Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНЫЙ КАЗАХСКО-ТУРЕЦСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ им. Х.А.ЯСАВИ

УДК 517.95: 517.956.223

На правах рукописи

Ирфан Утку Демир

Магистерская диссертация

ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСОВ РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЫХ КРАЕЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Магистрская диссертация по специальности 6М060100-МАТЕМАТИКА на соискание академической степени магистра естественных наук

ТУРКЕСТАН -2016

Ф-ОБ-001/033

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РЕСПУБЛИКИ
КАЗАХСТАН
МЕЖДУНАРОДНО КАЗАХСКО ТУРЕЦСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. Х.А.ЯСАВИ

Допущен к защите :
Заведующая кафедрой
“Математика” к.техн.н
_________Қошанова М.Д.
«_____» __________ 2016 г.

Магистерская диссертация

ИССЛЕДОВАНИЯ ВОПРОСОВ РАЗРЕШИМОСТИ ВНЕШНЫХ КРАВЕЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАПЛАСА С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА

специальность: 6М060100-МАТЕМАТИКА

Магистрант __________________________ Ирфан Утку Демир
(подпись)

Научный руководитель,
к.ф.-м.н., ст. преп ________________________ К.И. Усманов
(подпись)

ТУРКЕСТАН -2016

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность работы: Настоящая диссертационная работа посвящена исследованию свойств интегро-дифференциальных операторов дробного порядка и применению этих свойств к вопросам разрешимости внешних краевых задач для уравнения Лапласа. Основными объектами применения являются решения краевых задач для уравнения Лапласа, а более конкретно дробных аналогов задач типа Дирихле и Неймана, т.е. локальных краевые задачи с граничными операторами дробного порядка.

Как известно классическими внутренними и внешними краевыми задачами для уравнений второго порядка эллиптического типа являются задачи Дирихле, Неймана и Робена.

Исследования этой задачи проводились в работах С. Агмон , А. Дуглис, Л. Ниренберга [1], А. В.Бицадзе [2-4], Я.Б.Бугрова [5-9], И.Н.Векуа [10], Н.Н.Меймана [11], С.Л.Соболева [12], F.Gazzola, H.C.Grunau, G.Sweers [13] и других. В этих работах изучались классические и обобщенные решения данной задачи. Например, в работе Н.Н. Меймана [11] используя методы потенциалов, классическое решение задачи Дирихле находится сведением этой задачи к системе интегральных уравнений.

Для эллиптических уравнений второго порядка внутренняя задача Неймана при любой размерности области исследования задачи является условна разрешимой, а внешняя задач начиная с $n \geq 3$ безусловна разрешимой.

В последнее время для эллиптических уравнений второго и высоких порядков многочисленными авторами исследовались внутренние краевые задачи с граничными операторами дробного порядка. В этом направлении отметим следующие работы : С.Р.Умаров [14,15], М.Киране и Н.Татар [16,17], Berdyshev A.S., Kadirkulov B., Nieto J.J. [18], R.Gorenflo, Y. Luchko, S.Umarov [19,20], Kadirkulov B., Kirane M. [21], Kirane M., Torebek B [22], Krasnoschok M., Vasylyeva N. [23], Б.Турметова и соавторов [24-54], и других. Отметим, также, что различные применения краевых задач для эллиптических уравнений с граничными операторами дробного порядка в электродинамики исследованы в работах Т.М.Ахмедов, Е.Велиев и М.Ивахшенко [55-56].

В этих работах были установлены условия разрешимости этих задач в зависимости от порядка граничных операторов. Доказаны теоремы о том, что при каких значениях порядков граничных операторов решения этих задач ведут себя как решения задачи Дирихле, а при каких как решения задачи Неймана.

В связи с этим актуальными являются найти условия разрешимости аналогичных задач во внешности некоторых областей, т.е. исследовать условия разрешимости внешних краевых задач с граничными операторами дробного порядка.

Цель диссертации: Основной целью диссертационной работы является исследования вопросов разрешимости новых классов внешних краевых задач для уравнения Лапласа.

Основными задачами диссертации являются: Построение взаимно обратных интегро –дифференциальных операторов дробного порядка связанных с производными дробного порядка в смысле Римана- Лиувилля и Адамара. Изучение свойств этих операторов в классе регулярных гармонических функций. Применения свойств построенных операторов к вопросам разрешимости внешних краевых задач для уравнения Лапласа.

Исследование новых классов корректных краевых задач для уравнения эллиптического типа в бесконечных областях.

Методы исследования. В диссертационной работе используются методы уравнений математической физики, математического анализа, функционального анализа, и методы интегральных уравнений.

Личный вклад автора. Подстановка задачи принадлежить научному руководителю автора. Теоретические расчеты и основные научные выводы основаны на широкомасштабном исследовании диссертанта. Результаты издания материалов и обработки и подготовки докладов с конференций выполнил сам диссертант.

Апробация работы. По материалам диссертации были проведены доклады на научном семинаре МКТУ кафедры «Математика» и в международной конференции в городе Шымкент .

Публикации работы. По материалом исследовательских работ были опубликованы 2 статья, в том числе 1 статья опубликовано в трудах конференции и 1 статья опубликовано в журнале Вестник МКТУ

Структура и объем диссертации. Диссертационная работа состоит из введение, двух глав, заключения и использованных литератур. Основной материал состоит из 70 страниц, список использованных литератур 70 наименований.

Краткое содержание диссертации

Настоящая работа состоит из двух разделов. В первой главе работы приводятся краткое сведения о классических внешних краевых задача, методах решений этих задач, а также исследованы вопросы разрешимости внешней краевой задачи с граничным оператором высокого(целого) порядка.

В первом параграфе второй главы приводятся определения интегро-дифференциальных операторов дробного порядка, а также исследуются свойств интегро-дифференциальных операторов дробного порядка в классе регулярных гармонических функций в бесконечных областях.

Пусть $\Omega = \{x \in R^n : |x| > 1\}$, $n > 2$ - внешность единичного шара, $\partial\Omega = \left\{x \in R^n : |x| = 1\right\}$ - единичная сфера. Пусть, далее $u(x)$ - гармоническая функция в области Ω, $r = |x|$, ($|x|$ - норма в R^n), $\theta = \dfrac{x}{|x|}$.

Пусть $0<\alpha\leq 1$ и D_-^{α} - операторо Римана-Лиувиляя порядка α . А именно

$$D_-^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dr}\right)\int_r^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}\,u(\tau\theta)\,d\tau$$

Введем обозначение

$$B_-^{\alpha}[u](x)=r^{\alpha}D_-^{\alpha}[u](x).$$

Рассмотрим вектор $\vec{\alpha}=(\alpha_1,...,\alpha_m)$, где компоненты этого вектора удовлетворяют условиям $0<\alpha_j\leq 1, j=1,...,m.$ Используя этот вектор введем более общий оператор

$$B_-^{\vec{\alpha}}[u](x)=B_-^{\alpha_1}\left[B_-^{\alpha_2}...B_-^{\alpha_m}\left[u\right]\right](x)=B_-^{\alpha_m}\left[B_-^{\alpha_{m-1}}...B_-^{\alpha_1}\left[u\right]\right](x).$$

Отметим, что аналогичные операторы в классе гармонических в шаре функции были введены в работах [27,28,31,53]. А также, в случае $\alpha=1$, аналогичные операторы в шаре рассматривались в [58-59]. Заметим также, что краевые задачи с граничными операторами целого порядка исследовались в работах [60-62]

Основными свойствами введённых операторов являются:

Лемма 1. Пусть $u(x)$ – гармоническая в области Ω функция, тогда функция $B_-^{\vec{\alpha}}[u](x)$ также является гармоническим в Ω.

Лемма 2. Если функция $u(x)$ – гармоническая в области Ω, то справедливы равенства

$$B_-^{-\vec{\alpha}}\left[B_-^{\vec{\alpha}}[u]\right](x)=u(x),\ B_-^{\vec{\alpha}}\left[B_-^{-\vec{\alpha}}\left[u\right]\right](x)=u(x).$$

Теперь перейдем к постановке и решению некоторых внешних краевых задач, включающих значения оператора $B_-^{\vec{\alpha}}$ на границе.

Сначала изучим задачу в двухмерном случае.

Пусть $\Omega_+=\{x\in R^2:|x|^2>1\}$ - внешность единичного круга, $x=(x_1,x_2),\ r=|x|,\ \varphi=arctg\dfrac{x_2}{x_1}$.

Для любого $\alpha\in(0,1]$ в области Ω_+ рассмотрим следующую задачу

Найти функцию $u(x)\in C^2(\Omega)$, *для которой функция* $r^{\alpha}D_-^{\alpha}[u](x)$ *непрерывна в* $\Omega_+\cup\partial\Omega$ *и удовлетворяющую условиям*

$$\Delta u(r,\varphi)=0,\quad (r,\varphi)\in\Omega, \tag{1}$$

$$D_-^{\alpha}[u](r,\varphi)\Big|_{r=1}=f(\varphi),-\pi\leq\varphi<\pi, \tag{2}$$

$$|u(r,\varphi)|\le C,(r,\varphi)\to\infty, \qquad (3)$$

где C- постоянное.

Справедливо следующее утверждение

Теорема 1. Пусть $0<\alpha\le 1$, $f(\varphi)\in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи (1) – (3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 0$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r,\varphi) = C + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_\alpha(r,\varphi-\theta)f(\theta)d\theta,$$

где

$$P_\alpha(r,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty(\xi-1)^{\alpha-1}\xi^{-\alpha}\frac{\xi r\cos\gamma-1}{\xi^2r^2-2\xi r\cos\gamma+1}ds.$$

В многомерном случае рассматриваются следующие задачи.

Задача 1. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_-^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_-^\alpha[u](x)=f(x), \quad x\in\partial\Omega,$$

$$|u(x)|\to 0, |x|\to\infty. \qquad (4)$$

Задача 2. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_-^{\tilde{\alpha}}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет условию (4) и на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_-^{\tilde{\alpha}}[u](x)=f(x), \quad x\in\partial\Omega.$$

Теорема 2. Для любой $f(x)\in C(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}v(sx)ds,$$

где $v(x)$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничной функцией $f(x)$.

Теорема 3. Для любой $f(x)\in C(\partial\Omega)$ решение задачи 2 существует, единственно и представляется в виде

$$u(x)=\int_1^\infty \frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\dots\int_1^\infty \frac{(s-1)^{\tilde{\alpha}-1}}{\Gamma(\alpha_m)} s^{-\tilde{\alpha}} v(sx)\,ds_m ,$$

где $v(x)$ – решение внешней задачи Дирихле для уравнения Лапласа с граничной функцией $f(x)$.

Далее, введем операторы интегро -дифференцирования в смысле Адамара.

Для произвольного положительного числа $\alpha>0$ оператором дробного интегрирования порядка α в смысле Адамара назовем выражение [3]:

$$J_-^\alpha u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^\infty \left(\ln\frac{t}{r}\right)^{\alpha-1}\frac{u(t\theta)}{t}dt .$$

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\dots$, $\delta=r\dfrac{d}{dr}\equiv\sum_{j=1}^n x_j\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ - оператор Дирака и

$\delta^k=\delta\left(\delta^{k-1}\right),\ k=2,3,\dots$.Следующее выражение

$${}_H D_-^\alpha u(x)=(-\delta)^m J_-^{m-\alpha}u(x)\equiv\frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\left(r\frac{d}{dr}\right)^m\int_r^\infty\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha}\frac{u(t\theta)}{t}dt$$

называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара.
В дальнейшем будем полагать $J_-^0 u(x)=u(x)$.
Аналогичным образом можно ввести понятие оператора дифференцирования порядка α в смысле Адамара - Капуто. А именно

$${}_{HC} D_-^\alpha u(x)=(-1)^m J_-^{m-\alpha}\left[\delta^m[u]\right](x)\equiv\frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\int_r^\infty\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha}\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\frac{u(t\theta)}{t}dt$$

Для любого $\alpha\in(m-1,m], m=1,2,\dots$ в области Ω_+ рассмотрим следующую задачу

Найти функцию $u(x)\in C^2(\Omega)$, для которой функция $D_-^\alpha[u](x)$ непрерывна в $\Omega_+\cup\partial\Omega$ и удовлетворяющую условиям

$$\Delta u(r,\varphi)=0,\quad (r,\varphi)\in\Omega, \tag{5}$$

$$D_\mu^\alpha[u](r,\varphi)\Big|_{r=1}=f(\varphi), -\pi\le\varphi<\pi , \tag{6}$$

$$|u(r,\varphi)| \le C, (r,\varphi) \to \infty, \tag{7}$$

где C- постоянное, а D_μ^α будет означать оператор типа Адамара – Капуто.

Теорема 4. Пусть $m-1<\alpha \le m, m=1,2,..., \mu \ge 0$, $f(\varphi) \in C(\partial\Omega)$. Тогда

1) если $\mu>0$, то решение задачи (5) – (6) существует, единственно и представляется в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,\mu}(r,\varphi-\theta) f(\theta) d\theta,$$

где

$$P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (\ln\tau)^{\alpha-1} \frac{\tau^2 r^2 - 1}{\tau^2 r^2 - 2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

2) если $\mu=0$, то для разрешимости задачи (5) – (7) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r,\varphi) = C + \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_{\alpha,0}(r,\varphi-\theta) f(\theta) d\theta,$$

где

$$P_{\alpha,0}(r,\theta-\varphi) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (\ln\tau)^{\alpha-1} \frac{\tau r cos(\theta-\varphi) - 1}{\tau^2 r^2 - 2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

Пусть $m-1<\alpha \le m, m=1,2,...$. Рассмотрим в области Ω_+ следующую задачу

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega_+, \tag{8}$$

$$D_{-}^{\alpha}u(x) = f(x), x \in \partial\Omega_{+}. \tag{9}$$

Решением задачи (8), (9) назовем регулярную гармоническую функцию $u(x) \in C^2(\Omega_+) \cap C(\bar{\Omega}_+), \bar{\Omega}_+ = \Omega_+ \cup \partial\Omega$ для которой $D^{\alpha}u(x) \in C^2(\bar{\Omega}_+)$ и удовлетворяющую условию (9) в классическом смысле.

Так как $J_{-}^{0}u(x) = u(x)$, то при $\alpha = 1$ получим $D_{-}^{\alpha}u(x) = \left(-r\frac{d}{dr}\right)^m u(x)$. Следовательно, в случае $\alpha = 1$ рассматриваемая задача (8), (9) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Сформулирум основное утверждение относительно задачи (8)-(9).

Теорема 5. Пусть $\alpha > 0, f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (8)-(9) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = J_{-}^{\alpha}[v](x),$$

где $v(x)$ – решение внешней задачи Дирихле с граничным значением $f(x)$.

SUMMARY

This work is devoted to study on issues of solubility of exterior boundary value problems for the Laplace equation with boundary operators of fractional order. This work investigated class of regular harmonic functions properties of integral- differential operators of fractional order and its usage in the sense of Riemann-Liouville and Hadamard.

Theorems on the existence and uniqueness of the solution on these problems.

РЕЗЮМЕ

Данная работа посвящена к исследованию вопросов разрешимости внешних краевых задач для уравнения лапласа с граничными операторами дробного порядка. В работе в классе регулярных гармонических функций исследуются свойства интегро-дифференциалных операторов дробного порядка в смысле Риман-Лиувилля и Адамара.

Доказаны теоремы о существования и единственности решения рассматриваемых задач.

ТҮЙІНДЕМЕ

Бұл жұмыс Лаплас теңдеуі үшін шекаралық шартында бөлшек ретті дифференциалдық оператор қатысқан сыртқы шеттік есептің шешілімділігін зерттеуге арналған. Жұмыста Риман-Лиувилл және Адамар мағынасындағы интегро-дифференциалдық операторлардың регуляр гармониялық функциялар класында қасиеттері зерттелінеді және олардың шеттік есептерді шешудегі қолданыстары қарастырылады.

Шеттік есептердің шешімі бар және жалғыз болуы туралы теоеремалар дәлелденген.

1 ВНЕШНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ЦЕЛОГО ПОРЯДКА

1.1 Постановка внешных краевых задач для уравнения Лапласа

Как известно помимо физических явлений, развивающихся в пространстве и во времени, существуют много явлений, которые не изменяются с течением времени. Например, распределение гравитационного и электростатического потенциала в точке свободного пространства, изменение температуры однородной изотропной среды при установившимся движении тепла и т.д. Эти процессы называются стационарные

Уравнение эллиптического типа описывают стационарные процессы (не изменяющиеся с течением времени) и появляются при моделировании самых разнообразных физических процессов. Более того, можно предвидеть многие свойства краевых задач для уравнения эллиптического типа, если связать его с задачей о стационарном распределении температуры в теле. Самым распространенными примерами уравнений эллиптического типа являются уравнения Лапласа и Пуассона.

Уравнения Лапласа и Пуассона обычно используются для описания стационарного (то есть не меняющегося со временем) состояния тех или иных объектов. Например, стационарное распределение температуры в однородной среде и установившаяся форма натянутой мембраны удовлетворяют уравнению Лапласа, а аналогичное распределение температуры при наличии источников тепла (с плотностью, не меняющейся во времени) и форма мембраны при наличии стационарных внешних сил удовлетворяют уравнению Пуассона.

Для того, чтобы выделить единственное решение дифференциального уравнения, например, описывающее реальный физический процесс, используются различные дополнительные условия. В задачах математической физики может быть задано начальное состояние процесса (начальные условия) или режим на границе области (граничные условия). Уравнение, снабженное краевыми (начальными и граничными) условиями, называется краевой задачей. Уравнения Лапласа и Пуассона рассматриваются при трех типах граничных условий: условии Дирихле (условии первого рода), условие Неймана (условии второго рода) и Робена (условии третьего рода).

Пусть D ограниченная область из $R^n, n \geq 3$ с гладкой границей S. Известно (см.например [63]), что любая функция $u(x)$ принадлежащая классу $C^2(D)$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u(x) = 0, x \in D$$

называется гармонической функцией в области D.

Известно, что функция двух точек $x \in R^n, y \in R^n$

$$E(x,y) = \begin{cases} |x-y|^{2-n}, n \geq 3 \\ \ln \frac{1}{|x-y|}, n = 2 \end{cases}$$

при $x \neq y$ и по x и по y удовлетворяют уравнению Лапласа. Функция $E(x,y)$ называется фундаментальным решением уравнения Лапласа.

Используя свойства фундаментального решения $E(x,y)$ при исследовании краевых задач для уравнения Лапласа в бесконечных областях дополнительно требуется регулярность решения. А именно, функция $u(x)$, гармоническая в области $D_1 = R^n \setminus D$ называется регулярной (на бесконечности) если при $|x| \to \infty$ выполняется условие

$$|u(x)| \leq C|x|^{-(n-2)} \; n \geq 3, . \qquad (1.1.1)$$

где $C = const$.

Заметим, что если для функции $u(x)$ выполняется оценка (1.1.1), то для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ с $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ выполняется оценка (см.например [64], стр.373)

$$\frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} ... \partial x_n^{\beta_n}} = O\left(|x|^{-(n+|\beta|-2)}\right), n \geq 3. \qquad (1.1.2)$$

В двухмерном случае в качестве регулярности вместо условия (1.1.1) требуется выполнения условия

$$|u(x)| \leq C, \; n = 2, |x| \to \infty. \qquad (1.1.3)$$

где $C = const$.

Для решения внешних задач применяются различные методы. Например, метод потенциалов, метод Фурье, метод операционного исчисления и другие [63,64].

1.2 Изложение метода Фурье для уравнения Лапласа с классическими краевыми условиями.

Пусть $\Omega = \{x : x_1^2 + x_2^2 > 1\}$ внешность единичного круга, $\partial\Omega$ - окружность. Рассмотрим в Ω гармоническую функцию $u(x)$. Если перейти к полярным координатам $x_1 = r\cos\varphi, x_1 = r\sin\varphi$, то уравнение Лапласа представляется в следующем виде

$$\Delta u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0 \qquad (1.2.1)$$

Если частное решение уравнения (1.2.1) будем искать в виде

$$u(r,\varphi)=R(r)\Phi(\varphi),$$

то для функций R(r) и Φ(φ) получаем следующие уравнения

$$r\frac{d}{dr}(r\frac{dR}{dr}) - \lambda R(r) = 0 \qquad (1.2.2)$$

$$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0 \qquad (1.2.3)$$

Легко показать, что гладкими решениями уравнений (1.2.2) и (1.2.3) будут функции (см.[65])

$$\Phi_n(\varphi) = a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi$$

$$R(r) = Cr^{-n}, n = 0,1,...,$$

где С-постоянная.

Тогда, частными решениями уравнения (1.2.1) будуть функции

$$u_n(r,\varphi) = r^{-n}(A_n \cos n\varphi + B_n \sin n\varphi)$$

Суммы этих решений также будет решением этого уравнения т.е.

$$u(r,\varphi) = A + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) \qquad (1.2.4)$$

является гармонической функцией в Ω.

Рассмотрим для уравнения Лапласа вне единичного круга следующую задачу:

$$\Delta u(r,\varphi) = 0,\ (r,\varphi) \in \Omega \qquad (1.2.5)$$

$$\alpha u(r,\varphi) + \beta \left.\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \nu}\right|_{r=1} = f(\varphi), 0 \le \varphi \le 2\pi, \qquad (1.2.6)$$

где α, β - некоторые постоянные, ν -вектор нормали к границе области.

Для решения краевой задачи (1.2.5) - (1.2.6) воспользуемся формулой (1.2.4). Считая, что граничная функция $f(\varphi)$ является достаточно гладкой, разложим ее в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi\right) + \frac{\alpha_0}{2}, \qquad (1.2.7)$$

где

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta\, d\theta, \qquad \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta\, d\theta,\ k = 0, 1,...$$

Для внешности круга

$$\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial \nu} = -\frac{\partial u(r,\varphi)}{\partial r}.$$

Подставляя ряд (1.2.4) в краевое условие (1.2.6), получаем

$$A + \alpha\sum_{k=1}^{\infty}(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) + \beta\sum_{k=1}^{\infty}k(A_k \cos k\varphi + B_k \sin k\varphi) =$$

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k \cos\ k\varphi\ +\ \beta_k \sin k\varphi\right).$$

Приравнивая справа и слева коэффициенты при одинаковых членах, имеем

$$\alpha A = \frac{\alpha_0}{2},\ (\alpha + k\beta)A_k = \alpha_k,\ (\alpha + k\beta)B_k = \beta_k, k = 1, 2, \ldots .$$

Рассмотрим случай когда $\alpha \neq 0$. Тогда из полученных равенств однозначно находим все коэффициенты в формуле (1.2.4):

$$A = \frac{\alpha_0}{2\alpha},\ A_k = \frac{\alpha_k}{\alpha + k\beta},\ B_k = \frac{\beta_k}{\alpha + k\beta}.$$

Решение краевой задачи (1.2.5) - (1.2.6), следовательно, имеет следующий вид

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{\alpha + k\beta}\left(\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi\right) \qquad (1.2.8)$$

Отметим некоторые частные случаи.

1) Задача Дирихле: $\alpha = 1, \beta = 0$ когда на границе задается само решение:

$$\Delta u(r,\varphi)=0,\ (r,\varphi)\in\Omega \tag{1.2.9}$$

$$u(r,\varphi)\big|_{r=1}=f(\varphi), 0\le\varphi\le 2\pi\,, \tag{1.2.10}$$

В этом случае формула (1.2.8) принимает следующий вид:

$$u(r,\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right) \tag{1.2.11}$$

2) В случае $\alpha=0, \beta=1$ (задача Неймана) имеем условие разрешимости $\alpha_0=0$ или, что тоже самое

$$\alpha_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta=0\Rightarrow\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta=0 \tag{1.2.12}$$

Величина A произвольна и ее удобно обозначить через C. Находим все коэффициенты (k > 0):

$$A_k=\frac{\alpha_k}{k},\ B_k=\frac{\beta_k}{k}, k\ge 1.$$

Таким образом, решение внешней задачи Неймана имеет следующий вид

$$u(r,\varphi)=C+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{k}\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right)$$

1.3 О внешней краевой задаче для уравнения Лаплас с граничными операторами высокого порядка

Пусть, $\Omega=\left\{(x,y)\in R^2: x^2+y^2>1\right\}$ - единичный круг, $\partial\Omega=\left\{x^2+y^2=1\right\}$ - единичная окружность.

В области Ω рассмотрим следующую задачу:

$$\Delta u(x,y)=0, \qquad (x,y)\in\Omega \tag{1.3.1}$$

$$\left.\frac{\partial^m u(x,y)}{\partial \nu^m}\right|_{\partial\Omega}=f(x,y), \tag{1.3.2}$$

$$|u|\le C \tag{1.3.3}$$

где m – натуральное число, ν нормаль к $\partial\Omega$, $f(x,y)$ - функция определенная в области $\partial\Omega$.

Для области $\partial\Omega$ направление нормали ν совпадает с направлением радиус вектора $r=\sqrt{x^2+y^2}$. Поэтому переходя к полярным координатам $x=r\cos\varphi, \quad y=r\sin\varphi$, задачу (1.3.1) – (1.3.3) можно переписать в виде:

$$\Delta u(r,\varphi)=0, \qquad (r,\varphi)\in\Omega \tag*{(1.3.1)*}$$

$$\left.\frac{\partial^m U(r,\varphi)}{\partial r^m}\right|_{r=1}=f(\varphi), \qquad -\pi\le\varphi\le\pi \tag*{(1.3.2)*}$$

$$|u(r,\varphi)|\le C\,. \tag*{(1.3.3)*}$$

Так как, рассматриваемая область неограниченна, то для функции U стаим дополнительное условие на бесконечности, т.е. при $r\to\infty$ $|U(r,\varphi)|\le C$.

Решением задачи (1.3.1)* - (1.3.3)* называется гармоническая функция $U(r,\varphi)$ принадлежащая к классу $C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$, $r^m\frac{\partial^m}{\partial r^m}U(r,\varphi)\in C(\bar{\Omega})$ и удовлетворяющая условию $(1.3.2)^*$.

Если $U(r,\varphi)$ функция $U(r,\varphi)$ гармонична в области Ω то его можно представит в виде ряда

$$U(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right). \tag{1.3.4}$$

Тогда решение задачи (1.3.1)* - (1.3.3)* ищем в виде ряда (1.3.4). Подставим данную функцию в условие задачи. Сначала преобразуем оператор $\frac{\partial^m}{\partial r^m}$.

Если *m=2*, то для оператора $r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}$

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U \right) = r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + r\frac{\partial U}{\partial r} - r\frac{\partial U}{\partial r} = r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2},$$

или

$$r^2 \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial U}{\partial r} - U \right) \equiv r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right) U(r,\varphi).$$

Рассмотрим полученное равенство для любого натурального числа *m*.

Если *m=3*, то неслосложно получит, что

$$r^3 \frac{\partial^3 U}{\partial r^3} \equiv r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 2 \right) U(r,\varphi).$$

Предположим, что при *m=k* верно равенство

$$r^k \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \equiv r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 2 \right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r} - (k-1) \right) U(r,\varphi).$$

Введем обозначение

$$\Lambda U = r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 2 \right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r} - (k-1) \right) U(r,\varphi).$$

Тогда

$$r^{k+1} \frac{\partial^{k+1} U}{\partial r^{k+1}} = r^{k+1}\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^k U}{\partial r^k} \right] = r^{k+1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-k} \cdot r^k \frac{\partial^k U}{\partial r^k} \right] =$$

$$= r^{k+1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-k} \cdot r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 1 \right)\left(r\frac{\partial}{\partial r} - 2 \right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r} - (k-1) \right) U(r,\varphi) \right] =$$

$$=r^{k+1}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^{-k}\cdot\Lambda U\right]=r^{k+1}\cdot\left[(-k)\cdot r^{-k-1}\cdot\Lambda U+r^{-k}\frac{\partial}{\partial r}\Lambda U\right]=$$

$$=r\frac{\partial}{\partial r}\Lambda U-k\Lambda U=\left(r\frac{\partial}{\partial r}-k\right)\Lambda U=\left(r\frac{\partial}{\partial r}-k\right)r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(k-1)\right)U(r,\varphi)=$$

$$=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}-2\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(k-1)\right)\left(r\frac{\partial}{\partial r}-k\right)U(r,\varphi)$$

То есть, для любого натурального m

$$r^m\frac{\partial^m U}{\partial r^m}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-1)\right)U(r,\varphi).$$

Но, при $r=1$, т.е. в точках окружности $\partial\Omega$

$$\left.r^m\frac{\partial^m U}{\partial r^m}\right|_{r=1}=\frac{\partial^m U}{\partial r^m}.$$

Тогда в задаче (1.3.1)* - (1.3.3)* в место оператора $\frac{\partial^m U}{\partial r^m}$ можно рассмотрет оператор $r^m\frac{\partial^m U}{\partial r^m}$ или оператор

$$r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-1)\right).$$

Рассмотрим воздействие оператора $r^m\frac{\partial^m U}{\partial r^m}$ на функцию определенный равенством (1.3.4). Для этого, достаточно рассмотрет воздействие этого оператора на функцию r^{-k}.

$$r^m\frac{\partial^m r^{-k}}{\partial r^m}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-1)\right)r^{-k}=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-2)\right)\cdot\left[-k-(m-1)\right]r^{-k}=$$

$$=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-3)\right)\cdot\left[-k-(m-1)\right]\left[-k-(m-2)\right]r^{-k}=$$

$$=\ldots=-k(-k-1)\ldots(-k-(m-1))\cdot r^{-k}=(-1)^m k(k+1)\ldots\left[k+(m-1)\right],\qquad k\geq 0.$$

Так как

$$\Lambda_m=r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}-1\right)\ldots\left(r\frac{\partial}{\partial r}-(m-1)\right),\tag{1.3.5}$$

тогда

$$\Lambda_m r^{-k}=-k(-k-1)\ldots(-k-(m-1))\cdot r^{-k}=(-1)^m k(k+1)\ldots(k+(m-1))\cdot r^{-k}.$$

Поэтому

$$\Lambda_m U(r,\varphi)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^m k(k+1)\ldots(k+(m-1))r^{-k}\left(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi\right).\tag{1.3.6}$$

Предположим, что функция в краевом условии (1.3.2) $f(\varphi)$ периодическая функция. Тогда его можно разложит в ряд

$$f(\varphi)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(\alpha_k\cos k\varphi+\beta_k\sin k\varphi\right),$$

где

$$\alpha_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k\theta d\theta,\qquad \beta_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin k\theta d\theta.\tag{1.3.7}$$

Тогда из краевого условия

$$\Lambda_m U(r,\varphi)\Big|_{r=1} = \frac{\partial^m U}{\partial r^m}\Bigg|_{r=1} = f(\varphi)$$

для коэффициентов a_k, b_k получаем систему

$$\begin{cases} (-1)^m k(k+1)\ldots(k+(m-1))a_k = \alpha_k, \\ (-1)^m k(k+1)\ldots(k+(m-1))b_k = \beta_k \end{cases} \qquad (1.3.8)$$

Здесь для значений индексов $k = 0,1,\ldots m-1$ правая сторона системы (1.3.8) равны 0. Поэтому, для выполнения равенства

$$\frac{\partial^m U}{\partial r^m}\Bigg|_{r=1} = f(\varphi)$$

необходимо чтобы

$$\alpha_k = \beta_k = 0, \qquad k = 0,1,\ldots,m-1.$$

Учитывая значения коэффициентов (1.3.7), получим условие

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = 0. \qquad (1.3.9)$$

Значит, если функция $u(r,\varphi)$ определенная рядом (1.3.4) является решением краевой задачи (1.3.1)* - (1.3.3)*, то функция $f(\varphi)$ должна удовлетворят условию (1.3.9).

Докажем, что данное условие является достаточным условием для разрешимости задачи (1.3.1)* - (1.3.3)*.

Если выполняется условие (1.3.9), то в системе (1.3.8) коэффициенты a_k, b_k соответсвующий индексам $k = 0,1,\ldots m-1$ a_k, b_k являются посточнными, а остальные коэффициенты α_k, β_k определяются однозначно. Эти уравнения можно записат в виде

$$\begin{cases} a_k = \dfrac{(-1)^m \alpha_k}{k(k+1)\ldots(k+(m-1))}, \quad k \ge m \\ b_k = \dfrac{(-1)^m \beta_k}{k(k+1)\ldots(k+(m-1))}, \quad k \ge m. \end{cases} \tag{1.3.10}$$

Если, коэффициенты полученные из равенства (1.3.10) подставим в ря (1.3.4), то решение задачи можно представит в виде ряда

$$U(r,\varphi) = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{(-1)^m r^{-k}}{k(k+1)\ldots(k+(m-1))} (\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi) \tag{1.3.11}$$

Преобразуем последний ряд. Для этого, преобразуем коэффициенты

$$\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+(m-1))}.$$

Если использоват формулу (1.3.7), то

$$\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta \cdot \cos k\varphi d\theta + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta \cdot \sin k\varphi d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)[\cos k\theta \cdot \cos k\varphi + \sin k\theta \cdot \sin k\varphi] d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k(\theta - \varphi) d\theta$$

Тогда

$$\alpha_k \cos k\varphi + \beta_k \sin k\varphi = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k(\theta - \varphi) d\theta \tag{1.3.12}$$

Для любого натуральног m, при $k \ge m$

$$\frac{1}{k}=\int_0^1 s^{k-1}ds,\qquad \frac{1}{k+1}=\int_0^1 s^{k+1-1}ds=\int_0^1 s^k ds,\qquad \ldots,\qquad \frac{1}{k+(m-1)}=\int_0^1 s^{k+m-1-1}ds=\int_0^1 s^{k+m-2}ds.$$

Если введем обозначение $s=s_1\ldots s_m,\quad ds=ds_1\ldots ds_m$, то

$$\frac{1}{k(k+1)\ldots(k+(m-1))}=\int_0^1 ds_1\int_0^1 ds_2\ldots\int_0^1 s_1^{\,k-1}s_2^{\,k}\ldots s_m^{\,k+m-2}ds_m,\qquad k\ge m$$

Поэтому, функцию $U(r,\varphi)$ определенную равенством (1.3.11) можно записат в следующем виде

$$U(r,\varphi)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\int_0^1\ldots\int_0^1 s_1^{-1}\cdot s_2^{\,0}\cdot\ldots\cdot s_m^{\,m-2}\cdot\left(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\right)^k ds_1\cdot\ldots\cdot ds_m\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k(\theta-\varphi)d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\left\{\int_0^1\ldots\int_0^1 s_1^{-1}\cdot s_2^{\,0}\cdot\ldots\cdot s_m^{\,m-2}\left[\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\right)^k\cos k(\theta-\varphi)\right]ds_1\cdot\ldots\cdot ds_m\right\}d\theta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_m(r,\theta-\varphi)f(\theta)d\theta.$$

Здесь функция $P_m(r,\theta-\varphi)$ определяется формулой

$$P_m(r,\theta-\varphi)=\int_0^1\ldots\int_0^1 s_1^{-1}\cdot s_2^{\,0}\cdot\ldots\cdot s_m^{\,m-2}\left[\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\right)^k\cos k(\theta-\varphi)\right]ds_1\cdot\ldots\cdot ds_m$$

.

Если введем обозначения $t=s_1\ldots s_m,\quad \gamma=\theta-\varphi$, тогда

$$\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\right)^k\cos k(\theta-\varphi)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(t\cdot r^{-1}\right)^k\cos k\gamma\ .$$

Рассмотрим последний ряд.

$$\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(t\cdot r^{-1}\right)^k\cos k\gamma=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(t\cdot r^{-1}\right)^k\mathrm{Re}\left[\cos k\gamma+i\sin k\gamma\right]=$$

$$\mathrm{Re}\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m\left(t\cdot r^{-1}\right)^k e^{ik\gamma}=\mathrm{Re}\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^m z^k,\qquad z=\left(t\cdot r^{-1}\right)e^{i\gamma}.$$

Если $|z|<1$, то $\sum_{k=m}^{\infty}z^k$ - бесконечная геометрическая прогрессия.

$$\sum_{k=m}^{\infty}z^k=z^m+z^{m+1}+\ldots=z^m\cdot\sum_{k=m}^{\infty}z^k=\frac{z^m}{1-z}=g(z)$$

$$g(z)=\frac{z^m}{1-z}=\frac{\left[\left(tr^{-1}\right)\cdot e^{i\gamma}\right]^m}{1-tr^{-1}e^{i\gamma}}=\frac{z^m\cdot\left(1-tr^{-1}e^{-i\gamma}\right)}{\left(1-tr^{-1}e^{i\gamma}\right)\left(1-tr^{-1}e^{-i\gamma}\right)}=\frac{z^m\cdot\left(1-tr^{-1}e^{-i\gamma}\right)}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}=$$

$$=\frac{t^mr^{-m}\cdot e^{im\gamma}\left(1-tr^{-1}e^{-i\gamma}\right)}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}=\frac{t^mr^{-m}\cdot e^{im\gamma}-t^{m+1}r^{-(m+1)}\cdot e^{i(m-1)\gamma}}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}=$$

$$=\frac{t^mr^{-m}\cdot\cos m\gamma-t^{m+1}r^{-(m+1)}\cdot\cos(m-1)\gamma+it^mr^{-m}\cdot\sin m\gamma-it^{m+1}r^{-(m+1)}\cdot\sin(m-1)\gamma}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}=$$

$$=\frac{t^mr^{-m}\left[\cos m\gamma-tr^{-1}\cdot\cos(m-1)\gamma\right]}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}+i\,\frac{t^mr^{-m}\left[\sin m\gamma-tr^{-1}\cdot\sin(m-1)\gamma\right]}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}.$$

Отсюда

$$\mathrm{Re}\,g(z)=\frac{t^mr^{-m}\left[\cos m\gamma-tr^{-1}\cdot\cos(m-1)\gamma\right]}{1-2tr^{-1}\cos\gamma+t^2r^{-2}}\quad.$$

Поэтому

$$P_m(r,\theta-\varphi)=$$

$$=(-1)^m\int_0^1\ldots\int_0^1 s_1^{-1}\cdot s_2^{0}\cdot\ldots\cdot s_m^{m-2}\,\frac{(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m)^m\cdot r^{-m}\left[\cos m(\theta-\varphi)-s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m r^{-1}\cos(m-1)(\theta-\varphi)\right]}{1-2s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m r^{-1}\cos(\theta-\varphi)+(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m)^2 r^{-2}}\,ds_1\cdot\ldots\cdot ds_m=$$

$$=(-1)^m\int_0^1\ldots\int_0^1 s_1^{m-1}\cdot s_2^{m}\cdot\ldots\cdot s_m^{2m-2}\,\frac{r^{-m}\left[\cos m(\theta-\varphi)-s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\cos(m-1)(\theta-\varphi)\right]}{1-2s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m\cdot r^{-1}\cos(\theta-\varphi)+(s_1\cdot s_2\cdot\ldots\cdot s_m)^2 r^{-2}}\,ds_1\cdot\ldots\cdot ds_m$$

(1.3.13)

Тогда функция $U(r,\varphi)$ записывается в виде

$$U(r,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_m(r,\theta-\varphi)\,f(\theta)d\theta+\sum_{k=0}^{m-1}r^{-k}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi). \qquad (1.3.14)$$

Здесь a_k, b_k – любые постоянные.

Теорема. Пусть $f(\varphi)$ - непрырывная функция, *m=1,2,* $\ldots$. Тогда для разрещимости задачи (1.3.1)* - (1.3.3)* необходимо и достаточно выполнения условия

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=0.$$

Если решение задачи существует, то она определяется равенством (1.3.14).

2 ВОПРОСЫ РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ВНЕШНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ГРАНИЧНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ ДРОБНОГО ПОРЯДКА ВО ВНЕШНЕСТИ ШАРА

В этой главе работы во внешнест единичного шара исследуются вопросы разрешимости некоторых задач с операторами дробного порядка. В исследуемых задачах в качестве граничных операторов рассматриваются операторы дробного дифференцирования в смысле Римана- Лиувилля и Адамара.

2.1 Определение операторов дробного дифференцирования в бесконечных областях

В этом пункте мы приводим определение операторов дробного интегро-дифференцирования в смысле Римана-Лиувилля, Капуто, Адамара и Адамара - Капуто. Эти операторы будут действовать для функции определенных на оси $(0,+\infty)$.

Пусть $\Omega=\{x\in R^n:|x|>1\}$, $n\geq 2$ - внешность единичного шара, $\partial\Omega=\left\{x\in R^n:|x|=1\right\}$ - единичная сфера. Пусть, далее $u(x)$ - гармоническая функция в области Ω, $r=|x|$, ($|x|$ - норма в R^n), $\theta=\dfrac{x}{|x|}$ и $0<\alpha\leq 1$.

Для произвольного положительного числа α оператором дробного интегрирования в смысле Римана-Лиувилля порядка α называется выражение [66]

$$I_{-}^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{r}^{\infty}(\tau-r)^{\alpha-1}u(\tau\theta)d\tau. \qquad (2.1.1)$$

Так как $I_{-}^{\alpha}[u](x)\to u(x)$ почти всюду при $\alpha\to 0$, то по определению полагают $I_{-}^{0}[u](x)=u(x)$.

Оператор дробного дифференцирования естественным образом определяется как произведение оператора дробного интегрирования и оператора дифференцирования целого порядка. При этом в зависимости от последовательности умножения операторов изменяются их свойства.

Наиболее известным оператором дробного дифференцирования является оператор Римана-Лиувилля [66]

$$D_{-}^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dr}\right)\int_{r}^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}\,u(\tau\theta)\,d\tau . \qquad (2.1.2)$$

В этом определение оператор $\frac{d}{dr}$ означает оператор дифференцирования вида

$$\frac{d}{dr}=\sum_{j=1}^{n}\frac{x_j}{|x|}\frac{\partial}{\partial x_j}.$$

Вместе с оператором вида (2.1.2) мы иногда будем рассматривать и операторы оператор дробного дифференцирования вида

$${}_{C}D_{-}^{\alpha}[u](x)=-I^{1-\alpha}\left[\frac{d}{dr}[u]\right](x)\equiv\frac{(-1)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{r}^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}\frac{du(\tau\theta)}{d\tau}d\tau . \qquad (2.1.3)$$

Так как $I_{-}^{0}[u](x)=u(x)$, то

$$D_{-}^{1}[u](x)=\left(-\frac{d}{dr}\right)I_{-}^{0}[u](x)=-\frac{du}{dr}(x)=(-1)\,I_{-}^{0}\left[\frac{d}{dr}[u]\right](x)={}_{C}\,D_{-}^{1}[u](x),$$

т.е. при $\alpha=1$ производные (2.1.2) и (2.1.3) совпадают с производной по направлению вектора $r=|x|$.

Далее, аналогичным образом введем операторы интегро - дифференцирования в смысле Адамара.

Для произвольного положительного числа $\alpha>0$ оператором дробного интегрирования порядка α в смысле Адамара назовем выражение [67]:

$$J_{-}^{\alpha}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{\alpha-1}\frac{u(t\theta)}{t}dt .$$

Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,\dots$, $\delta=r\frac{d}{dr}\equiv\sum_{j=1}^{n}x_j\frac{\partial}{\partial x_j}$ - оператор Дирака и $\delta^{k}=\delta\left(\delta^{k-1}\right),\ k=2,3,\dots$.Следующее выражение

$${}_{H}D_{-}^{a}u(x)=(-d)^{m}J_{-}^{m-a}u(x)\equiv\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m-a)}\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}\int_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-a}\frac{u(tq)}{t}dt \qquad (2.1.4)$$

называется оператором дифференцирования порядка α в смысле Адамара.

В дальнейшем будем полагать $J_{-}^{0}u(x)=u(x)$.

Аналогичным образом можно ввести понятие оператора дифференцирования порядка α в смысле Адамара - Капуто. А именно

$$ {}_{HC}D_{-}^{\alpha}u(x)=(-1)^{m}J_{-}^{m-\alpha}\left[\delta^{m}[u]\right](x)\equiv\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha}\left(t\frac{d}{dt}\right)^{m}\frac{u(t\theta)}{t}dt \qquad (2.1.5)$$

И наконец можно рассматривать оператор дробного дифференцирования зависящий от двух параметров.

$$ {}_{HC}D_{\mu}^{\alpha}u(x)=(-1)^{m}J_{-}^{m-\alpha}\left[\delta_{\mu}^{m}[u]\right](x)\equiv\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{r}^{\infty}\left(\ln\frac{t}{r}\right)^{m-1-\alpha}\left(t\frac{d}{dt}-\mu\right)^{m}\frac{u(t\theta)}{t^{m+1}}dt \qquad (2.1.6)$$

где $\mu\geq 0$.

Подробное исследование свойств этих операторов в классе гармонических функций в круге и шаре будет проведена в последующих параграфах. Кроме того мы будем рассматривать применения свойств этих операторов для вопросов разрешимости дробных аналогов внешных краевых задач для уравнения Лапласа.

2.2 О разрешимости одной внешней краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля

В этом параграфе для уравнения Лапласа мы исследуем вопросы разрешимости одной внешней краевой задачи в круге. В качестве граничного оператора рассматривается оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля. Доказывается теорема о существования и единственности решения рассматриваемой задачи.

Пусть $\Omega_{+}=\{x\in R^{2}:|x|^{2}>1\}$ - внешность единичного круга, $x=(x_{1},x_{2}),\ r=|x|,\ \varphi=arctg\frac{x_{2}}{x_{1}}$.

Для любого $\alpha\in(0,1]$ в области Ω_{+} рассмотрим следующую задачу

Найти функцию $u(x) \in C^2(\Omega)$, *для которой функция* $r^\alpha D_-^\alpha[u](x)$ *непрерывна в* $\Omega_+ \cup \partial\Omega$ *и удовлетворяющую условиям*

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad (r,\varphi) \in \Omega, \tag{2.2.1}$$

$$D_-^\alpha[u](r,\varphi)\Big|_{r=1} = f(\varphi), -\pi \le \varphi < \pi, \tag{2.2.2}$$

$$|u(r,\varphi)| \le C, (r,\varphi) \to \infty, \tag{2.2.3}$$

где С- постоянное.

Известно (см.например [63]), что любая функция $u(x)$ принадлежащая классу $C^2(D)$ и удовлетворяющая уравнению Лапласа $\Delta u(x) = 0, x \in D$ называется гармонической функцией в области D.

Как и в случае задачи Неймана решение задачи (2.2.1) - (2.2.3) будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} r^{-k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{2.2.4}$$

где $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ - неизвестные коэффициенты.

Формально применим к функции (2.2.4) производную D_-^α. По определению этого оператора получим

$$D_-^\alpha[u](r,\varphi) = I_-^{1-\alpha}\left[\left(-\frac{d}{dr}\right)u\right](r,\varphi) \equiv \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_r^\infty (\tau - r)^{-\alpha}\left(-\frac{d}{d\tau}\right)u(\tau,\varphi)\,d\tau$$

Следовательно, нам необходимо вычислить производные

$D_-^\alpha[a_0] = a_0 D_-^\alpha[1]$ и $D_-^\alpha[r^{-k}]$ т.е. $D_-^\alpha[r^{-k}]$ для всех $k = 0, 1, 2, \dots$.

Если $k = 0$, то очевидно

$$D_-^\alpha[r^{-0}] = 0\,.$$

Поэтому

$$D_{-}^{\alpha}[a_0]=0. \qquad (2.2.5)$$

Пусть $k\geq 1$. Тогда по определению оператора D_{-}^{α} имеем

$$D_{-}^{\alpha}[r^{-k}]=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_r^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}\frac{d}{d\tau}\tau^{-k}d\tau=\frac{k}{\Gamma(1-\alpha)}\int_r^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}\tau^{-k-1}d\tau.$$

После замены переменных по формуле $\tau=r\xi$, последнее выражение можно записать в виде

$$D_{-}^{\alpha}[r^{-k}]=\frac{kr^{-k-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\int_1^{\infty}(1-\xi)^{-\alpha}\xi^{-k-1}d\xi.$$

Исследуем интеграл $\int_1^{\infty}(1-\xi)^{-\alpha}\xi^{-k-1}d\xi$. После замены переменных $\xi=\frac{t+1}{t}, d\xi=-\frac{dt}{t^2}$ данный интеграл можно записать в виде

$$\int_1^{\infty}(\xi-1)^{-\alpha}\xi^{-k-1}ds=\int_0^{\infty}\left(\frac{t+1}{t}-1\right)^{-\alpha}\left(\frac{t+1}{t}\right)^{-k-1}\frac{dt}{t^2}=\int_0^{\infty}t^{\alpha+k-1}(t+1)^{-k-1}dt.$$

Известно (см.например [8, с.23]), что для бета-функций Эйлера справедливо представление

$$\int_0^{\infty}t^{x-1}(1+t)^{-x-y}dt=B(x,y).$$

Тогда

$$\int_0^\infty t^{(\alpha+k)-1}\left(1+t\right)^{-(\alpha+k)-(1-\alpha)}dt = B\left(\alpha+k,1-\alpha\right) = \frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k+1\right)}.$$

Тогда

$$D_-^\alpha[r^{-k}] = \frac{k}{\Gamma\left(1-\alpha\right)}\frac{\Gamma\left(1-\alpha\right)\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k+1\right)}r^{-k-\alpha} = \frac{\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k\right)}r^{-k-\alpha}.$$

Итак, для всех $k \ge 1$ мы получили равенство

$$D_-^\alpha[r^{-k}] = \frac{\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k\right)}r^{-k-\alpha}. \tag{2.2.6}$$

Заметим, также что из последнего равенства вытекает

$$r^\alpha D_-^\alpha[r^{-k}] = \frac{\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k\right)}r^{-k}.$$

Таким образом,

$$D_-^\alpha[u](r,\varphi) = \sum_{k=1}^\infty r^{-k-1}\frac{\Gamma\left(k+\alpha\right)}{\Gamma\left(k\right)}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi) \tag{2.2.7}$$

Пусть $f(\varphi)$ – достаточно гладкая функция, разлагаемая в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^\infty\left(\alpha_k\cos k\varphi + \beta_k\sin k\varphi\right), \tag{2.2.8}$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos\ k\theta d\theta,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin\ k\theta d\theta,\ k=1,2,... \tag{2.2.9}$$

Далее, в силу граничного условия (2.2.2),

$$D_{-}^{\alpha}\ u(r,\varphi)\Big|_{r=1} = f(\varphi).$$

В силу этого равенства, сравнивая ряды (2.2.7) и (2.2.8) для всех $k = 1, 2, 3,...$ получаем

$$a_k = \gamma_k \alpha_k,\ b_k = \gamma_k \beta_k,\ \gamma_k = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)}.$$

Причем для $k = 0$ необходимо выполнение равенство

$$\alpha_0 = \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta\ = 0.$$

Далее, подставляя (2.2.9) в правую часть равенства (2.2.4), получаем следующее выражение для решения задачи

$$u(r,\varphi)\ = C + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}\gamma_k}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\ [\cos\ k\theta\cos\ k\varphi\ +\ \sin k\theta\sin\ k\varphi]d\theta.$$

Меняем местами знаки суммы и интеграла и обозначим через $P_\alpha(r,\varphi-\theta)$ следующий ряд

$$P_\alpha(r,t) = \sum_{k=1}^{\infty} r^k \gamma_k \cos\ k(\varphi - \theta). \qquad (2.2.10)$$

Далее, используя следующее представление

$$\gamma_k = \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}B(\alpha,k) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}(1+t)^{-\alpha-k}\,dt =$$

$$= \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(\xi-1)^{\alpha-1}\,\xi^{-\alpha-k}d\xi,$$

функцию $P_\alpha(r,t)$ представим в виде

$$P_\alpha(r,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty(\xi-1)^{\alpha-1}\,\xi^{-\alpha}\left[\sum_{k=1}^\infty(\xi r)^{-k}\cos\ k(\varphi-\theta)\right]ds.$$

Пусть $t=\dfrac{1}{\xi r},\gamma=\varphi-\theta,z=te^{i\gamma}$. Тогда

$$\sum_{k=1}^\infty(\xi r)^{-k}\cos\ k(\varphi-\theta)=\mathrm{Re}\sum_{k=1}^\infty z^k=\mathrm{Re}\frac{z}{1-z}.$$

Далее,

$$\frac{z}{1-z}=\frac{te^{i\gamma}}{1-te^{i\gamma}}=\frac{te^{i\gamma}\left(1-te^{-i\gamma}\right)}{\left(1-te^{i\gamma}\right)\left(1-te^{-i\gamma}\right)}=\frac{t\cos\gamma-t^2+it\sin\gamma}{1-2t\cos\gamma+t^2}=\frac{t\cos\gamma-t^2}{1-2t\cos\gamma+t^2}+i\frac{t\sin\gamma}{1-2t\cos\gamma+t^2}.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^\infty(\xi r)^{-k}\cos\ k(\varphi-\theta)=\frac{(\xi r)^{-1}\cos\gamma-(\xi r)^{-2}}{1-2(\xi r)^{-1}\cos\gamma+(\xi r)^{-2}}=\frac{\xi r\cos\gamma-1}{\xi^2r^2-2\xi r\cos\gamma+1}.$$

Значит,

$$u(r,\varphi)\ =C+\ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_\alpha(r,\varphi-\theta)f(\theta)d\theta,$$

где

$$P_\alpha(r,t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty(\xi-1)^{\alpha-1}\,\xi^{-\alpha}\,\frac{\xi r\cos\gamma-1}{\xi^2r^2-2\xi r\cos\gamma+1}ds.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема . Пусть $0<\alpha\le1,\ \ f(\varphi)\in C(\partial\Omega)$. Тогда для разрешимости задачи (2.2.1) – (2.2.3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta \ = 0$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r,\varphi) \ = C + \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ P_{\alpha}(r,\varphi-\theta)f(\theta)d\theta \, ,$$

где

$$P_{\alpha}(r,t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{\infty}(\xi-1)^{\alpha-1}\,\xi^{-\alpha}\,\frac{\xi r\cos\gamma-1}{\xi^{2}r^{2}-2\xi r\cos\gamma+1}ds.$$

2.3 О разрешимости внешней краевой задачи для уравнения Лапласа с граничным оператором Адамара в круге

В этом параграфе для уравнения Лапласа мы исследуем вопросы разрешимости второго вида внешней краевой задачи в круге. В этом случае в качестве граничного оператора рассматривается оператор дифференцирования дробного порядка в смысле Адамара. Доказывается теорема о существования и единственности решения рассматриваемой задачи.

Пусть $\Omega_{+} = \{x \in R^{2} : |x|^{2} > 1\}$ - внешность единичного круга, $x = (x_1, x_2),\ r = |x|,\ \varphi = arctg\frac{x_2}{x_1}$.

Для любого $\alpha \in (m-1, m], m = 1, 2, \ldots$ в области Ω_{+} рассмотрим следующую задачу

Найти функцию $u(x) \in C^{2}(\Omega)$, *для которой функция* $D_{-}^{\alpha}\left[u\right](x)$ *непрерывна в* $\Omega_{+} \cup \partial\Omega$ *и удовлетворяющую условиям*

$$\Delta u(r,\varphi) = 0, \quad (r,\varphi) \in \Omega, \qquad (2.3.1)$$

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r,\varphi)\Big|_{r=1} = f(\varphi), -\pi \le \varphi < \pi\,, \tag{2.3.2}$$

$$|u(r,\varphi)| \le C, (r,\varphi) \to \infty\,, \tag{2.3.3}$$

где С- постоянное, а D_{μ}^{α} будет означать оператор типа Адамара – Капуто, определенный равенством (1.1.6).

Как и в случае задачи с граничным оператором Римана – Лиувилля решение задачи (2.3.1) - (2.3.3) будем искать в виде

$$u(r,\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} r^{-k}(a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) \tag{2.3.4}$$

где $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \ldots$ - неизвестные коэффициенты.

Формально применим к функции (2.3.4) производную D_{μ}^{α}. По определению этого оператора получим

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r,\varphi) = \frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)} \int_r^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{r}\right)^{m-\alpha-1} \left(\tau\frac{d}{d\tau} - \mu\right)^m \tau^{-k} \frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}\,.$$

Легко видеть, что

$$\left(\tau\frac{d}{d\tau} - \mu\right)^m \tau^{-k} = (-1)^m (k+\mu)^m \tau^{-k}, k = 0, 1, \ldots$$

Далее, вычислим значение следующего интеграла

$$I_{\mu,k} = \int_r^{\infty} \left(\ln\frac{\tau}{r}\right)^{m-1-\alpha} \tau^{-(k+\mu+1)} d\tau, k = 1, 2, \ldots\,.$$

После замены переменных $\xi = \ln\frac{r}{\tau}, \tau = re^{\xi}, d\tau = re^{\xi}d\xi$ имеем

$$I_{\mu,k} = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_r^{\infty}\left(\ln\frac{\tau}{r}\right)^{m-1-\alpha}\tau^{-(k+\mu+1)}d\tau = \frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_0^{\infty}\xi^{m-1-\alpha}e^{-(k+\mu)\xi}d\xi\cdot r^{-(k+\mu)} =$$

$$= \frac{r^{-(k+\mu)}}{\Gamma(m-\alpha)}(k+\mu)^{\alpha-m}\int_0^{\infty}t^{m-1-\alpha}e^{-t}dt = \frac{(k+\mu)^{\alpha-m}r^{-(k+\mu)}}{\Gamma(m-\alpha)}\Gamma(m-\alpha) = (k+\mu)^{\alpha-m}r^{-(k+\mu)}$$

Таким образом,

$$D_{\mu}^{\alpha}[r^{-k}] = (k+\mu)^{\alpha}r^{-(k+\mu)}. \qquad (2.3.5)$$

Тогда, применяя к функции (2.3.4) оператор D_{μ}^{α} получим

$$D_{\mu}^{\alpha}[u](r,\varphi) = \frac{a_0}{2\mu^{\alpha}} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{(k+\mu)^{\alpha}}(a_k\cos k\varphi + b_k\sin k\varphi) \qquad (2.3.6)$$

Пусть граничная функция $f(\varphi)$ разлагается в ряд Фурье

$$f(\varphi) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(\alpha_k\cos k\varphi + \beta_k\sin k\varphi), \qquad (2.3.7)$$

где

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta,\ \alpha_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\cos k\theta d\theta,\ \beta_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)\sin k\theta d\theta, k = 1,2,\ldots .$$

Тогда используя граничное условие (2.3.2), разложения (2.3.6) и (2.3.7) при $\mu \neq 0$ имеем

$$a_0 = \frac{\alpha_0}{2\mu^\alpha}, a_k = \frac{\alpha_k}{(k+\mu)^\alpha}, b_k = \frac{\beta_k}{(k+\mu)^\alpha}, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots$$

Если $\mu = 0$, то

$$a_k = \frac{\alpha_k}{k^\alpha}, b_k = \frac{\beta_k}{k^\alpha}, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots,$$

а a_0- произвольное число. Причем для выполнения граничного условия от функции $f(\varphi)$ нужно требовать выполнения необходимого условия разрешимости

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta = 0.$$

Подставляя найденные коэффициенты в правый часть равенства (2.3.4) получаем

$$u(r,\varphi) = \frac{\alpha_0}{2\mu^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{-k}}{(k+\mu)^\alpha} (a_k \cos k\varphi + b_k \sin k\varphi) = \frac{1}{2\pi\mu^\alpha} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) d\theta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{-k}}{(k+\mu)^\alpha} \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \cos k\theta d\theta \cdot \cos k\varphi + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \sin k\theta d\theta \cdot \sin k\varphi \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) \left\{ \frac{1}{2\mu^\alpha} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r^{-k}}{(k+\mu)^\alpha} \cos k(\theta - \varphi) \right\} d\theta.$$

Обозначим

$$P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{2\mu^{\alpha}}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{(k+\mu)^{\alpha}}\cos k\left(\theta-\varphi\right). \qquad (2.3.8)$$

Легко показать, что для коэффициентов $\frac{1}{(k+\mu)^{\alpha}}, k=0,1,2,\ldots$ справедливо равенство

$$\frac{1}{(k+\mu)^{\alpha}}=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{-k}\,\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}} \qquad (2.3.8)$$

Действительно, как и в случае вычисления значения интегралов $I_{\alpha,\mu}$ заменой переменных, получаем

$$\int_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\tau^{-(k+\mu+1)}d\tau=\int_{0}^{\infty}\xi^{\alpha-1}e^{-(k+\mu)\xi}d\tau=\int_{0}^{\infty}t^{\alpha-1}e^{-t}d\tau=(k+\mu)^{-\alpha}\Gamma(\alpha).$$

Далее, используя в представление (2.3.8) для функции $P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi)$ при $\mu>0$ получим

$$P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tau r)^{-k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)\right)\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

Далее,

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(\tau r)^{-k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)=\left(t=(\tau r)^{-1}\right)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}t^{k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}-\frac{1}{2},\, z=te^{i(\theta-\varphi)}.$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z},$$

то

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \operatorname{Re}\frac{1}{1-z} = \operatorname{Re}\frac{1-te^{-i(\theta-\varphi)}}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2} = \frac{1-tcos(\theta-\varphi)}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2}.$$

Тогда

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} t^k \cos k\left(\theta-\varphi\right) = \frac{1-tcos(\theta-\varphi)}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2}-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1-t^2}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^2} =$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-(\tau r)^{-2}}{1-2(\tau r)^{-1}\cos(\theta-\varphi)+(\tau r)^{-2}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{\tau^2 r^2-1}{\tau^2 r^2-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}.$$

Таким образом,

$$P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\frac{\tau^2 r^2-1}{\tau^2 r^2-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

Далее, если $\mu=0$, то

$$u(r,\varphi) = C+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{k^{\alpha}}(a_k\cos k\varphi+b_k\sin k\varphi) = C+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{k^{\alpha}}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\cos k\theta d\theta\cdot\cos k\varphi+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\sin k\theta d\theta\cdot\sin k\varphi\right)=$$

$$=C+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)\left\{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{r^{-k}}{k^{\alpha}}\cos k\left(\theta-\varphi\right)\right\}d\theta .$$

В этом случае

$$P_{\alpha,0}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{1}^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\tau r)^{-k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)\right)\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}} .$$

Отсюда,

$$\sum_{k=1}^{\infty}(\tau r)^{-k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)=\left(t=(\tau r)^{-1}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}t^{k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)=$$

$$=\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}-1,\ z=te^{i(\theta-\varphi)} .$$

Так как

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}=\frac{1}{1-z},$$

то

$$\operatorname{Re}\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}=\operatorname{Re}\frac{1}{1-z}=\operatorname{Re}\frac{1-te^{-i(\theta-\varphi)}}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^{2}}=\frac{1-tcos(\theta-\varphi)}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^{2}} .$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{\infty}t^{k}\cos k\left(\theta-\varphi\right)=\frac{1-tcos(\theta-\varphi)}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^{2}}-1=\frac{tcos(\theta-\varphi)-t^{2}}{1-2t\cos(\theta-\varphi)+t^{2}}=$$

$$=\frac{(\tau r)^{-1}cos(\theta-\varphi)-(\tau r)^{-2}}{1-2(\tau r)^{-1}\cos(\theta-\varphi)+(\tau r)^{-2}}=\frac{\tau rcos(\theta-\varphi)-1}{\tau^{2}r^{2}-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1} .$$

Таким образом,

$$P_{\alpha,0}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\frac{\tau r\cos(\theta-\varphi)-1}{\tau^2r^2-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

Таким образом, мы доказали следующее утверждение

Теорема . Пусть $m-1<\alpha\le m, m=1,2,...,\mu\ge 0$, $f(\varphi)\in C(\partial\Omega)$. Тогда

1) если $\mu>0$, то решение задачи (2.3.1) – (2.3.3) существует, единственно и представляется в виде

$$u(r,\varphi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,\mu}(r,\varphi-\theta)f(\theta)d\theta,$$

где

$$P_{\alpha,\mu}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}\left(\ln\tau\right)^{\alpha-1}\frac{\tau^2r^2-1}{\tau^2r^2-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

2) если $\mu=0$, то для разрешимости задачи (2.3.1) – (2.3.3) необходимо и достаточно выполнение условия

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)d\theta=0$$

Если решение задачи существует, то оно единственно с точностью до постоянного слагаемого и представляется в виде

$$u(r,\varphi)=C+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}P_{\alpha,0}(r,\varphi-\theta)f(\theta)d\theta,$$

где

$$P_{\alpha,0}(r,\theta-\varphi)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(\ln\tau)^{\alpha-1}\frac{\tau r cos(\theta-\varphi)-1}{\tau^2r^2-2\tau r\cos(\theta-\varphi)+1}\frac{d\tau}{\tau^{\mu+1}}.$$

2.4 О разрешимости внешней задачи с оператором Римана-Лиувилля во внешности шара

В этом параграфе работы в классе гармонических вне шара функций изучаются свойства некоторых интегро-дифференциальных операторов дробного порядка. В качестве применения полученных свойств рассматриваются вопросы разрешимости некоторых внешных краевых задач для уравнения Лапласа. Доказываются теоремы о существования и единственности решения рассматриваемых задач.

Пусть $\Omega=\{x\in R^n:|x|>1\}$, $n>2$ - внешность единичного шара, $\partial\Omega=\left\{x\in R^n:|x|=1\right\}$ - единичная сфера. Пусть, далее $u(x)$ - гармоническая функция в области Ω, $r=|x|$, ($|x|$ - норма в R^n), $\theta=\frac{x}{|x|}$.

Пусть $0<\alpha\le 1$ и D_-^{α} - операторо Римана-Лиувиляя порядка α . Введем обозначение

$$B_-^{\alpha}[u](x)=r^{\alpha}D_-^{\alpha}[u](x).$$

Легко показать, что для всех $\alpha,\beta\in(0,1]$ операторы B_-^{α} и B_-^{β} являются коммутативными. Действительно

$$B_-^{\alpha}[u](x)=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dr}\right)\int_r^{\infty}(\tau-r)^{-\alpha}u(\tau\theta)\,d\tau \underset{\tau=rs}{=}$$

$$=\frac{r^{\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(-\frac{d}{dr}\right)\int_1^{\infty}r^{1-\alpha}(s-1)^{-\alpha}u(sr\theta)\,ds=$$

$$=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)\int_1^{\infty}(s-1)^{-\alpha}u(sx)\,ds.$$

Теперь если учтем , что операторы $1-\alpha+r\dfrac{d}{dr}$ и $1-\beta+r\dfrac{d}{dr}$ являются коммутативными, то

$$B_{-}^{\alpha}\left[B_{-}^{\beta}[u]\right](x)=-\frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_{1}^{\infty}(s-1)^{-\alpha}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)B_{-}^{\beta}[u](sx)\,ds=$$

$$=\int_{1}^{\infty}\frac{(s-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)\int_{1}^{\infty}\frac{(t-1)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\left(1-\beta+r\frac{d}{dr}\right)u(stx)\,dtds=$$

$$=\int_{1}^{\infty}\int_{1}^{\infty}\frac{(s-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\frac{(t-1)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)\left(1-\beta+r\frac{d}{dr}\right)u(stx)\,dtds=$$

$$=\int_{1}^{\infty}\frac{(s-1)^{-\beta}}{\Gamma(1-\beta)}\left(1-\beta+r\frac{d}{dr}\right)\int_{1}^{\infty}\frac{(t-1)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\left(1-\alpha+r\frac{d}{dr}\right)u(tsx)\,dsdt=B_{-}^{\beta}\left[B_{-}^{\alpha}[u]\right](x).$$

Следовательно, в общем случае

$$B_{-}^{\alpha}\left[B_{-}^{\beta}[u]\right](x)\neq B_{-}^{\alpha+\beta}[u](x).$$

Рассмотрим вектор $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, где компоненты этого вектора удовлетворяют условиям $0<\alpha_j\leq 1,\ j=1,\ldots,m.$ Используя этот вектор введем более общий оператор

$$B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)=B_{-}^{\alpha_1}\left[B_{-}^{\alpha_2}\ldots B_{-}^{\alpha_m}[u]\right](x)=B_{-}^{\alpha_m}\left[B_{-}^{\alpha_{m-1}}\ldots B_{-}^{\alpha_1}[u]\right](x).$$

Изучим свойства оператора $B_{-}^{\vec{\alpha}}$.

Пусть $H_k(x)$ - однородный гармонический полином степени $-k$, при $k\in N$, т.е. обладает свойствами

$$\Delta H_k(x)=0,$$

$$H_k(x) = H_k(r\theta) = r^{-k} H_k(\theta).$$

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.4.1. Пусть $0 < \alpha \le 1$ и $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $-k$, при $k \in N$. Тогда справедливы равенства

$$B_-^\alpha\left[H_k\right](x) = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)} H_k(x)$$

Доказательство. Пусть $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $-k$ и $k \in N$. Тогда, в соответствии с определением оператора $B_-^\alpha = r^\alpha D_-^\alpha$ запишем

$$B_-^\alpha\left[H_k\right](x) = -\frac{r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_r^\infty (\tau - r)^{-\alpha} H_k(\tau\theta)\, d\tau = -\frac{H_k(\theta) r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} \int_r^\infty (\tau - r)^{-\alpha} \tau^{-k} d\tau \underset{\tau = rs}{=}$$

$$= -\frac{H_k(\theta) r^\alpha}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dr} r^{1-\alpha-k} \int_1^\infty (s-1)^{-\alpha} s^{-k} ds = -\frac{H_k(\theta)(1-\alpha-k) r^{-k}}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty (s-1)^{-\alpha} s^{-k} ds =$$

$$= -\frac{H_k(x)(1-\alpha-k)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_1^\infty (s-1)^{-\alpha} s^{-k} ds = \begin{vmatrix} s = \dfrac{t+1}{t}, ds = -\dfrac{dt}{t^2} \\ s = 1, \Rightarrow t = \infty \\ s = \infty, \Rightarrow t = 0 \\ \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{H_k(x)(1-\alpha-k)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{t+1}{t} - 1\right)^{-\alpha} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{-k} \frac{dt}{t^2} = -\frac{H_k(x)(1-\alpha-k)}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^\infty t^{\alpha+k-2} (t+1)^{-k} dt.$$

Известно, что для бета-функций справедливо представление

$$\int_0^\infty t^{x-1} (1+t)^{-x-y} dt = B(x,y).$$

Тогда

$$-\frac{H_k(x)(1-\alpha-k)}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^{\infty} t^{\alpha+k-2}(t+1)^{-k}\,dt = \frac{H_k(x)(k+\alpha-1)}{\Gamma(1-\alpha)}B(k+\alpha-1,1-\alpha) = \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)}H_k(x).$$

Лемма доказана.

Введем обозначение

$$\gamma_{k,m} = \frac{\Gamma(k+\alpha_1)\cdots\Gamma(k+\alpha_m)}{\Gamma^m(k)}.$$

Следствие 2.4.1. Пусть $\vec{\alpha} = (\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$ и $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $-k$. Тогда, справедливы равенства

$$B_{-}^{\vec{\alpha}}[H_k](x) = \gamma_{k,m}H_k(x). \qquad (2.4.1)$$

Следствие доказывается последовательным применением леммы 1.

Лемма 2.4.1. Пусть $u(x)$ – гармоническая в области Ω функция, тогда функция $B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)$ также является гармоническим в Ω.

Доказательство. Пусть $u(x)$ – гармоническая функция в области Ω. Известно (см. [9, с.338]), что функция $u(x)$ представляется в виде

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x), \qquad (2.4.2)$$

где $\{H_k^{(i)}(x), i=1,\ldots,h_k\}$ – полная система однородных гармонических полиномов, а $u_k^{(i)}$ – коэффициенты разложения (2.4.2). Применяя формально оператор $B_{-}^{\vec{\alpha}}$ к ряду (2.4.2) и учитывая равенство (2.4.1) получим

$$B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{\Gamma(k+\alpha_1)\cdots\Gamma(k+\alpha_m)}{\Gamma^m(k)}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x). \qquad (2.4.3)$$

В силу асимптотической оценки [10, с. 366] $\dfrac{\Gamma(k+\alpha_j)}{\Gamma(k)}\sim k^{1-\alpha_j}$ при $k\to\infty$, $0<\alpha_j\le 1,\ j=1,\ldots,m$ получаем $\gamma_{k,m}\sim k^{m-\alpha_1-\cdots-\alpha_m}$ когда $k\to\infty$ и значит $\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{h_k\gamma_{k,m}}=1$. Тогда радиус сходимости ряда (2.4.3) совпадает с радиусом сходимости ряда (2.4.2) и поэтому его сумма представляет собой гармоническую в Ω функцию. Лемма доказана.

Лемма 2.4.2. Пусть $H_k(x)$ – однородный гармонический полином степени $-k$ при $k=1,2,\ldots$, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j\le 1,\ j=1,\ldots,m$. Тогда справедливо равенство

$$\frac{1}{\gamma_{k,m}}H_k(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_1^{\infty}ds_1\int_1^{\infty}ds_2\cdots\int_1^{\infty}(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}H_k(sx)ds_m, \qquad (2.4.4)$$

где $(1-s)^{\vec{\alpha}-1}=(1-s_1)^{\alpha_1-1}\cdots(1-s_m)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\vec{\alpha}}=s_1^{-\alpha_1}\cdots s_m^{-\alpha_m}$, $sx=(s_1\cdots s_m x_1,\ldots,s_1\cdots s_m x_n)$.

Доказательство. Применяя формулы для интегралов Эйлера, нетрудно показать

$$\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{k-\alpha}ds=\frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)}. \qquad (2.4.5)$$

Если $s=s_1\cdots s_m$, то в силу однородности полинома $H_k(x)$ имеем $H_k(sx)=s^{-k}H_k(x)$, где $s^{-k}=s_1^{-k}s_2^{-k}\cdots s_m^{-k}$ и значит

$$\int_1^{\infty}ds_1\int_1^{\infty}ds_2\cdots\int_1^{\infty}(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}H_k(sx)ds_m=\int_1^{\infty}ds_1\int_1^{\infty}ds_2\cdots\int_1^{\infty}(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{k-\vec{\alpha}}H_k(x)ds_m=$$

$$=\int_1^{\infty}(s_1-1)^{\alpha_1-1}s_1^{k-\alpha_1}ds_1\cdots\int_1^{\infty}(s_m-1)^{\alpha_m-1}s_m^{k-\alpha_m}ds_mH_k(x).$$

Далее, применяя равенство (2.4.5) получим

$$H_k(x)\int_1^\infty (s_1-1)^{\alpha_1-1} s_1^{k-\alpha_1} ds_1 \cdots \int_1^\infty (s_m-1)^{\alpha_m-1} s_m^{k-\alpha_m} ds_m = \frac{\Gamma^m(k)}{\Gamma(k+\alpha_1)\ldots\Gamma(k+\alpha_m)} H_k(x).$$

Отсюда следует, что

$$\int_1^\infty \frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\int_1^\infty \frac{ds_2}{\Gamma(\alpha_2)}\cdots\int_1^\infty \frac{(s-1)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma(\alpha_m)} s^{-\bar{\alpha}} H_k(sx)\, ds_m = H_k(x)\prod_{j=1}^m \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha_j)} = \frac{1}{\gamma_{k,m}} H_k(x)$$

и значит равенство (2.4.4) доказано. Лемма доказана.

Лемма 2.4.3. Пусть функция $u(x)$ – гармоническая в Ω, $0<\alpha\le 1$. Тогда, для любого $x\in\Omega$ справедливо равенство

$$u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty (s-1)^{\alpha-1} s^{-\alpha} B_-^\alpha[u](sx)\, ds\,. \tag{2.4.6}$$

Доказательство. Представим гармоническую в Ω функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^{h_k} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x)\,. \tag{2.4.7}$$

Далее, учитывая утверждения леммы 2.4.1 и формулу (2.4.5), а также равномерную сходимость ряда (2.4.7) по x при $|x|\ge\rho>1$ (поэтому для этих $x\in\Omega$ суммирование по x и интегрирование по $s_1,\ldots,s_m$ можно поменять местами) его можно привести к виду

$$u(x) = \sum_{k=1}^\infty \sum_{i=1}^{h_k} \frac{\Gamma(k)}{\Gamma(k+\alpha)} \frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)} u_k^{(i)} H_k^{(i)}(x) =$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k)}H_k(sx)\,ds=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{u_k^{(i)}}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B_-^{\alpha}[H_k](sx)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{1}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B_-^{\alpha}\left[\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}\right](sx)\,ds=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^{1}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}B_-^{\alpha}[u](sx)\,ds.$$

Значить, равенство (2.4.6) доказана. Лемма доказана.

Лемма 2.4.4. Пусть функция $u(x)$ – гармоническая в Ω, $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j<1$. Тогда, для любого $x\in\Omega$ справедливо равенство

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_1^{\infty}ds_1\int_1^{\infty}ds_2\cdots\int_1^{\infty}(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}B_-^{\vec{\alpha}}[u](sx)\,ds_m. \qquad (2.4.8)$$

где - $\vec{\alpha}=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$, $0<\alpha_j\le 1$, $(s-1)^{\vec{\alpha}-1}=(s-1)^{\alpha_1-1}\cdots(s-1)^{\alpha_m-1}$, $s^{-\vec{\alpha}}=s_1^{-\alpha_1}\cdots s_m^{-\alpha_m}$, $sx=(s_1\cdots s_m x)$

Доказательство. Представим гармоническую в Ω функцию $u(x)$ в виде ряда

$$u(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{h_k}\frac{1}{\gamma_{k,m}}\gamma_{k,m}u_k^{(i)}H_k^{(i)}(x). \qquad (2.4.9)$$

Далее, учитывая равенства (2.4.1), (2.4.4) и равномерную сходимость ряда (2.4.9) по x при $|x|\ge\rho>1$, как в доказательстве теоремы 2, его можно привести к виду (2.4.8).

Лемма доказана.

Лемма 2.4.4, а точнее равенство (2.4.8) позволяет определить следующий оператор

$$B_{-}^{-\bar{\alpha}}\left[u\right]\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_m\right)}\int\limits_1^{\infty}ds_1\int\limits_1^{\infty}ds_2\cdots\int\limits_1^{\infty}\left(s-1\right)^{\bar{\alpha}-1}s^{-\bar{\alpha}}u\left(sx\right)ds_m. \qquad (2.4.10)$$

Лемма 2.4.5. Если функция $u(x)$ – гармоническая вне шаре Ω, тогда функция $B_{-}^{-\bar{\alpha}}[u](x)$ также является гармонической в Ω.

Доказательство. Непосредственным подсчетом находим, что в шаре Ω верно равенство

$$\Delta B_{-}^{-\bar{\alpha}}\left[u\right]\left(x\right)=\int\limits_1^{\infty}\frac{ds_1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)}\ldots\int\limits_1^{\infty}\frac{\left(s-1\right)^{\bar{\alpha}-1}}{\Gamma\left(\alpha_m\right)}s^{-\bar{\alpha}}\Delta u\left(sx\right)ds_m=0, x\in\Omega.$$

Следовательно, функция $B_{-}^{-\bar{\alpha}}[u](x)$ – гармоническая в Ω. Лемма доказана.

Основное свойство оператора $B_{-}^{-\bar{\alpha}}[u](x)$ сформулировано в следующем утверждении.

Лемма 2.4.6. Если функция $u(x)$ – гармоническая в области Ω, то справедливы равенства

$$B_{-}^{-\bar{\alpha}}\left[B_{-}^{\bar{\alpha}}[u]\right]\left(x\right)=u\left(x\right),\ B_{-}^{\bar{\alpha}}\left[B_{-}^{-\bar{\alpha}}\left[u\right]\right]\left(x\right)=u\left(x\right).$$

Доказательство. Докажем первое равенство леммы. Применим к функции $B_{-}^{\bar{\alpha}}[u](x)$ оператор $B_{-}^{-\bar{\alpha}}$. По определению оператора $B_{-}^{-\bar{\alpha}}[u](x)$ (2.4.10) и в соответствии с утверждением Леммы 2.4.4 будем иметь

$$B_{-}^{-\bar{\alpha}}\left[B_{-}^{\bar{\alpha}}[u]\right]\left(x\right)=\frac{1}{\Gamma\left(\alpha_1\right)\cdots\Gamma\left(\alpha_m\right)}\int\limits_1^{\infty}ds_1\ldots\int\limits_1^{\infty}\left(s-1\right)^{\bar{\alpha}-1}s^{-\bar{\alpha}}B_{-}^{\bar{\alpha}}\left[u\right]\left(sx\right)ds_m=u\left(x\right).$$

Для доказательства второго равенства леммы применим оператор $B_{-}^{\alpha_1}\left[u\right]\left(x\right)=r^{\alpha_1}D_{-}^{\alpha_1}\left[u\right]\left(x\right)$ к функции $B_{-}^{\bar{\alpha}}\left[u\right]\left(x\right)$. Будем иметь

$$B_-^{\alpha_1}\left[B_-^{-\vec{\alpha}}[u]\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}B_-^{\alpha_1}\left[\int_1^\infty ds_1\ldots\int_1^\infty (s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}u(sx)ds_m\right]=$$

$$=\frac{-r^{\alpha_1}}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\frac{d}{dr}\int_r^\infty\frac{(\tau-r)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\left[\int_1^\infty ds_1\ldots\int_1^\infty (s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}u(s\tau\theta)ds_m\right]d\tau=$$

$$=-\int_1^\infty\frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\ldots\int_1^\infty\frac{(s-1)^{\vec{\alpha}-1}}{\Gamma(\alpha_m)}s^{-\vec{\alpha}}\left[r^{\alpha_1}\frac{d}{dr}\int_r^\infty\frac{(\tau-r)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}u(s\tau\theta)d\tau\right]ds_m.$$

Далее, нетрудно убедится в следующих равенствах

$$r^{\alpha_1}\frac{d}{dr}\int_r^\infty\frac{(\tau-r)^{-\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}u(s\tau\theta)d\tau\underset{s\tau=t}{=}\frac{r^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int_{rs}^\infty\left(\frac{t}{s}-r\right)^{-\alpha_1}u(t\theta)\frac{dt}{s}=$$

$$=\frac{r^{\alpha_1}s^{\alpha_1-1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{dr}\int_{rs}^\infty(t-rs)^{-\alpha_1}u(t\theta)dt=\frac{(rs)^{\alpha_1}}{\Gamma(1-\alpha_1)}\frac{d}{d(rs)}\int_{rs}^\infty(t-rs)^{-\alpha_1}u(t\theta)dt=B_-^{\alpha_1}[u](sx),$$

где учтено, что $\theta=\frac{x}{|x|}=\frac{sx}{|sx|}$. Поэтому будем иметь

$$B_-^{\alpha_1}\left[B_-^{-\vec{\alpha}}[u]\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_1^\infty ds_1\ldots\int_1^\infty(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}B_-^{\alpha_1}[u](sx)ds_m.$$

Следовательно, вспоминая определение оператора $B_-^{\vec{\alpha}}[u](x)=B_-^{\alpha_1}\left[B_-^{\alpha_2}\ldots B_-^{\alpha_m}[u]\right](x)$, можно записать

$$B_-^{\vec{\alpha}}\left[B_-^{-\vec{\alpha}}[u]\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha_1)\cdots\Gamma(\alpha_m)}\int_1^\infty ds_1\ldots\int_1^\infty(s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}B_-^{\vec{\alpha}}[u](sx)ds_m=u(x).$$

Второе равенство леммы доказано.

Таким образом из утверждения леммы 2.4.6 следует, что операторы $B_{-}^{\bar{\alpha}}$ и $B_{-}^{-\bar{\alpha}}$ являются взаимно обратными на гармонических в Ω функциях.

Теперь перейдем к постановке и решению некоторых внешних краевых задач, включающих значения оператора $B_{-}^{\bar{\alpha}}$ на границе.

Задача 1. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_{-}^{\alpha}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$ и удовлетворяет на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_{-}^{\alpha}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega,$$

$$|u(x)| \to 0, |x| \to \infty. \tag{2.4.11}$$

Задача 2. Найти гармоническую в области Ω функцию $u(x)$, для которой функция $B_{-}^{\bar{\alpha}}[u](x)$ непрерывна в $\overline{\Omega}$, удовлетворяет условию (2.4.11) и на сфере $\partial\Omega$ равенству

$$B_{-}^{\bar{\alpha}}[u](x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega.$$

Нетрудно заметить, что при $\alpha = 1$ задача 1 совпадает с внешней задачей Неймана, а при $\alpha = 0$, с внешней задачей Дирихле. А задача 2 при $\alpha_j = 1, j = 1, ..., m$ совпадает с внешней задачи с граничным оператором вида

$$(-1)^m \underbrace{r\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}...\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)\right)}_{m} = (-1)^m \left(r\frac{\partial}{\partial r}\right)^m.$$

Пусть $v(x)$ – классическое решение задачи Дирихле в Ω

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega, \\ v(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ |v(x)| \to 0, |x| \to \infty. \end{cases} \tag{2.4.12}$$

Справедливы следующие основные утверждения.

Теорема 2.4.1. Для любой $f(x)\in C(\partial\Omega)$ решение задачи 1 существует, единственно и представляется в виде

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}v(sx)ds, \tag{2.4.13}$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (2.4.12).

Доказательство теоремы. Пусть решение задачи 1 существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор B_-^{α} и обозначим $B_-^{\alpha}[u](x)=v(x)$. Ясно, что $v(x)\in C(\partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$ – гармоническая функция в Ω, то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ – тоже гармоническая в области Ω и

$$v(x)\big|_{\partial\Omega}=B_-^{\alpha}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=f(x).$$

Если для функции $v(x)$ выполняется условия $|v(x)|\to 0, |x|\to\infty.$ Тогда

$$\lim_{|x|\to\infty}|u(x)|=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(s-1)^{\alpha-1}s^{-\alpha}\lim_{|x|\to\infty}|v(sx)|ds=0.$$

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (2.4.12). Причем, если $f(x)\in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x)\in C(\overline{\Omega})$. Применим к равенству $B_-^{\alpha}[u](x)=v(x)$ оператор $B_-^{-\alpha}$ из (2.4.10). Поскольку интеграл вида $\int_1^{\infty}(\tau-1)^{\alpha-1}\tau^{-\alpha}v(\tau x)d\tau$ при $\alpha\in(0,1]$ имеет слабые особенности при $\tau=1$ и $\tau=\infty$, то он является непрерывной функцией по $x\in\overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x)\in C(\overline{\Omega})$. Значит, оператор $B_-^{-\alpha}$ применим к функциям из $C(\overline{\Omega})$. В силу первого равенства (2.4.6) получим (2.4.13).

Пусть наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (2.4.12) при $f(x)\in C(\partial\Omega)$. Ясно что $v(x)\in C(\overline{\Omega})$. Рассмотрим функцию $u(x)=B_{-}^{-\alpha}[v](x)$. В силу второго равенства из леммы 2.4.6 будем иметь $B_{-}^{\alpha}[u](x)=B_{-}^{\alpha}\left[B_{-}^{-\alpha}[v]\right](x)=v(x)$.

Значит, функция $u(x)$ – гармоническая в Ω и $B_{-}^{\alpha}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=v(x)\big|_{\partial\Omega}=f(x)$. Теорема доказана.

Теорема 2.4.2. Для любой $f(x)\in C(\partial\Omega)$ решение задачи 2 существует, единственно и представляется в виде

$$u(x)=\int_1^\infty \frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\ldots\int_1^\infty \frac{(s-1)^{\vec{\alpha}-1}}{\Gamma(\alpha_m)}s^{-\vec{\alpha}}v(sx)\,ds_m, \tag{2.4.14}$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (2.4.12).

Доказательство. Пусть решение задачи 2 существует и это функция - $u(x)$. Применим к $u(x)$ дифференциальный оператор $B_{-}^{\vec{\alpha}}$ и обозначим $B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)=v(x)$. Очевидно, что $v(x)\in C(\partial\Omega)$. Так как $u(x)$ – гармоническая функция в области Ω, то в силу утверждения теоремы 1 функция $v(x)$ – тоже гармоническая вне шара и

$$v(x)\big|_{\partial\Omega}=B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)\big|_{\partial\Omega}=f(x).$$

Если при $|x|\to\infty$ предел функции $v(x)$ стремиться к нулю, то

$$\lim_{|x|\to\infty}|u(x)|=\int_1^\infty \frac{ds_1}{\Gamma(\alpha_1)}\ldots\int_1^\infty \frac{(s-1)^{\vec{\alpha}-1}}{\Gamma(\alpha_m)}s^{-\vec{\alpha}}\lim_{|x|\to\infty}|v(sx)|\,ds_m=0.$$

Таким образом, $v(x)$ является решением задачи (2.4.12). Причем, если $f(x)\in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x)\in C(\overline{\Omega})$. Применим к функции $B_{-}^{\vec{\alpha}}[u](x)=v(x)$ интегральный оператор $B_{-}^{-\vec{\alpha}}$. Поскольку интеграл вида $\int_1^\infty ds_1\ldots\int_1^\infty (s-1)^{\vec{\alpha}-1}s^{-\vec{\alpha}}v(sx)\,ds_m$ при $\alpha\in(0,1]$ имеет слабые особенности при $s_j=1$ и $s_j=\infty, j=1,\ldots,m$, то он является непрерывной функцией по $x \in \overline{\Omega}$ при непрерывной функции $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Значит, оператор $B_{-}^{-\bar{\alpha}}$ применим к функциям из $C\left(\overline{\Omega}\right)$. В силу первого равенства из теоремы 5 получим (2.4.14).

Наоборот, пусть функция $v(x)$ решение задачи (2.4.12) при $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда $v(x) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$. Рассмотрим функцию $u(x) = B_{-}^{-\bar{\alpha}}[v](x)$. В силу утверждения теоремы 5 будем иметь $B_{-}^{\bar{\alpha}}[u](x) = B_{-}^{\bar{\alpha}}\left[B_{-}^{-\bar{\alpha}}[v]\right](x) = v(x)$. Значит, $u(x)$ – гармоническая в области Ω и $B_{-}^{\bar{\alpha}}[u](x)|_{\partial\Omega} = v(x)|_{\partial\Omega} = f(x)$. Теорема доказана.

2.5 О разрешимости одной внешней краевой задачи с граничным оператором дробного порядка в смысле Адамара

В этом параграфе работы в классе регулярных гармонических функций изучаются свойства интегро-дифференциальных операторов, обобщающих операторы дробного дифференцирования в смысле Адамара. Эти операторы переводят регулярные гармонические функции в такие же функции и являются взаимно обратными на регулярных гармонических функциях. Во внешности единичного шара изучается краевая задача с граничным оператором дробного порядка. Рассматриваемая задача обобщает известную задачу Неймана на граничные операторы дробного порядка. Доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи. Получено интегральное представление решения рассматриваемой задачи.

Пусть $\Omega = \left\{x \in R^n : |x| < 1\right\}$- единичный шар, $\partial\Omega = \left\{x \in R^n : |x| = 1\right\}$ - единичная сфера. Обозначим $\Omega_+ = R^n \setminus \overline{\Omega}$ - внешность единичного шара, где $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$.

Пусть далее, $u(x)$- регулярная гармоническая функция в области Ω_+ и $r = |x|,\ q = x/r$.

Пусть $m-1 < \alpha \le m, m = 1, 2, \ldots$. Рассмотрим в области Ω_+ следующую задачу

$$\Delta u(x) = 0, x \in \Omega_+ , \tag{2.5.1}$$

$$D_{-}^{\alpha} u(x) = f(x), x \in \partial\Omega_+ . \tag{2.5.2}$$

Решением задачи (2.5.1), (2.5.2) назовем регулярную гармоническую функцию $u(x)\in C^2(\Omega_+)\cap C(\bar{\Omega}_+), \bar{\Omega}_+=\Omega_+\cup\partial\Omega$ для которой $D^\alpha u(x)\in C^2(\bar{\Omega}_+)$ и удовлетворяющую условию (2.5.2) в классическом смысле.

Так как $J_-^0 u(x)=u(x)$, то при $\alpha=1$ получим $D_-^\alpha u(x)=\left(-r\frac{d}{dr}\right)^m u(x)$. Следовательно, в случае $\alpha=1$ рассматриваемая задача (2.5.1), (2.5.2) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа.

Сначала исследуем некоторые свойства операторов J_-^α и D_-^α.

Лемма 2.5.1. Пусть $\alpha>0$ и $u(x)$ - регулярная гармоничеесекая функция в области Ω_+. Тогда справедливы неравенства

$$|J_-^\alpha u(x)|\le C|x|^{2-n},\quad |D_-^\alpha u(x)|\le C|x|^{2-m-n}. \tag{2.5.3}$$

Доказательство. Пусть $u(x)$ - регулярная гармоническая функция в Ω_+. В интеграле $J_-^\alpha u(x)$ меняем переменную t по формуле $t=rs$ и используя регулярность функции $u(x)$, получим

$$|J_-^\alpha u(x)|=\left|\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^\infty(\ln s)^{\alpha-1}u(sx)\frac{ds}{s}\right|\le Cr^{2-n}\int_1^\infty(\ln s)^{\alpha-1}s^{1-n}ds=Cr^{2-n}\int_0^\infty t^{\alpha-1}e^{-(n-2)t}dt=$$

$$=C(n-2)^{2-\alpha}r^{2-n}\int_0^\infty s^{\alpha-1}e^{-s}ds=C_1|x|^{2-n}.$$

Первое неравенство из (2.5.3) доказано. Для доказательства второго неравенства из (2.5.3) представим функцию $D_-^\alpha u(x)$ в виде

$$D_-^\alpha u(x)=\frac{(-1)^m}{\Gamma(m-\alpha)}\int_1^\infty(\ln s)^{\alpha-1}\left(r\frac{d}{dr}\right)^m u(sx)\frac{ds}{s}.$$

Так как $u(x)$ - регулярная гармоническая функция в Ω_+, то по определению при $|x|\to\infty$ выполняется условие

$$|u(x)| \le C|x|^{-(n-2)}\ n \ge 3, \tag{2.5.4}$$

где $C = const$.

Кроме того, если для функции $u(x)$ выполняется оценка (2.5.4), то для любого мультииндекса $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ с $|\beta| = \beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_n$ выполняется оценка (см.например [2], стр.373)

$$\frac{\partial^{|\beta|} u(x)}{\partial x_1^{\beta_1} \partial x_2^{\beta_2} ... \partial x_n^{\beta_n}} = O\left(|x|^{-(n+|\beta|-2)}\right), n \ge 3. \tag{2.5.5}$$

Тогда используя неравенство (2.5.5) для функции $\left(r\frac{d}{dr}\right)^m u(sx)$ получим

$$\left|\left(r\frac{d}{dr}\right)^m u(sx)\right| \le C\left(s|x|\right)^{-(n+m-2)}.$$

Поэтому

$$|D_-^\alpha u(x)| \le C|x|^{2-m-n} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} s^{1-n} ds = C_1 |x|^{2-m-n}, |x| \to \infty.$$

Лемма доказана.

Замечание 2.5.1. Всюду в дальнейшем мы будем рассматривать регулярные гармонические функция в Ω_+ и поэтому все исследуемые далее интегралы сходятся.

Лемма 2.5.2. Пусть $u(x)$ - регулярная гармоническая функция в области Ω_+. Тогда $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$ также являются регулярными гармоническими функциями в Ω_+.

Доказательство. Регулярность функций $J_-^\alpha u(x)$ и $D_-^\alpha u(x)$, т.е. выполнения для них оценок типа (1) вытекает из (2.5.3). Докажем, что данные функции удовлетворяют уравнению Лапласа. Представим $J_-^\alpha u(x)$ в виде $J_-^\alpha u(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_1^\infty (\ln s)^{\alpha-1} u(sx) \frac{ds}{s}$ и применим оператор Δ. Тогда

$$\Delta J_{-}^{\alpha}[u](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\left[\int_{1}^{\infty}(s-1)^{-\alpha}\,\Delta u(sx)\,ds\right]=0\,.$$

Далее, так как

$$\Delta\left(r\frac{du(x)}{dr}\right)=\left(r\frac{d}{dr}+2\right)\Delta u(x)\ \text{ и }\ \Delta\left(r\frac{d}{dr}\right)^{m}u(x)=\left(r\frac{d}{dr}+2\right)^{m}\Delta u(x),$$

то

$$\Delta D_{-}^{\alpha}\left[u\right](x)=\frac{(-1)^{m}}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{1}^{\infty}(\ln s)^{\alpha-1}\left(r\frac{d}{dr}+2\right)^{m}\Delta u(sx)\frac{ds}{s}=0,x\in\Omega_{+}\,.$$

Лемма доказана.

Лемма 2.5.3. Пусть $0<\alpha$, $u(x)$ – регулярная гармоническая функция в Ω_{+}. Тогда для любого $x\in\Omega_{+}$ справедливы равенства

$$J_{-}^{\alpha}\left[D_{-}^{\alpha}u(x)\right]=u(x),D_{-}^{\alpha}\left[J_{-}^{\alpha}u(x)\right]=u(x) \tag{2.5.6}$$

Доказательство. Пусть $x\in\Omega_{+}$ и $t\geq 1$. Рассмотрим функцию

$$\Im_{t}\left[u\right](x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_{t}^{\infty}\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\tau^{-1}D_{-}^{\alpha}\left[u\right](\tau x)\,d\tau\,.$$

Функцию $\Im_{t}\left[u\right](x)$ можно представить в виде

$$\Im_{t}\left[u\right](x)=-\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}t\frac{d}{dt}\left\{\int_{t}^{\infty}\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha}D_{-}^{\alpha}\left[u\right](\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

Действительно,

$$t\frac{d}{dt}\left\{\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^\alpha D_-^\alpha[u](\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\right\} = -t\lim_{\tau\to t}\left[\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^\alpha D_-^\alpha[u](\tau x)\frac{1}{\tau}\right] +$$

$$+\alpha t\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{t}{\tau}\left(-\frac{\tau}{t^2}\right)D_-^\alpha[u](\tau x)\frac{d\tau}{\tau} = -\alpha\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} D_-^\alpha[u](\tau x)\frac{d\tau}{\tau}.$$

Далее, так как

$$\left|D_-^\alpha[u](\tau x)\right| \le C\,|\,\tau x\,|^{2-n-m}, |\,\tau x\,| \to \infty,$$

то используя определение оператора D_-^α и равенства

$$J_-^{m-\alpha} = J_-^{m-1-(\alpha-1)},\ (-1)^{m-1}\delta^{m-1}J_-^{m-1-(\alpha-1)} = D_-^{\alpha-1},$$

получаем

$$\Im_t[u](x) = -\frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}t\frac{d}{dt}\left\{\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^\alpha \left(-\tau\frac{d}{d\tau}\right)D_-^{\alpha-1}u(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\right\} =$$

$$= \frac{1}{\alpha\Gamma(\alpha)}t\frac{d}{dt}\left\{\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^\alpha D_-^{\alpha-1}u(\tau x)\Bigg|_{\tau=t}^{\tau=\infty} - \alpha\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} D_-^{\alpha-1}u(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\right\} =$$

$$= -\frac{1}{\Gamma(\alpha)}t\frac{d}{dt}\left\{\int_t^\infty \left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1} D_-^{\alpha-1}u(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}\right\}.$$

Повторяя эту процедуру еще $m-1-$ раз, для функция $\Im_t[u](x)$ получаем представление

$$\Im_t[u](x)=\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\left\{\int_t^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}J_-^{m-\alpha}u(\tau x)d\tau\right\}.$$

По определению оператора J_-^α последнее выражение представляется в виде

$$\frac{(-1)^m}{\Gamma(\alpha)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\left\{\int_t^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}J_-^{m-\alpha}u(\tau x)d\tau\right\}=(-1)^m\left(t\frac{d}{dt}\right)^m J_-^\alpha\left[J_-^{m-\alpha}[u]\right](tx).$$

Покажем, что в классе регулярных гармонических в функций имеет место равенство

$$J_-^\alpha\left[J_-^{m-\alpha}[u]\right](tx)=J_-^m[u](tx).$$

Действительно,

$$J_-^\alpha\left[J_-^{m-\alpha}[u]\right](tx)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_{\tau r}^\infty\left(\ln\frac{\xi}{\tau r}\right)^{m-\alpha-1}u(\xi\theta)\frac{d\xi}{\xi}\frac{d\tau}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^\infty\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\frac{1}{\Gamma(m-\alpha)}\int_\tau^\infty\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1}u(sx)\frac{ds}{s}\frac{d\tau}{\tau}=$$

$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}\int_t^\infty u(sx)\int_t^s\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}\frac{ds}{s}.$$

Далее, для внутреннего интеграла после замены перемееных получаем

$$\int_t^s\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\left(\ln\frac{s}{\tau}\right)^{m-\alpha-1}\frac{d\tau}{\tau}=\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(m-\alpha)}{\Gamma(m)}.$$

Тогда

$$J_-^{\alpha}\left[J_-^{m-\alpha}[u]\right](tx)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_t^{\infty}\left(\ln\frac{s}{t}\right)^{m-1}u(sx)\frac{ds}{s}\equiv J_-^{m-\alpha}[u](tx)$$

Отсюда

$$\Im_t[u](x)=(-1)^m\left(t\frac{d}{dt}\right)^m J_-^m[u](x)=\frac{(-1)^m}{\Gamma(m)}\left(t\frac{d}{dt}\right)^m\int_t^{\infty}\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{m-1}u(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}=-t\frac{d}{dt}\int_t^{\infty}u(\tau x)\frac{d\tau}{\tau}=u(tx).$$

Таким образом, для любого $t\geq 1$ справедливо равенство

$$u(tx)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_t^{\infty}\left(\ln\frac{\tau}{t}\right)^{\alpha-1}\tau^{-1}D_-^{\alpha}[u](\tau x)d\tau.$$

Если теперь положим $t=1$, то

$$u(x)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_1^{\infty}(\ln\tau)^{\alpha-1}\tau^{-1}D_-^{\alpha}[u](\tau x)d\tau=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_r^{\infty}\left(\ln\frac{s}{r}\right)^{\alpha-1}s^{-1}D_-^{\alpha}[u](s\theta)ds\equiv J_-^{\alpha}\left[D_-^{\alpha}[u]\right](x).$$

Первое равенство из (2.5.6) доказано. Для доказательства второго равенства из (2.5.6) рассмотрим действие оператора D_-^{α} к функции $J_-^{\alpha}u(x)$. Имеем

$$D_-^{\alpha}\left[J_-^{\alpha}[u]\right](x)=(-1)^m\left(r\frac{d}{dr}\right)^m J_-^{m-\alpha}\left[J_-^{\alpha}[u]\right](x)=(-1)^m\left(r\frac{d}{dr}\right)^m\left[J_-^{m}[u]\right](x)=u(x).$$

Лемма доказана.

Таким образом, из утверждения леммы 2.5.3 следует, что операторы J_-^{α} и D_-^{α} являются взаимно обратными на регулярных гармонических в Ω_+ функциях.

Теперь переходим к основным утверждениям.

Пусть $v(x)$ - регулярное решение задачи Дирихле в области Ω_+ т.е.

$$\begin{cases} \Delta v(x) = 0, \quad x \in \Omega_+, \\ v(x) = f(x), \quad x \in \partial\Omega, \\ \left|v(x)\right| \le C\,|\,x\,|^{-(n-2)}, |x| \to \infty. \end{cases} \tag{2.5.7}$$

Известно (см.например [63],с.73), что если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение задачи (2.5.7) существует, единственно и представляется в виде:

$$v(x) = \frac{1}{\omega_n} \int\limits_{\partial\Omega} \frac{|\,x\,|^2 - 1}{|\,x - y\,|^{n-1}} f(y) dS_y .$$

Как мы уже отметили в случае $\alpha = 1$ задача (2.5.1), (2.5.2) совпадает с внешней задачей Неймана для уравнения Лапласа. Известно (см.например [60]), для любого $f(x) \in C(\partial\Omega)$ решение внешней задачи Неймана существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = \int\limits_1^\infty \frac{v(tx)}{t} dt, \tag{2.5.8}$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (2.5.7).

Сформулирум основное утверждение относительно задачи (2.5.1),(2.5.2).

Теорема . Пусть $\alpha > 0, f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда решение задачи (2.5.1),(2.5.2) существует, единственно и представляется в виде

$$u(x) = J_-^\alpha [v](x), \tag{2.5.9}$$

где $v(x)$ – решение задачи Дирихле (2.5.7).

Доказательство. Пусть решение задачи (2.5.1),(2.5.2) существует и это $u(x)$. Применим к функции $u(x)$ оператор D_-^α и обозначим $D_-^\alpha[u](x) = v(x)$. По предположению $D_-^\alpha[u](x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$, тогда $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Поскольку $u(x)$- гармоническая функция в Ω_+, регулярная в бесконечности, то в силу утверждения леммы 2 функция $v(x)$ также является гармонической в области Ω_+ и регулярная в бесконечности. Кроме того

$$v(x)\big|_{\partial\Omega} = D_-^\alpha[u](x)\big|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Применим к равенству $D_-^\alpha[u](x) = v(x)$ оператор J_-^α. Поскольку интеграл вида

$$\int_1^\infty (\ln\tau)^{\alpha-1}\tau^{-1}v(\tau x)d\tau$$

при $\alpha > 0$ имеет слабые особенности при $\tau = 1$ и $\tau = \infty$, то он является непрерывной функцией по $x \in \Omega_+ \cup \partial\Omega$ при непрерывной регулярной гармонической функции $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Значит, оператор J_-^α применим к регулярным функциям из $C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. В силу первого равенства (2.5.6) получаем (2.5.9). Кроме того в силу утверждения леммы 2 функция $J_-^\alpha[v](x)$ является регулярной в бесконечности.

Таким образом, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (2.5.7). Причем, если $f(x) \in C(\partial\Omega)$, то решение этой задачи существует, единственно и $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$.

Пусть наоборот, функция $v(x)$ является решением задачи Дирихле (2.5.7) с граничным значением $f(x) \in C(\partial\Omega)$. Тогда $v(x) \in C(\Omega_+ \cup \partial\Omega)$. Рассмотрим функцию $u(x) = J_-^\alpha[v](x)$. В силу второго равенства из (2.5.6) будем иметь

$$D_-^\alpha[u](x) = D_-^\alpha\left[J_-^\alpha[v]\right](x) = v(x).$$

Значит, функция $u(x)$ является гармонической в Ω, регулярной в бесконечности и

$$D_-^\alpha[u](x)\big|_{\partial\Omega} = v(x)\big|_{\partial\Omega} = f(x).$$

Теорема доказана.

Замечание 2.5.2. В случае $\alpha = 1$ функция (2.5.9) совпадает с решением внешней задачи Неймана (2.5.8), полученный в работе [60].

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе введены новые классы операторов интегро-дифференцирования дробного порядка, связанные с производными Римана-Лиувилля и Адамара. Исследованы свойства введённых операторов, а также применения свойств этих операторов к вопросам разрешимости внешних краевых задач для уравнения Лапласа.

Основными результатами данной работы является:

- Введены модифицированные операторы интегро -дифференцирования дробного порядка;
- Доказательство взаимно обратимости введенных операторов в классе регулярных гармонических функций;
- Доказаны теоремы о том, что интегро-дифференциальные операторы дробного порядка переводят регулярные гармонические функции в такие же функции;
- В бесконечных областях изучены новые классы корректных внешних краевых задач для уравнения Лапласа;
- В единичном круге изучены внешние краевые задачи с граничными операторами дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Адамара;
- Установлены точные условия разрешимости рассматриваемых задач;
- Найдены интегральные представления решения рассматриваемых внешних краевых задач ;
- В многомерном шаре исследованы внешние краевые задачи с граничными операторами дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля и Адамара;
- Установлены безусловная разрешимость рассматриваемых задач;
- Найдены представления решения рассматриваемых внешних краевых задач через решения внешней задачи Дирихле;

ЛИТЕРАТУРА

1 Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. – М.: ИЛ., 1962. – 205 с.

2 Бицадзе А.В. К задаче Неймана для гармонических функций // Доклады АН СССР. − 1990. − Т. 311, № 1. − С. 11-13.

3 Бицадзе А.В. Сингулярные интегральные уравнения первого рода // Труды Математического института АН СССР. – 1991. – Т. 200, – С. 46-56.

4 Бицадзе А.В. Сингулярные интегральные уравнения первого рода с ядрами Неймана // Дифференциальные уравнения. – 1986. – Т. 28, № 5. – С. 823-828.

5 Бугров Я. С.Дифференциальные свойства решений некоторого класса дифференциальных уравнений высшего порядка // Математический сборник. –1964.– Т.63, № 1. – С.59–121.

6 Бугров Я.С. Неравенства для полигармонических полиномов в смешанной норме //Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1962.– Т.31,N.2. – С.275–288.

7 Бугров Я.С. Полигармонические функции в полуплоскости // Математический сборник. –1963.– Т.60, № 4. – С.486–498.

8 Бугров Я.С. Свойства полигармонических функций // Известия АН СССР. Серия математика. – 1958. – Т.22,№4. – С.491–514.

9 Бугров Я.С. Теоремы вложения для некоторых функциональных классов // Тр. МИАН СССР.– 1965.– Т.77. – С.45–64.

10 Векуа И. Н. Новые методы решения эллиптических уравнений // М.-Л.: ГИТТЛ, 1948. – 296 с.

11 Мейман Н.Н.Об одной краевой задаче для полигармонических уравнений //Доклады АН СССР. – 1941. – Т.33,№4. – С.275-278.

12 Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

13 Gazzola F., Grunau H.C., Sweers G. Polyharmonic boundary value problem. Lecture Notes in Mathematics . −Springer, 2010, 413 pp.

14 Umarov S.R. On a critical value of order of boundary operators of elliptic boundary problems // Uspekhi matematicheskikh nauk. – 1991. – V. 46, № 6. – C. 201.

15 Umarov S.R. On fractional derivatives of harmonic functions with given trace//Docl. Ac. Sci. of Uzbekistan. – 1992. – № 10-11. – C. 17-19.

16 Киране М, Татар Н. Отсутствие локальных и глобальных решений эллиптических систем с дробными по времени динамическими краевыми условиями // Сиб. матем. журн. – 2007. – Т. 48, № 3. – С. 593–605.

17 Киране М, Татар Н. Отсутствие решений уравнения Лапласа с динамическим краевым условием дробного типа // Сиб. матем. журн. – 2007. – Т. 48, № 5. – С. 1056–1064.

18 Berdyshev A.S., Kadirkulov B., Nieto J.J. Solvability of an elliptic partial differential equation with boundary condition involving fractional derivatives// Complex Variables and Elliptic Equations. −2014− V.59, No 5. − P. 680–692.

19 Gorenflo R., Luchko Y., Umarov S. On some boundary value problems for psevdo-differential equations of fractional order//Fractional Calcules Aplied Anal. – 2000. – V.3,№4. – P.453-468.

20 Gorenflo R., Luchko Y., Umarov S. On the Cauchy multi-point problems for partial psevdo-differential equations of fractional order // Fractional Calcules Aplied Anal. – 2000. – V.3,№3. – P.249-275.

21 Kadirkulov B., Kirane M.

22 Kirane M., Torebek B

23 Krasnoschok M., Vasylyeva N. On a nonclassical fractional boundary value problem for the Laplace operator // Journal of Differential Equations. − 2014. − V.257, No 6 . − P.1814–1839.

24 Абдурахманов С., Карачик В.В., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона // Вестник ЮУрГУ. Серия «Математическое моделирование и программирование». – 2009, – № 4. – С.24-33.

25 Бекаева А.Е.,Карачик В.В., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач для полигармонического уравнения с граничным оператором Адамара–Маршо // Известия вузов. Математика. – 2014. – №7. – С.14–29.

26 Бердышев А.С., Турметов Б.Х. О разрешимости некоторых краевых задач в полукруге // Вестник КазНПУ имени Абая. Сер.физико-мат. наук. – 2013. – №1(41). − С.21-25.

27 Бердышев А.С., Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. О интегро-дифференциальных операторах типа Адамара-Маршо в классе гармонических функций и их применение//Сибирский математический журнал. – 2012. – №4. – С.752-764.

28 Карачик В.В., Турметов Б.Х.,Торебек Б.Т.О некоторых интегро-дифференциальных операторах в классе гармонических функций и их применении //Математические труды. –2011. – Т.14,№1. –С.99-125.

29 Садыбеков М., Турметов Б.Х.,Торебек Б. Об одной нелокальной задаче для уравнения Лапласа с граничным оператором дробного порядка в смысле Римана-Лиувилля // Вестник ЕНУ имени Л.Н.Гумилева. Серия естественно-технических наук. Астана. – 2013. – №4(95). – С.48-56.

30 Садыбеков М.А., Турметов Б.Х. Об одном аналоге периодических краевых задач для уравнения Пуассона в круге// Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т.50,N2. – С.264-268.

31 Турметов Б.Х., Асылбеков М., Торебек Б.Т. Некоторые свойства и применение модифицированного интегро-дифференциального оператора Римана-Лиувилля в классе гармонических функций // Вестник КарГУ.Серия "Математика". – 2013. – №3(71). – С.11-20.

32 Турметов Б.Х., Байметова Н. О разрешимости некоторых краевых задач с оператором типа Адамара-Маршо // Вестник КарГУ. Серия Математика №3(67). 2012.с.89-98.

33 Турметов Б.Х., Бекаева А.Е.О разрешимости аналога задачи Неймана для неоднородного бигармонического уравнения // Научный мир Казахстана.2011 . № 1 (35).с.304-308.

34 Турметов Б.Х., Кадиркулов Б.Ж. Модифицированные интегро - дифференциальные операторы Адамара и некоторые их применения // Узбекский математический журнал. – 2013. – № 4. – С.41-49.

35 Турметов Б.Х., Муратбекова М.А. О разрешимости одной нелокальной задачи с граничным оператором высокого порядка // Вестник КарГУ. Серия "Математика" . –2011 . –№4(64). –С.80-85.

36 Турметов Б.Х., Муратбекова М.А. Об операторном методе решения некоторых краевых задач в шаре // Вестник КарГУ. Серия "Математика" . – 2012 . –№4(68). –С.108-115.

37 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. О разрешимости аналога третьей краевой задачи с граничным оператором дробного порядка . Журнал СреднеВолжского Математического Общества. г.Саранск,Россия. – 2010. – Т.12,№3. – С.135-144.

38 Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи в обобщенных классах Гельдера // Докл.АН РУз, Ташкент. – 2004 г. – № 1. – С.20-23.

39 Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи в обобщенных классах Никольского // Дифференциальные уравнения . − 1996г. − Т. 32, № 10. − С. 1421-1426.

40 Турметов Б.Х. О гладкости решения одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка // Математические труды. − 2004. − Т. 7, № 1. − С. 189-199.

41 Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче с граничным оператором дробного порядка // Труды Института Математики и Компьютерной Технологии. Вып.4. Ашгабат , 1995г.С.78-81.

42 Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для уравнения Лапласа с обобщенным оператором Римана – Лиувилля в граничном условии //Узбекский Математический Журнал ,Ташкент.2001.№ 5-6. С.51-57.

43 Турметов Б.Х. Об одной краевой задаче для гармонического уравнения // Дифференциальные уравнения. − 1996. − Т. 32, № 8, − С. 1089-1092.

44 Турметов Б.Х. Об одной нелокальной задаче Бицадзе-Самарского для уравнения Лапласа //Узбекский Математический Журнал, Ташкент. 2001 № 3-4.с.44-48.

45 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. О гладкости решения некоторых краевых задач для уравнения Лапласа в классах Гельдера // Вестник КазНУ серия математика, механика , информатика. – 2011 № 1. –С.

46 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. Вопросы разрешимости некоторых краевых задач для уравнения Пуассона с граничными операторами дробного порядка //Математический журнал. – 2012. – Т 12, №4 (46), – С. 139-154.

47 Турметов Б.Х., Торебек Б.Т. К вопросу разрешимости некоторых обратных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором Римана-Лиувилля // Вестник КарГУ. Серия Математика. – 2013. – №1(69). – С.113-121.

48 Турметов Б. Х. , Торебек Б. Т. Модифицированные операторы Баврина и их применения / /Дифференциальные уравнения. – 2015, – Т.51, № 2. – С. 240–250.

49 Турметов Б.Х.,Муратбекова М.А. О разрешимости некоторых нелокальных задач для уравнения Лапласа с граничным оператором типа Адамара-Маршо //Вестник ЕНУ. Серия Математика. – 2012. – №6(91). – С.35-41.

50 Турметов Б.Х.,Муратбекова М.А.О разрешимости одной краевой задачи с граничным оператором дробного порядка//Математический журнал. – 2012. – Т. 12, №1, – С. 71-82.

51 Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh. On solvability of a boundary value problem for a nonhomogeneous biharmonic equation with a boundary operator of a fractional order // Acta Mathematica Scientia. – 2014. – 34B(6). – P.1695–1706.

52 Berdyshev A.S., Cabada A., Turmetov B.Kh. On Solvability of Some Boundary Value Problem for Polyharmonic Equation with Boundary Operator of a

Fractional Order // Applied Mathematical Modelling. – 2015. – V.39. – P.4548–4569.

53 Muratbekova M. A., Shynaliev K.M.,Turmetov B. Kh. On solvability of a nonlocal problem for the Laplace equation with the fractional-order boundary operator // Boundary Value Problems. –2014 . –DOI: 10.1186/1687-2770-2014-29.

54 Turmetov B.Kh. Solvability of fractional analogues of the Neumann problem for a nonhomogeneous biharmonic equation // Electronic Journal of Differential Equations. –2015. – V. 2015, №. 82. – P. 1–21.

55 Akhmedov T.M., Veliev E., Ivakhnychenko M. Fractional operators approach in electromagnetic wave reflection problems // Journal of electromagnetic waves and applications. – 2007. – V.21,No 13. – P.1787–1802.

56 Akhmedov T.M., Veliev E., Ivakhnychenko M. Description of the boundaries in scattering problems using fractional operators //Radio Physics and Electronics. – 2009. – V.14. – P.133–141.

57 Veliev E.I., Ivakhnychenko M.V. Fractional boundary conditions in plane wave diffraction on a strip // Progress In Electromagnetics Research. –2008. –V.79. – P. 443–462.

58 Баврин И.И. Интегро-дифференциальные операторы для гармонических функций в выпуклых областях и их приложения // Дифференциальные уравнения. − 1988. − Т. 24, № 9. − С. 1629−1631.

59 Баврин И.И. Операторы для гармонических функций и их приложения // Дифференциальные уравнения. − 1985. − Т. 21, № 1. − С. 9-15.

60 Лифанов И.К. Сингулярное интегральное уравнение первого рода задачи Неймана //Дифференциальные уравнения. − 1988. − Т.24, №1. − С.110-115.

61 Alves C.O. Multiplicity of solutions for a class of elliptic problem in R2 with Neumann conditions. Journal of Differential Equations. – 2005. − V.219. − P.20 − 39.

62 Cherif A., Bonzom F. Exterior problems in the half-space for the Laplace operator in weighted Sobolev spaces. Journal of Differential Equations. – 2009. – V.246. – P.1894 – 1920.

63 Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1982. 336 с

64 Владимиров В.С. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1981. 512 с

65 Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Наука. 1978. 578 с

66 Нахушев А.М. Дробное исчисление и его применение. – М.: Физматлит, 2003. – 272 с.

67 Kilbas A.A., Srivastava H.M., Trujillo J.J. Theory and Applications of Fractional Differential Equations. – Amsterdam: Elsevier, 2006. – 539 p.

68 Podlubny I. Fractional differential equations.–New York: Academic Press, 1999. – 368 p.

69 Қ.И. Усманов И.У. Демир, о внешней задачи для уравнения Лапласа с граничными операторами дробного порядка // Материалы международной научно-практической конференции " Оразовские чтение-2", Шымкент , 26-27 ноября 2015 г.с.389-393.

70 Қ.И. Усманов И.У. Демир, О разрешимости одной внешней краевой задачи для уравнения Лапласа с граничными операторами Адамара // Вестник МКТУ. -2016 .№ 1 (в печати)