(\lambda(t-s)^{\alpha}\right)f(s)ds$$

Лемма доказана.

Следствие 1.1.2. Если в задаче Коши (1.1.9) $f(t)=0$, то решение имеет вид

$$y(t)=at^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right) \qquad (1.1.10)$$

Рассмотрим теперь задачу Коши второго типа

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}y(t)=\lambda y(t) \\ t^{1-\gamma}\cdot y(t)\Big|_{t=0}=a \end{cases} \qquad (1.1.11)$$

Так как в этом случае общее решение имеет вид

$$y(t)=at^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right),$$

то

$$t^{1-\gamma}\cdot y(t)\Big|_{t=0}=C\cdot E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right)\Big|_{t=0}=C\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{k}\frac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+\gamma)}\Bigg|_{t=0}=\frac{C}{\Gamma(\gamma)}\Bigg|_{t=0}=a\,.$$

Отсюда $C=a\cdot\Gamma(\gamma)$ т.е. решение задачи Коши (1.1.11) имеет вид

$$y(t)=a\Gamma(\gamma)\cdot t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(\lambda t^{\alpha}\right). \tag{1.1.12}$$

1.2 НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С УСЛОВИЕМ ДИРИХЛЕ

Пусть $0<\alpha\le\gamma\le1$.

Рассмотрим в области $\Omega=\{(x,t):\,0<x<l,0<t<T\}$ следующую задачу

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{1.2.1}$$

$$I^{1-\gamma}\,u(x,t)\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \ 0\le x\le1, \tag{1.2.2}$$

$$u(0,t)=0,\ u(1,t)=0,\ \ 0<t\le T\,. \tag{1.2.3}$$

Здесь $D_t^{\alpha,\gamma}u$ означает , что оператор $D^{\alpha,\gamma}$ действует к функции $u(x,t)$ по переменной t.

Решением задачи (1.2.1) - (1.2.3) назовём функцию $u(x,t)$ для которой

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)\in C(\Omega),\ D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega),$$

$I^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\overline{\Omega}),\,u(x,t)$ непрерывна в области $\overline{\Omega}\setminus\{t=0\}$ и удовлетворяшая условием (1.2.1) - (1.2.3) в классическом стиле.

Таким образом, решению задачи (1.2.1) - (1.2.3) допускает разрыв на линии $t=0$.

Решение задачи (1.2.1) - (1.2.3) имеем методом разделение переменных т.е решение имеем в виде

$$u(x,t)=X(x)\cdot T(t) \tag{1.2.4}$$

Подставляя функцию (1.2.4) в уравнение (1.2.1) находим

$$X(x)\cdot T^{\alpha,\gamma}(t)=X''(x)\cdot T(t)\,.$$

Отсюда получаем равенство

$$\frac{T^{\alpha,\gamma}(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)} \tag{1.2.5}$$

Так как переменные t и x не зависят друг от друга, то равенство (1.2.5) возможные только когда оно постоянное, т.е

$$\frac{T^{\alpha,\gamma}(t)}{T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda\,.$$

Отсюда для неизвестных функций $X(x)$ и $T(t)$ получаем следующее уравнения

$$-X''(x)=\lambda X(x),\ T^{\alpha,\gamma}(t)=-\lambda T(t).$$

Далее, используя граничные условия (1.2.3) для функции $X(x)$ получаем следующее дополнительные условия

$$u(0,t)=X(0)\cdot T(t)=0,\ u(1,t)=X(1)\cdot T(t)=0$$

т.е.

$$X(0)=0,\ X(1)=0.$$

Таким образом, для функции $X(x)$ получаем спектральную задачу:

$$\begin{cases} -X(x)=\lambda X(x),\ 0<x<1 \\ X(0)=X(1)=0. \end{cases} \tag{1.2.6}$$

Собственными значениями задачи (1.2.6) являются числа $\lambda_k=(k\pi)^2$, $k=1,2,...,$ а соответствующими собственными функциями являются функции $X_k(x)=\sin k\pi x,\ \ k=1,2,,...$.

Так как

$$(X_k,X_k)=\int_0^1(\sin k\pi x)^2\,dx=\int_0^1\frac{1-\cos 2k\pi x}{2}dx=\frac{1}{2}\left[x-\frac{\sin 2k\pi x}{2k\pi}\right]\Bigg|_0^1=\frac{1}{2},$$

то

$$\|X_k\|^2 = \|\sin k\pi x\|^2 = \frac{1}{2}.$$

Если необходимо рассмотреть нормированную систему собственных функций, то необходимо рассмотреть систему

$$X_k(x) = \frac{\sin k\pi x}{\|\sin k\pi x\|} = \sqrt{2}\sin k\pi x$$

В дальнейщем будем считать

$$X_k(x) = \sin k\pi x, \quad k = 1, 2, , ... \tag{1.2.7}$$

Система (1.2.7) образует полную ортонормированную систему пространства $L_2(0,1)$.

Любую функцию из класса $L_2(0,1)$ можно сходящийся в $L_2(0,1)$ ряд. В частности искомую функцию $u(x,t)$ при каждом $t \geq 0$ можно разложить в ряд вида

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) X_k(x), \tag{1.2.8}$$

где $u_k(t)$ - неизвестные коэффициенты разложения (1.2.8).

Подставляя в ряд (1.2.8) в уравнения (1.2.1) с учетом равенств

$$u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(t) \cdot X_k''(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k u_k(t) \cdot X_k(x),$$

$$D_t^{\alpha,\gamma} u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} D_t^{\alpha,\gamma} u_k(t) X_k(x) \ ,$$

получаем

$$D_t^{\alpha,\gamma} u(x,t) - u_{xx}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[D_t^{\alpha,\gamma} u_k(t) - \lambda_k u_k(t) \right] X_k(x) = 0, \quad (x,t) \in \Omega$$

Так как $X_k(x) \not\equiv 0$, то отсюда при всех $k = 1, 2, \ldots,$ получаем

$$D_t^{\alpha,\gamma} u_k(t) = \lambda_k u_k(t) \tag{1.2.9}$$

Предположим, что начальная функция $\varphi(x)$ из условия (1.2.2) также принадлежит классу $L_2(0,1)$. Тогда оно разлагается в ряд Фурье то система $X_k(x)$ т.е.

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot X_k(x), \tag{1.2.10}$$

где коэффиценты φ_k определяются из равенства

$$\varphi_k=(\varphi,X_k)=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin k\pi x dx$$

Тогда из условия $(1.2.2)$ т.е

$$I^{1-\gamma}u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

Имеем

$$I^{1-\gamma}u(x,t)\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}I^{1-\gamma}u_k(t)\cdot X_k(x)\Big|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}I^{1-\gamma}[u_k](0)\cdot X_k(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot X_k(x)$$

Следовательно,

$$I^{1-\gamma}[u_k](0)=\varphi_k,\ k=1,2,\ldots$$

Тогда для неизвестных коэффицентов $u_k(t)$ получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases}D^{\alpha,\gamma}u_k(t)=\lambda_k u_k(t)\\ I^{1-\gamma}[u_k](0)=\varphi_k,\ k=1,2,\ldots\end{cases} \tag{1.2.11}$$

В силу утверждения Следствия 1.1.2 из Леммы 1.1.3, решение задачи Коши $(1.2.11)$ имеет вид

$$u_k(t)=\varphi_k t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right). \tag{1.2.12}$$

Таким образом,мы нашли формальное решение задачи $(1.2.1)-(1.2.3)$,которое представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k\cdot t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)X_k(x). \qquad (1.2.13)$$

Для того чтобы функция $(1.2.13)$ была действительно решением задачи $(1.2.1)-(1.2.3)$ нам необходимо показать,что данная функция обладает соответствуюшую гладкость.

Для этого сперва мы оценим ряд в правой части равенства$(1.2.13)$.
Известно,что функция типа Миттаг-Леффлера при всех $t\geq 0$ оценивается следующим образом (см,например [1].)

$$\left|E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)\right|\leq\frac{1}{1+\left|\lambda_k t^{\alpha}\right|}.$$

В частности отсюда следует,что она ограничена при $t\geq 0$. Представим функцию (1.2.13) в виде

$$u(x,t)=t^{\gamma-1}u(x,t),$$

где $u(x,t)$ представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)X_k(x).$$

Очевидно, что для всех $0\leq x\leq 1,\ t\geq 0$ имеет место оценка

$$\left|u(x,t)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|\left|E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)\right|\left|X_k(x)\right|\leq\sum_{k=1}^{\infty}|\varphi_k|.$$

Оценим коэффиценты φ_k
По определению

$$\varphi_k=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\sin k\pi x dx.$$

Предположим, что функция $\varphi(x)$ имеет производную и $\varphi(0)=\varphi(1)=0$.Тогда

$$\varphi_k=\sqrt{2}\int_0^1\varphi(x)\frac{d\cos k\pi x}{(-k\pi)}=-\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\varphi(x)\cos k\pi x\Big|_0^1+\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\int_0^1\varphi'(x)\cos k\pi x dx=\frac{\sqrt{2}}{k\pi}\varphi_k',$$

где $\varphi_k'=\left(\varphi',\cos k\pi x\right)$

Если для функции $\varphi(x)$ существует и вторая производная,то

$$\left(\varphi',\cos k\pi x\right)=\int_0^1\varphi'(x)\cos k\pi x dx=\int_0^1\varphi'(x)\,d\frac{\sin k\pi x}{k\pi}=\varphi'(x)\cdot\frac{\sin k\pi x}{k\pi}\Big|_0^1-$$

$$-\int_0^1\varphi''(x)\frac{\sin k\pi x}{k\pi}dx=-\frac{1}{k\pi}\left(\varphi'',\sin k\pi x\right).$$

Отсюда для φ_k, $k=1,2,\ldots$,имеем

$$\varphi_k=-\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{1}{k^2}\left(\varphi'',X_k\right).$$

Если φ''-интегрируя функция, то

$$\left|\varphi_k\right|\le C\cdot\frac{1}{k^2},$$

где C -постоянное , котороя не зависит от k .

Тогда при всех $x\in(0,1)$ ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|$ сходится. Отсюда получаем, что ряд представляющий функцию $v(x,t)$ абсолютно и равномерно сходится. Значит, функция непрерывна в замкнутой области $\bar{\Omega}$.
Тогда функция $u(x,t)=t^{\gamma-1}v(x,t)$ является непрерывной в области $\bar{\Omega}\setminus\{0\}$.
Кроме того, $I^{1-\gamma}u(x,t)=v(x,t)$ и поэтому получаем включение $I^{1-\gamma}u(x,t)\in C\left(\bar{\Omega}\right)$.
Далее, исследуем гладкость функций $u_{xx}(x,t)$ и $D^{\alpha,\gamma}u(x,t)$.

Применяя к ряду (1.2.13) оператор дифференцирования $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ имеем

$$u_{xx}(x,t)=-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)X_k(x) \qquad (1.2.14)$$

В этом случае используем следующую оценку функции $E_{\alpha,\beta}(z)$ (см.например [1])

$$\left|E_{\alpha,\beta}(z)\right|\approx\frac{1}{\left|\lambda_k\right|t^{\alpha}}\,, \qquad k\to\infty$$

Тогда существует некоторое число $t_0>0$, такое что для всех $t\ge t_0>0$ имеет место оценка

$$\left|u_{xx}(x,t)\right| \le \sum_{k=1}^{\infty}\left|\lambda_k\right|\left|\varphi_k\right|t^{\gamma-1}\left|E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)\right|\left|X_k\right| \le t_0^{\alpha+\gamma-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right| < \infty,$$

т.е ряд (1.2.14) представляющий функцию $u_{xx}(x,t)$ можарируется сходящим рядом $\sum_{k=1}^{\infty}\left|\varphi_k\right|$. Тогда ряд (1.2.14) в произвольной области $\Omega_0 \subset \Omega$, $\Omega_0 = \{t \ge t_0,\ 0 \le x \le 1\}$ равномерно и абсалютно сходится и поэтому его сумме т.е. функция $u_{xx}(x,t)$ является непрерывной в области $\{t \ge t_0,\ 0 \le x \le 1\}$, а следовательно и в области Ω .

Так как

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k\varphi_k t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)X_k(x),$$

то непрерывность функции $D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)$ показовается аналогичным образом. Сформируем оснавные утверждение относительно задачи (1.2.1)-(1.2.3).

Теорема 1.2.1. Пусть $0 < \alpha \le \gamma \le 1,\ \varphi(x) \in C^2[0,1]$ и выполняются условие $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Тогда решение задачи (1.2.1)-(1.2.3) существует единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t) = \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\varphi_k \cdot t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda k t^{\alpha}\right)\sin k\pi x,$$

где $\lambda_k = (k\pi)^2, \varphi_k = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin k\pi x dx$.

Для полного докозательство теоремы остается показать единственность решения. Предположим, что существуют два решение задачи (1.2.1)-(1.2.3). Обозначим их $u_1(x,t)$ и $u_2(x,t)$. Тогда разность этих функций

$$u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t),$$

удовлетворяет однородним условием.
Обозначим

$$u_k(t) = \int_0^1 u(x,t)X_k(x)dx \tag{1.2.15}$$

Тогда применяя к этой функции оператор $D^{\alpha,\gamma}$ и учитовая что $u(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.2.1), получим

$$D^{\alpha,\gamma}u_k(t)=\int_0^1 D^{\alpha,\gamma}u(x,t)X_k(x)dx=\int_0^1 u_{xx}(x,t)X_k(x)dx.$$

Далее учитывае, что $u(0,t)=u(1,t)=0,\ X_k(0)=X_k(1)=0$ для всех $t\geq 0$, и производя двухкратное интегрирования по частям, получим

$$\int_0^t u_{xx}(x,t)X_k(x)dx=u_x(x,t)\cdot X_k(x)\Big|_{x=0}^{x=1}-u(x,t)\cdot X_k(x)\Big|_{x=0}^{x=1}+\int_0^1 u(x,t)X_k''(x)dx=$$

$$=-\lambda_k\int_0^1 u(x,t)X_k(x)dx=-\lambda_k u_k(t).$$

Таким образом, функция $u_k(t)$ является решением уравнения

$$D^{\alpha,\gamma}u_k(t)=-\lambda_k u_k(t). \tag{1.2.16}$$

Кроме того, применяя к функции (1.2.15) оператор $I^{1-\gamma}$ и из справидливости соотношения
$I^{1-\gamma}u(x,t)\big|_{t=0}=0$ получаем, что

$$I^{1-\gamma}u_k(t)\big|_{t=0}=\int_0^t I^{1-\gamma}u(x,t)\big|_{t=0}X_k(x)dx=0,$$

т.е

$$I^{1-\gamma}u_k(t)\big|_{t=0}=0 \tag{1.2.17}$$

Но силу утверждения Лемма 1.1.3. решение задачи Коши (1.2.16), (1.2.17) единственно и поэтому $u_k(t)\equiv 0$.Тогда из полного системы $X_k(x)$ вытекает, что $u(x,t)=0,\ (x,t)\in\bar{\Omega}$.
Теорема доказано.

1.3 НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ УСЛОВИЯМИ

В этом параграфе в области $\Omega=\{(x,t):0<x<l,0<t<T\}$ рассмотрим следующую задачу

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t),\ \ (x,t)\in\Omega, \tag{1.3.1}$$

$$t^{1-\gamma}\cdot u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x),\ 0\le x\le 1, \tag{1.3.2}$$

$$u(0,t)=u(1,t),\ u_x(0,t)=u_x(1,t),\ 0<t\le T. \tag{1.3.3}$$

Решением задачи (1.3.1)-(1.3.3) назовём функцию $u(x,t)$ для которой $u_{xx}(x,t)\in C(\Omega)$, $D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$, $t^{1-\gamma}\cdot u(x,t)\in C(\bar{\Omega})$, $u(x,t)$ и $u_x(x,t)$ непрерывна в области $\bar{\Omega}\backslash\{t=0\}$ и удовлетворяющая условиям (1.3.1)-(1.3.3) в классическом смысле.

Применяя метод разделение переменных приходим к спектральной задаче вида

$$\begin{cases} -X''(x)=\lambda X(x),\ 0<x<1, \\ X(0)=X(1),\ X'(0)=X'(1) \end{cases}. \tag{1.3.4}$$

Если $\lambda=0$, то любая функция вида $X(x)=C_1x+C_2$, C_1,C_2 -постоянные удовлетворяет уравнению из задачи (1.3.4).

Подставляя в граничные условия получаем

$$X(0)=X(1)\Leftrightarrow C_2=C_1+C_2\Rightarrow C_1=0,$$

$X'(0)=X'(1)\Leftrightarrow 0=0\Rightarrow C_2$-произвольная постоянная.

Следовательно, $\lambda_0=0$ является собственным значением задачи (1.3.4), а соответствующая нормированной функцией является $X_0(x)=1$.

Далее, при $\lambda>0$ общее решение уравнения имеет вид

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}x+C_2\sin\sqrt{\lambda}x.$$

Подставляя эту функцию в граничные условия задачи имеем

$$X(0)=X(1)\Rightarrow C_1=C_1\cos\sqrt{\lambda}+C_2\sin\sqrt{\lambda},$$

$$X'(0)=X'(1)\Rightarrow C_2\sqrt{\lambda}=-C_1\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}+C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}.$$

Таким образом, для коэффициентов C_1 и C_2 получаем систему

$$\begin{cases} (1-\cos\mu)C_1-C_2\sin\mu=0 \\ \mu\sin\mu C_1+C_2\mu(1-\cos\mu)=0 \end{cases} \tag{1.3.5}$$

где $\mu=\sqrt{\lambda}$.

Определитель этой системы имеет вид

$$\Delta(\mu)=\begin{vmatrix}1-\cos\mu & -\sin\mu\\ \mu\sin\mu & \mu(1-\cos\mu)\end{vmatrix}=$$

$$=\mu(1-\cos\mu)^2+\mu\sin^2\mu=\mu\left(1-2\cos\mu+\cos^2\mu+\sin^2\mu\right)=2\mu(1-\cos\mu).$$

Очевидно, что при $\lambda\neq 0\Leftrightarrow\mu\neq 0$ $\Delta(\mu)=0$ тогда и только тогда, когда $1-\cos\mu=0$. Отсюда

$$\mu=2k\pi,\ \ k=1,2,...$$

т.е.

$$\lambda_k=(2k\pi)^2,\ k=1,2,...$$

являются собственными значениями задачи (1.3.5), о соответствующие собственными функции

$$X_k(x)=C_1\cos 2k\pi x, X_k(x)=C_2\sin 2k\pi x.$$

После нормировки, получаем

$$X_{k,1}(x)=\sqrt{2}\cos 2k\pi x, X_{k,2}(x)=\sqrt{2}\sin 2k\pi x.$$

Система собственных функций

$$\left\{X_0(x), X_{k,1}(x), X_{k,2}(x)\right\}. \tag{1.3.6}$$

Ортонормированный базис пространства $L_2(0,1)$. Следовательно любое регулярное решение задачи (1.3.1)-(1.3.3) представляется в виде ряда

$$u(x,t)=u_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{k,1}(t)X_{k,1}(x)+u_{k,2}(t)X_{k,2}(x)\right]. \tag{1.3.7}$$

где $u_0,u_{k,1},u_{k,2}$ -неизвестные коэффициенты.

Предполагая, что функция $\varphi(x)$ является гладкой разложим ее в ряд Фурье по системе (1.3.6)

$$\varphi(x)=\varphi_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\varphi_{k,1}\cdot X_{k,1}(x)+\varphi_{k,2}\cdot X_{k,2}(x)\right],$$

где

$$\varphi_0 = (\varphi, X_0),\ \varphi_{k,1} = (\varphi, X_{k,1}),\ \varphi_{k,2} = (\varphi, X_{k,2}),\quad k = 1,2,\dots\ .$$

Умножив равенство (1.3.7) с двух сторон на функции $X_0(0), X_{m,1}(x), X_{m,2}(x)$ и проинтегрировав по x на отрезке $[0,1]$ получаем:

$$1)\int_0^1 u(x,t)\cdot X_0(x)dx = u_0(t)\int_0^1 X_0(x)\,dx +$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{k,1}(t)\int_0^1 X_{k,1}(x)\cdot X_0(x)\,dx + u_{k,2}(t)\int_0^1 X_{k,2}(x)X_0(x)\,dx\right].$$

Так как

$$\int_0^1 X_{k,1}(x)\cdot X_0(x)\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \cos 2k\pi x dx = -\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\sin 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} = 0$$

$$\int_0^1 X_{k,2}(x)\cdot X_0(x)\,dx = \sqrt{2}\int_0^1 \sin 2k\pi x dx = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\cos 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}[1-1] = 0,$$

$$\int_0^1 X_0(x)\,dx = \int_0^1 dx = 1,$$

то

$$u_0(t) = \int_0^1 u(x,t)dx\ . \qquad (1.3.8)$$

Аналогично, показываем

$$\int_0^1 u(x,t)X_{k,1}(x)\,dx = u_{k,1}(t), \qquad (1.3.9)$$

$$\int_0^1 u(x,t)X_{k,2}(x)\,dx = u_{k,2}(t) \qquad (1.3.10)$$

Применяем к равенству (1.3.8) оператор $D^{\alpha,\gamma}$ и с учетом равенства $D^{\alpha,\gamma}u = u_{xx}$ имеем

$$D^{\alpha,\gamma}u_0\left(t\right)=\int_0^1 D_t^{\alpha,\gamma}u\left(x,t\right)dx=\int_0^1 u_{xx}\left(x,t\right)dx=u_x\left(0,t\right)-u_x\left(1,t\right)$$

Так как по условию задачи $u_x\left(0,t\right)=u_x\left(1,t\right)$, то $D^{\alpha,\gamma}u_0\left(t\right)=0$.

Далее,

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}\cdot u_0\left(t\right)=\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}\int_0^1 u\left(x,t\right)dx=\int_0^1 \lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}u\left(x,t\right)dx=\int_0^1 \varphi dx=\varphi_0 .$$

Тогда для неизвестных функции $u_0\left(t\right)$ получаем задачу Коши

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u_0\left(t\right)=0 \\ I^{1-\gamma}u_0\left(t\right)=\varphi_0. \end{cases} \tag{1.3.11}$$

В силу равенства (1.1.12) решение задачи (1.3.11) имеет вид

$$u_0\left(t\right)=\Gamma\left(\gamma\right)\cdot\varphi_0\cdot t^{\gamma-1} . \tag{1.3.12}$$

Находим уравнение которым удовлетворяет функция $u_{k,1}\left(t\right)$. Для этого применяем оператор $D^{\alpha,\gamma}$ к равенству (1.3.9):

$$D^{\alpha,\gamma}u_{k,1}\left(t\right)=\int_0^1 D^{\alpha,\gamma}u\left(x,t\right)X_{k,1}\left(x\right)dx=\int_0^1 u_{xx}\left(x,t\right)X_{k,1}\left(x\right)dx=\sqrt{2}\int_0^1 u_{xx}\left(x,t\right)\cos 2k\pi x dx=$$

$$=\sqrt{2}\cos 2k\pi x\cdot u_x\left(x,t\right)\Big|_{x=0}^{x=1}+\sqrt{2}\left(2k\pi\right)\int_0^1 \sin 2k\pi x\cdot u_x\left(x,t\right)dx=$$

$$=\sqrt{2}\left[u_x\left(1,t\right)-u_x\left(0,t\right)\right]+\sqrt{2}\left(2k\pi\right)\sin 2k\pi x\cdot u\left(x,t\right)\Big|_{x=0}^{x=1}-\sqrt{2}\left(2k\pi\right)^2\int_0^1 \cos 2k\pi x\cdot u\left(x,t\right)dx=$$

$$=-\left(2k\pi\right)^2\int_0^1 \sqrt{2}\cos 2k\pi x\cdot u\left(x,t\right)dx=-\left(2k\pi\right)^2 u_{k,1}\left(t\right).$$

Кроме того

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}\cdot u_{k,1}\left(t\right)=\int_0^1 \lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}u\left(x,t\right)X_{k,1}\left(x\right)dx=\int_0^1 \varphi\left(x\right)\cdot X_{k,1}\left(x\right)dx=\varphi_{k,1} .$$

Таким образом, для неизвестных функций $u_{k,1}\left(t\right)$ получаем следующую задачу Коши

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u_{k,1}(t) = -(2k\pi)^2 u_{k,1}(t) \\ t^{1-\gamma} u_{k,1}(t)\big|_{t=0} = \varphi_{k,1},\ k = 1,2,\ldots \end{cases}. \tag{1.3.13}$$

В силу равенства (1.1.12) решение задачи (1.3.13) является следующая функция

$$u_{k,1}(t) = \varphi_{k,1}\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2 t^{\alpha}\right). \tag{1.3.14}$$

Далее, применяя к равенству (1.3.10) оператор $D^{\alpha,\gamma}$ с учетом уравнения (1.3.1) и начального условия (1.3.2) для функции $u_{k,2}(t)$ получаем следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} D^{\alpha,\gamma}u_{k,2}(t) = -(2k\pi)^2 u_{k,2}(t) \\ t^{1-\gamma} u_{k,2}(t)\big|_{t=0} = \varphi_{k,2} \end{cases} \tag{1.3.15}$$

Опять же используя равенство (1.1.12) находим решение задачи (1.3.15) в виде

$$u_{k,2}(t) = \varphi_{k,2}\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2 t^{\alpha}\right) \tag{1.3.16}$$

Таким образом, все неизвестные коэффициенты в представлении (1.3.7) найдены и поэтому формальное решение задачи (1.3.1)-(1.3.3) имеет вид

$$u(x,t) = u_0(t) + \sqrt{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left[u_{k,1}\cos 2k\pi x + u_{k,2}\sin 2k\pi x\right]. \tag{1.3.17}$$

где $u_0, u_{k,1}(t)$ и $u_{k,2}(t)$ определяются равенствами (1.3.12), (1.3.14) и (1.3.16).
Теперь исследуем гладкость функции $u(x,t)$ и равенства (1.3.17). Для этого оценим коэффициенты $u_{k,1}(t)$ и $u_{k,2}(t)$.
Для $u_{k,1}(t)$ имеем

$$\left|u_{k,1}(t)\right| \le \Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2 t^{\alpha}\right)\left|\varphi_k\right|.$$

Так как

$$\varphi_{k,1} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\cos 2k\pi x dx = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\frac{d\sin 2k\pi x}{2k\pi} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\varphi(x)}{2k\pi}\sin 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 \varphi'(x)\sin 2k\pi x dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 \varphi'(x)\frac{d\cos 2k\pi x}{-2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\varphi'(x)\cos 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} - \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \varphi''(x)\cos 2k\pi x dx =$$

$$= -\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\left[\varphi'(1)-\varphi'(0)\right] - \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \varphi''(x)\cos 2k\pi x dx$$

Отсюда, если $\varphi'(1)=\varphi'(0)$, то

$$\varphi_{k,1} = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \varphi''(x)\cos 2k\pi x dx$$

Следовательно, если $\varphi''(x)$-ограничена, то для $\varphi_{k,1}$ получаем оценку

$$\left|\varphi_{k,1}\right| \le C\cdot\frac{1}{k^2}, \; C \text{ -постоянная.} \tag{1.3.18}$$

Аналогично, получаем оценку для $\varphi_{k,2}$.
Действительно, если потребуем выполнение условия $\varphi(0)=\varphi(1)$,то

$$\varphi_{k,2} = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin 2k\pi x dx = -\sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\frac{d\cos 2k\pi x}{2k\pi} =,$$

$$= \frac{-\sqrt{2}\varphi(x)}{2k\pi}\cos 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 \varphi'(x)\cos 2k\pi x dx =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2k\pi}\int_0^1 \varphi'(x)\frac{d\sin 2k\pi x}{2k\pi} = \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\varphi'(x)\sin 2k\pi x\Big|_{x=0}^{x=1} -$$

$$- \frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \varphi''(x)\sin 2k\pi x dx = -\frac{\sqrt{2}}{(2k\pi)^2}\int_0^1 \varphi''(x)\sin 2k\pi x dx.$$

Отсюда для ограниченных функций $\varphi''(x)$ имеем

$$\left|\varphi_{k,2}\right| \le C\cdot\frac{1}{k^2} \tag{1.3.19}$$

Так как $\left|E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2 t^\alpha\right)\right| \le C$ при $t \ge 0$, то оценки (1.3.18) и (1.3.19) для функции $t^{1-\gamma}u(x,t)$ получаем следующую оценку

$$\left|t^{1-\gamma}u(x,t)\right| \le C\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|\varphi_{k,1}\right|+\left|\varphi_{k,2}\right|\right] \le C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

т.е. ряд (1.3.17) умноженный на $t^{1-\gamma}$ сходится абсолютно и равномерно на области $\overline{\Omega}$ и поэтому его сумма представляет непрерывную функцию в области $\overline{\Omega}$ т.е. $t^{1-\gamma}u(x,t)\in C(\overline{\Omega})$.

При $k\to\infty$ для функции $E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)$ справедливо оценка

$$E_{\alpha,\gamma}\left(-\lambda_k t^{\alpha}\right)\approx\frac{1}{\lambda_k t_0^{\alpha}},\ t_0>0$$

Тогда ряды получаемые для функций $u_x(x,t)$, $u_{xx}(x,t)$ и $D^{\alpha,\gamma}u(x,t)$ при $t\ge t_0>0$, $x\in[0,1]$ также оцениваются рядом в виде

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left|\varphi_{k,1}\right|+\left|\varphi_{k,2}\right|\right]$$

и поэтому справедливы включения

$$u_x(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\setminus\{t=0\}\right),\ u_{xx}\in C(\Omega),$$

$$D^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega).$$

Теперь можно сформулировать основное утверждение относительно задачи (1.3.1)-(1.3.3).

Теорема 1.3.1. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le1$, функция $\varphi(x)\in C^2[0,1]$ и удовлетворяет условием $\varphi(0)=\varphi(1)$, $\varphi'(0)=\varphi'(1)$.

Тогда решение задачи (1.3.1)-(1.3.3) существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}\int_0^1\varphi(x)\,dx+$$

$$+\sqrt{2}\Gamma(\gamma)t^{\gamma-1}\sum_{k=1}^{\infty}E_{\alpha,\gamma}\left(-(2k\pi)^2t^{\alpha}\right)\left[\cos 2k\pi x\int_0^1\varphi(x)\cos 2k\pi x dx+\right.$$

$$\left.+\sin 2k\pi x\int_0^1\varphi(x)\sin 2k\pi x dx\right].$$

Доказательство единственности проводится аналогично, как и в случае задачи (1.2.1)-(1.2.3).

1.4 О НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА С ОТКЛОНЯЮЩИМСЯ АРГУМЕНТОМ

Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$ и

$$D^{\alpha,\gamma}[u](t)=I^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}I^{1-\gamma}[u](t)$$

.В дальнейшем $D_t^{\alpha,\gamma}$ будет означать, что оператор $D^{\alpha,\gamma}$ действует по переменной t.

В области $\Omega=\{(x,t):-\pi<x<\pi,\ 0<t<T\}$ рассмотрим уравнение

$$D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)=u_{xx}(x,t)-\varepsilon u_{xx}(-x,t) \qquad (1.4.1)$$

где $0<\alpha<1$, $|\varepsilon|\le 1$. Так как $D_t^{1,\gamma}=\frac{\partial}{\partial t}$, то при $\alpha=1$, $\varepsilon=0$ уравнение (1.4.1) совпадает с классическим уравнением теплопроводности. А при $\varepsilon=0$ уравнение (1.4.1) есть уравнение субдиффузий [41, с.240].

Регулярным решением уравнения (1.4.1) будем называть функцию из класса гладкости $u\in C_{x,t}^{2,0}(\Omega)$, $D^{\alpha,\gamma}u\in C_{x,t}^{0,0}(\Omega)$, $u\in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega}\cap(t>0)\right)$, $t^{1-\gamma}u\in C_{x,t}^{0,0}(\overline{\Omega})$. Последнее обусловлено особенностями при $t\to 0$, возникающими у решений уравнений с дробными производными.

В области Ω рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Найти решение уравнения (1.4.1), удовлетворяющее начальному условию

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}u(x,t)=\varphi(x),\ \ -\pi\le x\le\pi\ . \qquad (1.4.2)$$

и краевым условиям

$$u(-\pi,t)=0,u(\pi,t)=0,0\le t\le T\ . \qquad (1.4.3)$$

Решение задачи 1 будем искать в виде

$$u(x,t) = X(x) \cdot T(t) \tag{1.4.4}$$

Подставля (1.4.4) в уравнение (1.4.1) и краевому условию (1.4.3) для функции $X(x)$ получаем следующую задачу

$$\begin{cases} X''(x) - \varepsilon X''(-x) + \lambda X(x) = 0, \\ X(-\pi) = X(\pi) = 0. \end{cases} \tag{1.4.5}$$

Задача (1.4.5) имеет две серии собственных значений

$$\lambda_k^{(1)} = (1+\varepsilon)k^2, \; k = 1,2,... \; \lambda_k^{(2)} = (1-\varepsilon)k^2, \; k = 0,1,....$$

Собственные функции задачи (1.4.5) имеют вид

$$X_k^{(1)} = \sin kx, k = 1,2,..., \; X_k^{(2)} = \cos(k+0.5)x, k = 0,1,....$$

Действительно. Пусть

$$u(x) = \frac{X(x) + X(-x)}{2}, \; v(x) = \frac{X(x) - X(-x)}{2}.$$

Тогда $X(x) = u(x) + v(x)$. Нетрудно показать, что

$$u(-x) = \frac{X(-x) + X(x)}{2} = u(x),$$

$$v(x-) = \frac{X(-x) - X(x)}{2} = -v(x),$$

Отсюда

$$u''(x)=\frac{X''(x)+X''(-x)}{2},\ \ v''(x)=\frac{X''(x)-X''(-x)}{2},$$

$$u''(-x)=\frac{X''(x)+X''(-x)}{2}=u''(x),$$

$$v''(-x)=\frac{X''(x)-X''(-x)}{2}=-v''(x).$$

Подставляя последние вычисления в (1.4.5), для функции $u(x)$ и $v(x)$ получим следующие задачи

$$\begin{cases}(1-\varepsilon)u''(x)+\lambda u(x)=0,\\ u(-\pi)=u(\pi)=0.\end{cases} \qquad (*)$$

$$\begin{cases}(1+\varepsilon)v''(x)+\lambda v(x)=0,\\ v(-\pi)=v(\pi)=0.\end{cases} \qquad (**)$$

Задачи (*) и (**) являются простейшими задачами Штурма-Лиувилля, и их решения соответственно имеют вид

$$u(x)=A_k\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)x,\ \ k=\overline{0,\infty},$$

$$v(x)=B_k\sin kx,\ \ k=\overline{1,\infty}.$$

где A_k и B_k произвольные постоянные.

Приведем известные утверждения доказанные в работе [17].

Лемма 1.4.1. Система функций

$$\{\sin kx\}_{k=1}^{\infty},\ \{\cos(k+0.5)x\}_{k=0}^{\infty} \tag{1.4.6}$$

ортогональна и полна в $L_2[-\pi,\pi]$.

Лемма 1.4.2. Если функция $\varphi\in C[-\pi,\pi]$, $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)=0,$ ее производная $\varphi'(x)$ существует и непрерывна всюду на $[-\pi,\pi]$, за исключением конечного числа точек, в каждой из которых существуют конечные левая и правая производные, то тригонометрический ряд по системе функций (1.4.6) функции $\varphi(x)$ сходится абсолютно на $[-\pi,\pi]$ в равномерной метрике.

Основным результатом работы является следующее утверждение.

Теорема 1.4.1. Пусть $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 1.4.2. Тогда решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде ряда

$$u(x,t)=\frac{\Gamma(\gamma)}{t^{1-\gamma}}\left[\sum_{k=1}^{\infty}a_kE_{\alpha,\gamma}\left(-(1+\varepsilon)k^2t^{\alpha}\right)\sin kx+\right.$$
$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}b_kE_{\alpha,\gamma}\left(-(1-\varepsilon)k^2t^{\alpha}\right)\cos(k+0.5)x\right] \tag{1.4.7}$$

где коэффициенты a_k и b_k определяются равенствами

$$\begin{cases} a_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx,\ k=\overline{1,\infty} \\ b_k=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos(k+0.5)xdx,\ k=\overline{0,\infty} \end{cases}, \tag{1.4.8}$$

а функция $E_{\alpha,\beta}(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}\dfrac{z^i}{\Gamma(\alpha i+\beta)}$, функция типа Миттаг-Леффлера.

Доказательство. Пусть $u(x,t)$ - решение задачи 1. Тогда любое регулярное решение задачи 1 (из класса $t^{1-\gamma}u\in C_{x,t}^{0,0}(\overline{\Omega})$) может быть при всех t представлено в виде ряда

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)X_k^{(1)}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}v_k(t)X_k^{(2)}\,. \tag{1.4.9}$$

Используя утверждение леммы 1.4.2 представим функцию $\varphi(x)$ в виде равномерно и абсолютно сходящегося ряда

$$\varphi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kX_k^{(1)}(x)+\sum_{k=0}^{\infty}b_kX_k^{(2)}(x), \tag{1.4.10}$$

где a_k и b_k коэффициенты (1.4.8), причем $\sum_{k=1}^{\infty}|a_k|<\infty,\ \sum_{k=0}^{\infty}|b_k|<\infty$.

Рассмотрим функции

$$u_k(t)=\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\sin kxdx,\ k=1,2,...,$$

$$v_k(t)=\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx,\ k=0,1,....$$

Применяя оператор $D^{\alpha,\gamma}$ к функциям $u_k(t)$, $v_k(t)$ и учитывая уравнение (1.4.1) получим

$$D^{\alpha,\gamma}[u_k](t)=\int_{-\pi}^{\pi}D_t^{\alpha,\gamma}[u](x,t)\sin kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\left(u_{xx}(x,t)-\varepsilon u_{xx}(-x,t)\right)\sin kxdx=$$

$$=-(1+\varepsilon)k^2\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\sin kxdx=-(1+\varepsilon)k^2u_k(t),$$

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}u_k(t)=\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}\int_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\sin kxdx=\int_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\sin kxdx=a_k\,,$$

$$D^{\alpha,\gamma}\left[v_k\right](t)=\int\limits_{-\pi}^{\pi}D_t^{\alpha,\gamma}\left[u\right](x,t)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\left(u_{xx}(x,t)-\varepsilon u_{xx}(-x,t)\right)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx=$$

$$=-\left(1-\varepsilon\right)\left(k+\frac{1}{2}\right)^2\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx=-\left(1+\varepsilon\right)k^2v_k(t),$$

$$\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}v_k(t)=\lim_{t\to 0}t^{1-\gamma}\int\limits_{-\pi}^{\pi}u(x,t)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx=\int\limits_{-\pi}^{\pi}\varphi(x)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)xdx=b_k.$$

Тогда для неизвестных функций $u_k(t)$ и $v_k(t)$ получаем следующие задачи

$$\begin{cases}D^{\alpha,\gamma}u_k(t)+\left(1+\varepsilon\right)k^2u_k(t)=0, 0<t<T,\\ \lim\limits_{t\to 0}t^{1-\gamma}u_k(t)=a_k, k=1,2,....\end{cases} \tag{1.4.11}$$

$$\begin{cases}D^{\alpha,\gamma}v_k(t)+\left(1-\varepsilon\right)k^2v_k(t)=0, 0<t<T,\\ \lim\limits_{t\to 0}t^{1-\gamma}v_k(t)=b_k, k=0,1,....\end{cases} \tag{1.4.12}$$

По лемме 1.4.1 решение задач (1.4.11) и (1.4.12) существуют, единственны и могут быть выписаны в явном виде

$$\begin{cases}u_k(t)=\dfrac{a_k}{t^{1-\gamma}}\Gamma(\gamma)E_{\alpha,\gamma}\left(-\left(1+\varepsilon\right)k^2t^\alpha\right)\\ v_k(t)=\dfrac{b_k}{t^{1-\gamma}}\Gamma(\gamma)E_{\alpha,\gamma}\left(-\left(1-\varepsilon\right)k^2t^\alpha\right)\end{cases}, \tag{1.4.13}$$

Подставляя $u_k(t)$ и $v_k(t)$ в (1.4.9), находим решение задачи 1 в виде (1.4.7).

Если в условий (1.4.2) предположим, что $\varphi(x)=0$, то $u_k(t)\equiv 0$, $v_k(t)\equiv 0$. Значит, $u(x,t)\equiv 0$. Отсюда вытекает единственность решение задачи 1.

Известно (см.[1, стр.13]), что при больших значениях $|z|$, $\arg z=\pi$ для функции $E_{\alpha,\gamma}(z)$ справедлива асимптотическая оценка

$$E_{\alpha,\gamma}(z) = O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Поэтому для любого $t \ge t_0 > 0$ имеет место

$$\left|E_{\alpha,\gamma}(-\lambda_k t^\alpha)\right| \le \frac{C}{k^2}. \qquad (1.4.14)$$

Следовательно, для функции (1.4.13) при всех $t \ge t_0 > 0$ получаем оценку

$$|u_k(t)| = \left|\frac{a_k}{t^\gamma}\Gamma(\gamma)E_{\alpha,\gamma}\left(-(1+\varepsilon)k^2t^\alpha\right)\right| \le \left|\frac{a_k}{t^{1-\gamma}}\right|\Gamma(1-\gamma)\frac{C}{k^2} \le \frac{C}{k^2}|a_k| < \infty,$$

$$|v_k(t)| = \left|\frac{b_k}{t^{1-\gamma}}\Gamma(\gamma)E_{\alpha,\gamma}\left(-(1-\varepsilon)k^2t^\alpha\right)\right| \le \left|\frac{b_k}{t^{1-\gamma}}\right|\Gamma(\gamma)\frac{C}{k^2} \le \frac{C}{k^2}|b_k| < \infty.$$

Тогда для функций (1.4.7) справедливо оценка

$$|u(x,t)| = C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_k|}{k^2} + C\sum_{k=0}^{\infty}\frac{|b_k|}{k^2} < \infty$$

То есть в области Ω ряд (1.4.7), представляющий функцию $u(x,t)$, сходится абсолютно и равномерно, и его сумма представляет собой непрерывную функцию в области Ω.

Далее, так как в области $\overline{\Omega}$ справедливо

$$\left|t^{1-\gamma}u(x,t)\right| = C\sum_{k=1}^{\infty}|a_k| + C\sum_{k=0}^{\infty}|b_k| < \infty$$

то $t^{1-\gamma}\cdot u(x,t)\in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Аналогично при $t\geq t_0>0,\ 0\leq x\leq 1$ доказываются оценки

$$\left|D_t^{\alpha,\gamma}u(x,t)\right|\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|+C\sum_{k=0}^{\infty}\left|b_k\right|<\infty,$$

$$\left|u_{xx}(x,t)\right|\leq C\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k\right|+C\sum_{k=0}^{\infty}\left|b_k\right|<\infty.$$

Таким образом, $D^{\alpha,\gamma}u(x,t)\in C(\Omega)$, $u_{xx}(x,t)\in C(\Omega)$, $u\in C_{x,t}^{1,0}\left(\overline{\Omega}\cap(t>0)\right)$.

Теорема доказана.

2 ОПЕРАТОРНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

2.1 ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЕ И ОПРЕДЕЛЕНИЕ

Пусть L - линейный оператор, действующий на функции $f(x)$, определенные в некоторой области $\Omega \subset R^n$ и принадлежащие соответствующим классам.

Определение 2.1.1. Степенью оператора L назовём выражение L^m, пологая

$$L^0 f = f,\ L^k f = L\left(L^{k-1} f\right),\ \ k = 1, 2, \ldots.$$

Определение 2.1.2. Порядком итерации или полилинейным порядком функции f относительно оператора L в области Ω назовем наименьшее натуральное число p, такое, что всюду в области Ω

$$L^p f(x) = 0$$

Если выражение $L^p f(x)$ имеет смысл для любых p, но ни при одном их них не выполняется равенство $L^p f = 0$, то полилинейный порядок такой функции относительно данного оператора L будем считать равным бесконечности.

Пример 2.1.1. Пусть $f(x) = \dfrac{x^k}{k!},\ k = 1, 2, \ldots\ L = \dfrac{d}{dx}$. Тогда

$$Lf(x) = \frac{d}{dx}\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$L^q f(x) = \frac{d^q}{dx^q}\frac{x^k}{k!} = \frac{x^{k-q}}{(k-q)!}, \quad k \ge q$$

$$L^p f(x) = \frac{d^p}{dx^p}\frac{x^k}{k!} = 0,\ \ p = k+1$$

Значит, полилинейный порядок функции $f(x) = \dfrac{x^k}{k!}$ относительно оператора $L = \dfrac{d}{dx}$ равен ,

$$p = k + 1$$

Пример 2.1.2. Пусть $f(x)=e^x$, $L=\dfrac{d}{dx}$. В этом случае $L^p f(x)=\dfrac{d^p}{dx^p}e^x=e^x\neq 0$ т.е. полилинейный порядок данной функции относительно оператора равен бесконечности.

Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$,

$$D^{\alpha,\gamma}=I^{\gamma-\alpha}\frac{d}{dt}I^{1-\alpha} \text{ и } t>0 .$$

Рассмотрим в области $Q=\{(x,t):x\in\Omega, 0<t<T\}$ следующее уравнение

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)^l u(x,t)=0 \tag{2.1.1}$$

где L_x - линейный дифференциальный оператор действующий по переменной x, $l=1,2\dots$.

Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора L_x полилинейный порядок равный q (q-конечное или бесконечное).

Рассмотрим функцию

$$\Phi_p^q(t,g)=\sum_{i=p}^{q+p-1}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L_x^{i-p}g(v) , \tag{2.1.2}$$

где $\dbinom{i}{p}=\dfrac{i!}{p!(i-p)!}$, $p=0,1,\dots$.

Если полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора L_x равен бесконечности то сумма (2.1.2) превращается в ряд вида

$$\Phi^\infty(t,g)=\sum_{i=p}^{\infty}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L_x^{i-p}g(x). \tag{2.1.3}$$

В этом случае мы будем предполагать, что ряд (2.1.3) сходится равномерно и абсолютно в области Q .

Пусть $f_i(t)=\dfrac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}$, $i=0,1,\dots$.

Справедливо следующее утверждение

Лемма 2.1.1. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$, $t>0$. Тогда справедливы равенства

$$D^{\alpha,\gamma}f_0(t)=0 , \tag{2.1.4}$$

$$D^{\alpha,\gamma}f_i(t)=f_i(t),\ i\ge 1. \tag{2.1.5}$$

Доказательство. Пусть $i \geq 0$.Тогда

$$I^{1-\gamma} f_i(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^t (t-\tau)^{-\gamma} \frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} d\tau =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \int_0^1 (1-\xi)^{-\gamma} \xi^{\alpha i+\gamma-1} d\xi \cdot \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(1-\gamma)} \cdot \frac{\Gamma(1-\gamma)\cdot\Gamma(\alpha i+\gamma)}{\Gamma(\alpha i+1)} \cdot \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} = \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+1)}.$$

Таким образом,

$$I^{1-\gamma} f_i(t) = \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+1)}, \quad i = 0,1,\dots .$$

Отсюда, сразу следует, что при $i = 0$

$$D^{\alpha,\gamma} f_0(t) = I^{\gamma-\alpha} \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{\Gamma(\gamma)}\right] = 0 \quad .$$

Далее, для любых $i \geq 1$ имеем

$$\frac{d}{dt} I^{1-\gamma} f_i(t) = \frac{d}{dt} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} = \frac{\alpha i}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} t^{\alpha i-1} .$$

И наконец,

$$D^{\alpha,\gamma} f_i(t) = \frac{\alpha i}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} I^{\gamma-\alpha} t^{\alpha i-1} =$$

$$= \frac{\alpha i}{\Gamma(\alpha i+\gamma)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\gamma-\alpha-1} \tau^{\alpha i-1} d\tau =$$

$$= \frac{\alpha i}{\Gamma(\alpha i+1)} \cdot \frac{1}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \int_0^t (1-\xi)^{\gamma-\alpha-1} \xi^{\alpha i-1} d\xi \cdot t^{\alpha i+\gamma-\alpha-1} =$$

$$= \frac{t^{\alpha(i-1)+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha(i-1)+\gamma)} = f_{i-1}(t) .$$

Лемма доказана.

Теорема 2.1.1. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le 1$, функция $g(x)$ имеет конечный полилинейный порядок q относительно оператора L_x. Тогда функция (2.1.2) при всех $p=0,1,...,l-1$ является решением уравнения (2.1.1), в области Q .

Доказательство. Пусть $p=0$ применим к функции

$$\Phi_0^q(t,g)=\sum_{i=0}^{q-1}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^i g(x)$$

оператор $D^{\alpha,\gamma}$. В силу равенств (2.1.4) и (2.1.5) получаем

$$D^{\alpha,\gamma}\Phi_0^q(t,g)=\sum_{i=1}^{q-1}\frac{t^{\alpha(i-1)+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha(i-1)+\gamma)}L^i g(x) \tag{2.1.6}$$

Аналогично, применяя оператор L_x и функции $\Phi_0^q(t,g)$ с учетом равенства $L^q g(x)=0$ имеем

$$L\Phi_0^q(t,g)=\sum_{i=0}^{q-2}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x) \tag{2.1.7}$$

Заменим в равенстве (2.1.6) индекс i на $i+1$. Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}\Phi_0^q(t,g)=\sum_{i=0}^{q-1}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)$$

Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}\Phi_0^q(t,g)-L_x\Phi_0^q(t,g)=0$$

Пусть $p\ge 1$. Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}\Phi_p^q(t,g)=\sum_{i=p}^{q+p-1}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha(i-1)+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha(i-1)+\gamma)}L^i g(x)=$$

$$=\sum_{i=p-1}^{q+p-2}\binom{i+1}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x).$$

Аналогично,

$$L_x\Phi_p^q(t,g)=\sum_{i=p}^{q+p-2}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)$$

Далее, справедливы равенства

$$\binom{i+1}{p}-\binom{i}{p-1}=\frac{(i+1)!}{p!\left(i-(p-1)\right)!}-\frac{i!}{(p-1)!\left(i-(p-1)\right)!}=$$

$$=\frac{i!}{(p-1)!\left(i-(i-p-1)\right)!}\left[\frac{i+1}{p}-1\right]=$$

$$=\frac{i!}{(p-1)!\left(i-(i-p-1)\right)!}\frac{i-(p-1)}{p}=\frac{i!}{p!(i-p)!}=\binom{i}{p};$$

$$\binom{p}{p}-\binom{p-1}{p-1}=1-1=0\,.$$

Отсюда

$$\binom{i+1}{p}=\binom{i}{p}+\binom{i}{p-1},\ \ p\geq 1$$

Тогда

$$D^{\alpha,\gamma}\Phi_p^q(t,g)-L_x\Phi_p^q(t,g)=$$

$$=\sum_{i=p-1}^{q+p-2}\binom{i+1}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)-\sum_{i=p}^{q+p-2}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)=$$

$$=\sum_{i=p}^{q+p-2}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)+\sum_{i=p-1}^{q+p-2}\binom{i}{p-1}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)-$$

$$-\sum_{i=p}^{q+p-2}\binom{i}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)=\sum_{i=p-1}^{q+p-2}\binom{i}{p-1}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}L^{i+1}g(x)=$$

$$=\Phi_{p-1}^q(t,g)\,.$$

Следовательно,

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)\Phi_p^q(t,g)=\Phi_{p-1}^q(t,g),\ p=1,2,\ldots$$

Отсюда

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)\Phi_0^q\left(t,g\right)=0$$

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)^2\Phi_1^q\left(t,g\right)=0$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\left(D^{\alpha,\gamma}-L_x\right)\Phi_{l-1}^q\left(t,g\right)=0$$

Теорема доказана.

Теорема 2.1.2. Пусть $0<\alpha\le\gamma\le1$, функция $g(x)$ имеет относительно оператора L_x полилинейный порядок равный бесконечности. Тогда функция (2.1.3) для всех значений $p=0,1,\ldots,l-1$ является решением уравнения (2.1.1).

Теорема доказывается.

2.2 ДИФФУЗИОННЫЕ И ПОЛИ-ДИФФУЗИОННЫЕ УРАВНЕНИЕ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Пусть Δ_x- оператор Лапласа от n -переменных $x=\left(x_1,x_2,\ldots x_n\right)\in\Omega\subset R^n$, $0<\alpha\le\gamma\le1$

Рассмотрим дифференциальные уравнения в частных производных дробного порядка следующего вида

$$\left(\Delta_x-D_t^{\alpha,\gamma}\right)^l u\left(x,t\right)=F\left(x,t\right) \tag{2.2.1}$$

Где $l=1,2,\ldots$, $F\left(x,t\right)$- заданная функция. Если $F\left(x,t\right)=0$, то уравнение (2.2.1) называется однородным поли-диффузионным (поли-калорическим) уравнением.

Рассмотрим функцию

$$T^q\left(t,g\right)=\sum_{l=p}^{q+p-1}\binom{l}{p}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma\left(\alpha i+\gamma\right)}\Delta_x^{i-p}g\left(x\right) \tag{2.2.2}$$

Где $p=0,1,\ldots$, q-полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора Δ_x в некоторой области $\Omega\subset R^n$.

Заметив в равенстве (2.2.2) индекс i на $i+p$ получим

$$T_p^q\left(t,g\right)=\sum_{l=0}^{q-1}\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma\left(\alpha i+\alpha p+\gamma\right)}\Delta_x^i g\left(x\right) \tag{2.2.3}$$

Если полилинейный порядок функции $g(x)$ относительно оператора Δ_x равен ∞, то получаем следующий ряд

$$T_p^{\infty}(t,g)=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)}\Delta_x^i g(x) \qquad (2.2.4)$$

Справедливы следующие утверждение

Теорема 2.2.1. Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x конечный полилинейный порядок q Тогда функция (2.2.3) удовлетворяет условиям

$$\left(D_t^{\alpha,\gamma}-\Delta_x\right)T_0^q(t,g)=0,\ t>0,\ x\in\Omega, \qquad (2.2.5)$$

$$\left(D_t^{\alpha,\gamma}-\Delta_x\right)T_0^q(t,g)=T_{p-1}^q(t,g),\ p\geq 1. \qquad (2.2.6)$$

Теорема 2.2.2. Пусть функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x бесконечный полилинейный порядок q . Тогда функция (2.2.4) удовлетворяет условиям (2.2.5) и (2.2.6).

Теорема 2.2.3. Пусть $F(x,t)=0$, функция $g(x)$ имеет относительно оператора Δ_x в $\Omega\subset R^n$ конечный или бесконечный порядок равный q. Тогда функции (2.2.3) и (2.2.4) при $p=0,1,2,...,l-1$ удовлетворяет уравнению (2.2.1).

Рассмотрим примеры.

Пример 2.2.1. Пусть $n=1, g(x)=\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}$, m - натуральное число. Тогда

$$\Delta_x g(x)=\frac{d^2}{dx^2}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\frac{2m\cdot(2m-1)\cdot x^{2m-2}}{(2m)!}=\frac{x^{2(m-1)}}{(2(m-1))!}$$

$$\Delta_x^i g(x)=\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=\frac{x^{2(m-i)}}{(2(m-i))!}\text{, если } i\leq m$$

и

$$\Delta_x^{m+1} g(x)=\frac{d^{2(m+1)}}{dx^{2(m+1)}}\frac{x^{2m}}{(2m)!}=0\,.$$

Таким образом, функция $g(x)=\dfrac{x^{2m}}{(2m)!}=0$ относительно оператора $\dfrac{d^2}{dx^2}$ имеет конечный полилинейный порядок равный $q=m+1$. В этом случае функция (2.2.3) представляется в виде

$$T_p^q(t,g)=\sum_{l=0}^{m}\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)}=\frac{x^{2(m-i)}}{(2(m-i))!}$$

В случае $p=0$ имеем

$$T_0^q(t,g)=\sum_{l=0}^{m}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}\frac{x^{2(m-i)}}{(2(m-i))!}$$

Пример 2.2.2. Пусть $g(x)=\sin x$. Тогда

$$\frac{d^2}{dx^2}g(x)=\frac{d}{dx}\frac{d}{dx}\sin x=\frac{d}{dx}\cos x=-\sin x,$$

$$\frac{d^{2i}}{dx^{2i}}\sin x=(-1)^i\sin x$$

Следовательно, в этом случае у функции $g(x)=\sin x$ полилинейный порядок относительно оператора $\frac{d^2}{dx^2}$ равен ∞.

В этом случае

$$T_p^{\infty}(t,g)=\sum_{l=0}^{\infty}\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)}(-1)^i\sin x=$$

$$=\sin x\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^i\binom{l+p}{p}\frac{t^{\alpha i+\alpha p+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\alpha p+\gamma)}$$

В случае $p=0$ имеем

$$T_p^{\infty}(t,g)=\sin x\cdot\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}=$$

$$=t^{\gamma-1}\sin x\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{\alpha i}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}=\sin x\cdot t^{\gamma-1}E_{\alpha,\gamma}(-t^{\alpha})$$

т.е.

$$T_0^{\infty}(t,\sin x)=\sin x\cdot t^{\gamma-1}\cdot E_{\alpha,\gamma}(-t^{\gamma})$$

Если при этом $\gamma = 0$, то
$T_0^{\infty}\left(t, \sin x\right) = \sin x \cdot E_{\alpha,\gamma}\left(-t\right) = \sin x \cdot e^{-t}$.

2.3 ЗАДАЧА КОШИ И НАЧАЛЬНО КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ

Пусть $n = 3,\ x = \left(x_1, x_2, x_3\right),\ \Omega = \left\{x : 0 < x_j < b_j,\ j = 1, 2, 3\right\}$.

Рассмотрим в области $\Omega \times \left(0, T\right)$ следующую задачу

$$\left(\Delta_x - D^{\alpha,\gamma}\right) U\left(x, t\right) = 0, \tag{2.3.1}$$

$$t^{1-\gamma} \cdot U\left(x, t\right)\Big|_{t=0} = \varphi\left(x\right), \quad x \in \Omega \tag{2.3.2}$$

$$U\Big|_{x_1=0} = U\Big|_{x_1=b_1} = U\Big|_{x_2=0} = U\Big|_{x_2=b_2} = U\Big|_{x_3=0} = U\Big|_{x_3=b_3} = 0. \tag{2.3.3}$$

Решение задачи (2.3.1) – (2.3.3) будем искать в виде

$$U\left(x, t\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{t^{\alpha, i+\gamma-1}}{\Gamma\left(\alpha i + \gamma\right)} \Delta_x^i \varphi\left(x\right) \cdot c_{\alpha,\gamma} \tag{2.3.4}$$

где $c_{\alpha,\gamma}$ - некоторое постоянное.
Покажем, что функция (2.3.4) удовлетворяет начальному условию (2.3.2). Действительно

$$t^{1-\gamma} U\left(x, t\right) = \sum_{l=0}^{q-1} \frac{t^{\alpha i}}{\Gamma\left(\alpha i + \gamma\right)} \Delta_x^i \varphi\left(x\right) c_{\alpha,\gamma} =$$

$$= \left(\frac{t^0}{\Gamma\left(\gamma\right)} \varphi\left(x\right) + \frac{t^{\alpha}}{\Gamma\left(\alpha + \gamma\right)} \Delta \varphi\left(x\right) + \ldots.\right) c_{\alpha,\gamma}$$

Отсюда при $t = 0$ получаем

$$t^{1-\gamma} u\left(x, t\right)\Big|_{t=0} = c_{\alpha,\gamma} \cdot \frac{1}{\Gamma\left(\gamma\right)} \varphi\left(x\right)$$

И следовательно, если $c_{\alpha,\gamma} = \Gamma\left(\gamma\right)$, то функция (2.3.4) удовлетворяет начальному условию (2.3.2).

Далее, для того, чтобы функция (2.3.4) удовлетворяла граничным условиям (2.3.3) необходимо

$$u(x,t)\Big|_{\substack{x_j=0,\\ x_j=b,}}=0 \Rightarrow \Delta_x^i\varphi(x)\Big|_{\substack{x_j=0\\ x_j=b}}=0$$

При всех $i=0,1,\ldots$

Тогда функция $\varphi(x)$ разлагается в ряд вида

$$\varphi(x)=\sqrt{\frac{b}{b_1\cdot b_2\cdot b_3}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin\pi kx_1}{b_1}\left[\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin\pi jx_2}{b_2}\left(\sum_{m=1}^{\infty}a_{kjm}\frac{\sin\pi mx_3}{b_3}\right)\right]$$

Где a_{kjm} - коэффициент Фурье функции $\varphi(x)$.

Подставляя данную функцию в правый часть равенства (2.3.4) получаем решение задачи (2.3.1) - (2.3.3).

Пример 2.3.1. Пусть $n=1,\ \ 0<x<b$ тогда

$$u(x,t)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}\sum_{k=1}^{\infty}a_k\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}\left(\sin\frac{\pi kx}{b}\right)$$

Далее, учитывается, что

$$\frac{\partial^{2i}}{\partial x^{2i}}\sin\frac{\pi kx}{b}=(-1)^i\left(\frac{\pi k}{b}\right)^{2i}\sin\frac{\pi kx}{b}$$

И изменяя порядок суммирования, будем иметь

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^i\frac{t^{\alpha i+\gamma-1}}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}\left(\frac{\pi k}{b}\right)^{2i}\right]\sin\frac{\pi kx}{b}=$$

$$=t^{\gamma-1}\sum_{k=1}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2}{b^2}\right)^i\frac{\left(k^2t^{\alpha}\right)^i}{\Gamma(\alpha i+\gamma)}\right]\sin\frac{\pi kx}{b}=$$

$$=t^{\gamma-1}\sum_{k=1}^{\infty}a_kE_{\alpha,\gamma}\left(-\frac{\pi^2}{b^2}k^2t^{\alpha}\right)\sin\frac{\pi kx}{b}$$

Таким образом мы нашли решению следующей задачи

$$\begin{cases} \left(D^{\alpha,\gamma} - \dfrac{\partial^2}{\partial x^2}\right) u(x,t) = 0 \\ I^{1-\gamma} u(x,t)\big|_{t=0} = \varphi(x), \quad 0 \le x \le b \\ u(0,t) = 0, \quad u(b,t) = 0 \end{cases}$$

Которая представляется в виде

$$u(x,t) = t^{\gamma-1} \sum_{k=1}^{\infty} a_k E_{\alpha,\gamma}\left(-\frac{\pi^2}{b^2} k^2 t^\alpha\right) \sin\frac{\pi k x}{b}$$

где

$$a_k = \frac{2}{b}\int_0^b \varphi(x) \sin\frac{\pi k x}{b} dx$$

если $\gamma = 1$, то

$$E_{\alpha,\gamma}\left(-\frac{\pi^2}{b^2} k^2 t^\alpha\right) = E_{\alpha,\gamma}\left(-\frac{\pi^2}{b^2} k^2 t^\alpha\right)$$

Функция Миттаг-Леффлера.
А если $\alpha = \gamma = 1$, то

$$E_{1,1}\left(-\frac{\pi^2}{b^2} k^2 t\right) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2}{b^2}\right)^i \frac{t^i}{\Gamma(i+1)} = \sum_{l=0}^{\infty}\left(-\frac{\pi^2}{b^2}\right)^i \frac{t^i}{l!} = e^{-\frac{\pi^2 t}{b^2}}$$

В этом случае мы получаем решению первой смешанной задачи для уравнения диффузии:

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a^k e^{-\frac{\pi^2}{b^2}t} \sin\frac{\pi k x}{b}.$$

2.4 О ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЯХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В этом параграфе мы построим полиномиальные решения дробных аналогов параболических уравнений.

В качестве операторов дифференцирования будем рассматривать секвенциальные производные.

Пусть $t >, y \geq 0,$ $0 < \alpha \leq 1, 0 < \beta \leq 1,$ $\partial_t^\alpha = D_t^\alpha$, $\partial_{yy}^{2\beta} = D_y^\beta D_y^\beta$. Здесь дробные производные рассматриваются в смысле Капуто.

Рассмотрим дробный аналог уравнения теплопроводности

$$\partial_t^\alpha u(t,y) = a^2 \partial_{yy}^{2\beta} u(t,y), \tag{2.4.1}$$

Обозначим

$$\partial_t^\alpha = L_1,\ a^2 \partial_{yy}^{2\beta} = L_2.$$

Тогда вместо уравнения (2.4.1) можно рассмотреть

$$(L_1 - L_2) u(t,y) = 0. \tag{2.4.2}$$

Легко показать, что

$$\begin{aligned} &\partial_t^\alpha t^\mu = 0,\ \mu = 0 \\ &\partial_t^\alpha t^\mu = \frac{\Gamma(\mu+1)}{\Gamma(\mu+1-\alpha)} t^{\mu-\alpha}, \mu > 0 \end{aligned}.$$

Тогда используя метод нормированных систем,

решению уравнения (2.4.1) можно представить в виде

$$u(t,y) = \sum_{k=0}^{\infty} t^{\alpha k,!} L_2^k f(y), \tag{2.4.3}$$

где $f(x)$ - гладкая функция в R^n,

$t^{\alpha k,!} = \dfrac{t^{\alpha k}}{\Gamma(\alpha k+1)}$. Функцию (2.4.3) можно перезаписать

$$u(t,y)=\sum_{k=0}^{\infty}a^{2k}t^{\alpha k,!}\partial_{yy}^{2\beta k}f(y). \qquad (2.4.4)$$

Рассмотрим полиномы

$$T_n^s(t,y)=\sum_{k=0}^{n}a^{2k}t^{\alpha k,!}\partial_{yy}^{2\beta k}f(y).$$

Учитывая $\partial_{yy}^{2\beta}y^{\mu}=0,$ при $\mu=0,\beta$, функцию $f(y)$ представим в виде

$$f(y)=y^{2\beta n+\beta s,!}, s=0,\beta.$$

Тогда для $T_n^s(t,y)$ получим

$$T_n^s(t,y)=\sum_{k=0}^{n}a^{2k}t^{\alpha k,!}y^{\beta(2n-2k+s),!}. \qquad (2.4.5)$$

Применим оператор ∂_t^{α} к функций (2.4.5). Тогда

$$\partial_t^{\alpha}T_n^0(t,y)=a^2\sum_{k=0}^{n-1}a^{2k}t^{\alpha k,!}y^{2\beta(n-k-1),!}. \qquad (2.4.6)$$

Теперь применим к функций (2.4.5) оператор $\partial_{yy}^{2\beta}$. Тогда

$$\partial_{yy}^{2\beta}T_n^0(t,y)=\sum_{k=0}^{n-1}a^{2k}x^{\alpha k,!}y^{2\beta(n-k-1),!}. \qquad (2.4.7)$$

Таким образом, используя (2.4.6) и (2.4.7) мы получили

$$\partial_t^{\alpha} T_n^0(t,y) - a^2 \partial_{yy}^{2\beta} T_n^0(t,y) = 0 .$$

Значит, функция $T_n^0(t,y)$ является решением уравнения (2.4.1).

Аналогично, можно показать, что $T_n^1(t,y)$ также удовлетворяет уравнению (2.4.1).

Тогда следующая функция

$$u(t,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n T_n^0(t,y) + b_n T_n^1(t,y) \right),$$

(a_n, b_n)- произвольные постоянные) будет общим решением уравнения (2.4.1).

Рассмотрим функцию

$$T_{n,p}^{s}(t,y) = \sum_{k=0}^{n+p} \binom{k}{p} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{\beta(2n+2p-2k+s),!} . \tag{2.4.8}$$

Легко убедиться, что при $p = 0$

$$T_{n,0}^{s}(t,y) = T_n^s(t,y) .$$

Применим оператор ∂_t^{α} к функций (2.4.8). Тогда

$$\partial_t^{\alpha} T_{n,p}^{0}(t,y) = a^2 \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{k+1}{p} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{2\beta(n+p-k-1),!} . \tag{2.4.9}$$

Аналогично вычисляя $\partial_{yy}^{2\beta} T_{n,p}^{0}(t,y)$ имеем

$$\partial_{yy}^{2\beta} T_{n,p}^{0}(t,y) = \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{k}{p} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{2\beta(n+p-k-1),!}. \qquad (2.4.10)$$

Используя (2.4.9) и (2.4.10) вычислим $\partial_{t}^{\alpha} T_{n,p}^{0}(t,y) - a^2 \partial_{yy}^{2\beta} T_{n,p}^{0}(t,y)$. Тогда

$$\left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right) T_{n,p}^{0}(t,y) = a^2 \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{k+1}{p} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{2\beta(n+p-k-1),!} -$$

$$-a^2 \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{k}{p} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{2\beta(n+p-k-1),!} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+p-1} \binom{k}{p-1} a^{2k} t^{\alpha k,!} y^{2\beta(n+p-k-1),!} = T_{n,p-1}^{0}(t,y).$$

Значить,

$$\left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right) T_{n,p}^{0}(t,y) = T_{n,p-1}^{0}(t,y). \qquad (2.4.11)$$

Аналогичным вычислением находим

$$\left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right)^2 T_{n,p}^{0}(t,y) = \left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right) T_{n,p-1}^{0}(t,y) = T_{n,p-2}^{0}(t,y).$$

Далее, повторяя данную операцию $m \in N$ раз, имеем

$$\left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right)^m T_{n,p}^{0}(t,y) = \left(\partial_{t}^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right) T_{n,0}^{0}(t,y) = 0. \qquad (2.4.12)$$

Эти свойства верны и для функций $T_{n,p}^{1}(t,y)$.

Таким образом мы показали, что полиномы (2.4.8), удовлетворяют уравнению

$$\left(\partial_t^{\alpha} - a^2 \partial_{yy}^{2\beta}\right)^m u\left(x, y\right) = 0\,. \qquad (2.4.13)$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе исследованы вопросы разрешимости начально-краевых задач для суб – диффузионных уравнений с модифицированными операторами дробного порядка. Разработан метод решения некоторых обобщений поликалорических уравнений и рассмотрены задачи Коши для таких уравнений.

Основными результатами данной работы является:

- Доказаны теоремы о существовании и единственности начально – краевых задач.
- Применен метод Фурье для исследования этих задач.
- Доказано сходимость полученных рядов.
- Разработан метод построения частных решений специальных классов дифференциальных уравнений дробного порядка в частных производных.
- Построено полиномиальные решения дробных аналогов параболических уравнений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, – 2006. – 539 p.
2. Летников А.В. Теория дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1868. –Т.3, № 1. – С.1 - 68.
3. Летников А.В. Об историческом развитии теории дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1868. –Т.3, № 2. – С.85 -112.
4. Летников А.В. К разъяснению главных положений теории дифференцирования с произвольным указателем // Матем. сб., – 1873. – Т.6, № 4. – С.413 - 445.
5. Джрбашян М.М. Интегральные преобразования и представления функций в комплексной области. – М. : Наука, 1966. - 672с.
6. Джрбашян М.М., Нерсесян А.Б. Дробные производные и задача Коши для дифференциальных уравнений дробного порядка// Изв. АН Армянской ССР. – 1968. – Т.3, №1. – С. 3-28.
7. Нахушев А. М. Элементы дробного исчисления и их применение. –Нальчик: Изд-во КБНЦ РИН, 2000. – 299с.
8. Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.
9. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. – Минск.:Наука и Техника, – 1987. – 688 с.
10. Нахушева З.А. Видоизмененная задача Самарского для нелокального диффузионного уравнения // Доклады Адыгской (Черкесской) Международной академии наук. – 1997. – Т.2, №2. – С.36 – 41.
11. Нахушева З.А. Задача Самарского для уравнения фрактальной диффузии // Матем. заметки. – 2014. – Т. 95, №6. – С.878–883.
12. Luchko Y. Operational method in fractional calculus//Fract. Calc. Appl. Anal. –1999. –V2. –P.463-489.
13. Luchko Y. Gorenflo R . An operational method for solving fractional differential equations with the Caputo derivatives//Acta Mathematica Vietnamica. –1999. –V.24. –P.207-233 .
14. Luchko Y., Hilfer R., Tomovski Z. Operational method for the solution of fractional differential equations with generalized Riemann-Liouville fractional derivatives //Fract. Calc. Appl. Anal. –2009. –V.12. –P.299-318.
15. Luchko Y., Al-Refai M. Maximum principle for the fractional diffusion equations with the Riemann-Liouville fractional derivative and its applications //Fract. Calc. Appl. Anal. –2014. –V.17. –P.483-498.
16. Luchko Y., Mainardi F. Some properties of the fundamental solution to the signalling problem for the fractional diffusion-wave equation //Central European Journal of Physics. –2013. –V.11. –P. 666–675.

17. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the one-dimensional time-fractional diffusion equation //Fract. Calc. Appl. Anal. –2012. –V.15. –P.141-160.
18. Luchko Y. Initial-boundary-value problems for the generalized multi-term time-fractional diffusion equation //Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2011. –V.374. –P. 538-548.
19. Luchko Y. Maximum principle and its application for the time-fractional diffusion equations.//Fract. Calc. Appl. Anal. –2011. –V.11. –P.110-124.
20. Нигматуллин Р.Р. Физическая интерпретация дробных интегралов // Теоретическая и математическая физика. – 1992. – Т. 90, № 3. – С. 354-367.
21. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. I. Математические основы и проблема интерпретации // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 4. – С. 3 – 42.
22. Бутковский А.Г., Постнов С.С., Постнова Е.А. Дробное интегро-дифференциальное исчисление и его приложения в теории управления. II. Дробные динамические системы: моделирование и аппаратная реализация // Автоматика и телемеханика. –2013. –№ 5. – С. 3 – 34.
23. Васильев В.В., Л. А. Симак. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем .– Киев : НАН Украины, – 2008. – 256 с.
24. Тарасов В. Е. Модели теоретической физики с интегро-дифференцированием дробного порядка. – Москва, Ижевск: РХД, – 2010. – 568с.
25. Учайкин В. В. Метод дробных производных. — Ульяновск: Артишок, – 2008. — 512 с
26. Chechkin, A.V., R. Gorenflo, I.M. Sokolov. Fractional diffusion in inhomogeneous media //J. Phys. A, Math. Gen. –2005. –V.38. –P. 679-684.
27. Gorenflo, R. and F. Mainardi. Random walk models for space-fractional diffusion processes //Fractional Calculus and Applied Analysis. –1998. –V.1. –P. 167-191.
28. Mainardi, F. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena //Chaos, Solitons and Fractals. –1996.–V.7. –P. 1461-1477.
29. Mainardi, F., M. Tomirotti. Seismic pulse propagation with constant Q and stable probability distributions// Annali di Geofisica. –1997. –V.40. –P. 1311-1328.
30. Metzler, R., J. Klafter. The random walk's guide to anomalous diffusion: a fractional dynamics approach// Physics Reports. –2000. –V.339. –P. 1-77.
31. Metzler, R., J. Klafter. Boundary value problems for fractional diffusion equations// Phys. –2000. –A.278. –P. 107-125.
32. Agrawal Om.P. Solution for a Fractional Diffusion-Wave Equation Defined in a Bounded Domain //Nonlinear Dynamics. –2002. –V. 29,1-4. –P. 145-155.

33. Luchko, Yu. Maximum principle for the generalized time-fractional diffusion equation// Journal of Mathematical Analysis and Applications. –2009. –V.351. –P. 218-223.
34. Luchko, Yu. Some uniqueness and existence results for the initial-boundary-value problems for the generalized time-fractional diffusion equation// Computers and Mathematics with Applications. –2010. –V.59. –P .1766-1772.
35. Mainardi, F., Yu. Luchko, G. Pagnini. The fundamental solution of the space time fractional diffusion equation// Fract. Calc. Appl. Anal. –2001. –V.4. –P.153-192.
36. Schneider, W.R. and W. Wyss. Fractional diffusion and wave equations// J. Math. Phys. –1989. –V.30. –P. 134-144.
37. Voroshilov, A.A. and A.A. Kilbas. The Cauchy problem for the diffusion-wave equation with the Caputo partial derivative// Differ. Equ. –2006. –V.42. –P. 638-649.
38. Zacher, R. Boundedness of weak solutions to evolutionary partial integro-differential equations with discontinuous coefficients// J. Math. Anal. Appl. –2008. –V.348. –P. 137-149.
39. Zhang, S. Existence of solution for a boundary value problem of fractional order// Acta Math. Sci., Ser. –2006. –V.26. –P.220-228.
40. Турметов Б.Х., Шиналиев К. О разрешимости некоторых начально – краевых задач для обобщенного уравнения теплопроводности // Вестник ЕНУ.Серия естест. –тех. наук. –2011. –№ 6. – С.8-16.
41. Турметов Б.Х., Шиналиев К. О разрешимости некоторых обратных задач для уравнения теплопровдности дробного порядка // Вестник КарГУ. Серия " Математика". – 2011. – №4(64). – С.73-79.
42. Турметов Б.Х., Уразтаев Д.Б. Об одной нелокальной задаче дифференциального уравнения дробного порядка с оператором Капуто // Вестник МКТУ . Серия Естественных наук. – 2011. – № 3. – С.3-8.
43. Furati Kh. M., Iyiola O. S., Kirane M. An inverse problem for a generalized fractional diffusion // Applied Mathematics and Computation. – 2014. – V. 249. – P.24–31.
44. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с классическим краевым условиям // Дифференциальные уравнения. – 1977. – Т.13. №2. –С.294-304.
45. Бердышев А.С., Кадиркулов Б.Д., Турметов Б.Х. О некоторых обратных задачах для уравнения теплороводности дробного порядка // Вестник КазНУ. Серия математика, механика, информатика. – 2010. – №2(65). – С. 36 – 41.
46. Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Д. О разрешимости одной нелокальной задачи для уравнения теплороводности дробного порядка //Вестник КазНПУ имени Абая. Сер.физико-мат. наук. – 2012. – №2(38). – С. 64-70.

47. Кадиркулов Б.Д., Турметов Б.Х. Об одном обобщении уравнении теплопроводности. // Узбекский математический журнал. Ташкент. – 2006. – №3. – С.40-45.
48. Моисеев Е.И. О решении спектральным методом одной краевой задачи. //Дифференциальные уравнения. –1999. –Т.35. –№8. –С.1094-1100.
49. Мокин А.Ю. Об одном семействе начально-краевых задач для уравнения теплопроводности // Дифференц. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 1. – С. 123-137.
50. Торебек Б.Т., Турметов Б.Х. Об одной начально-краевой задаче для дифференциального уравнения дробного порядка с отклоняющимся аргументом // Вестник ЕНУ. Серия естест.-тех. наук. – 2012. –№ 6(91). – С.29-34.
51. Турметов Б.Х., Халиков Ш.М. О разрешимости одной задачи для обобщенного уравнения диффузии// ИЦРОН. –2015. –№ 2. – С.16-21.
52. Турметов Б.Х., Халиков Ш.М. Об операторном методе решения полилинейных дифференциальных уравнений дробного порядка// Вестник МКТУ. – 2015. –№ 3-4 (95-96). – С.94-99.