1 Тарау. АНЫҚТАУЫШТАР МЕН МАТРИЦАЛАР

Біз бұл тарауда n-ретті анықтауыштар мен матрицаларды қарастыратын боламыз. Анықтауыштар мен матрицалар теориясы — осы бөлімнің III тарауында қарастырылатын сызықты теңдеулер жүйесін шешуге қажетті материал болып табылады.

§ 1.1. Екінші және үшінші ретті анықтауыштар

1 **Анықтама.** *Екінші ретті анықтауыш* деп

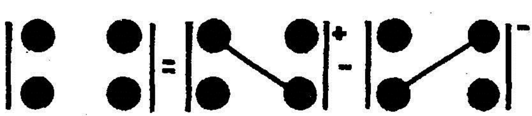
$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

санын айтамыз, ол мына таңбамен белгіленеді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} , \qquad (1.1)$$

мұндағы a_{ij} $(i = 1,2, j = 1,2)$ сандары — екінші ретті анықтауыштың *элементтері.* Анықтауыштың кез келген элементі, мысалы, a_{21} элементі «а екі бір» деп оқылады.

Екінші ретті анықтауыштың есептелуі былай белгіленеді:



Екінші ретті анықтауыш екі жатық, екі тік жолдардан анықталған, a_{11}, a_{12} элементтері — екінші ретті анықтауыштың бірінші, ал a_{21}, a_{22} екінші жатық жолдарын құрайды, a_{11}, a_{21} — екінші ретті анықтауыштың бірінші, ал a_{12}, a_{22} екінші тік жолдарын құрайды.

Анықтауыштың a_{ij} элементтерінің бірінші i индексі оның жатық жолының нөмірін, ал екінші j индексі тік жолының нөмірін анықтайды. Анықтауыштың жоғарғы сол элементі (a_{11}) мен төменгі оң элементі (a_{22}) осы анықтауыштың *негізгі диагоналын білдіреді*, яғни a_{11} мен a_{22} элементтері — екінші ретті анықтауыштың негізгі диагоналының элементтері, ал жоғарғы оң элементі (a_{12}) мен төменгі сол элементі (a_{21}) *қосалқы диагоналын білдіреді,* яғни a_{12} мен a_{21} — қосалқы диагоналының элементтері.

Екінші ретті анықтауышты есептеу үшін оның негізгі диагонал элементтерінің көбейтіндісінен, яғни $a_{11} \cdot a_{22}$ көбейтіндіден қосалқы диагонал элементтерінің көбейтіндісін, яғни $a_{21} \cdot a_{12}$ көбейтіндіні, алсақ жеткілікті. Сонымен, екінші ретті анықтауыштың есептеуіндегі әр қосылғыш, осы анықтауыштың екі элементінің көбейтіндісінен анықталған және әр көбейтіндідегі көбейткіш анықтауыштың тік немесе жатық жолдарының тек бір ғана элементінен анықталған.

Анықтама. *Үшінші ретті анықтауыш* деп

$$\Delta = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{31} \cdot a_{12} \cdot a_{23} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{32} \cdot a_{23} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33}$$

санын айтамыз және ол мына таңбамен белгіленеді:

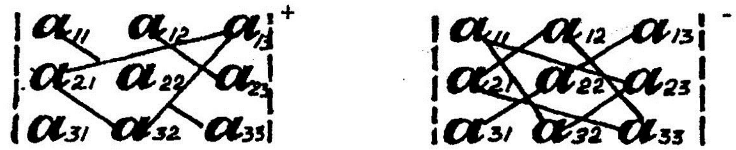
$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+ a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}, \tag{1.2}$$

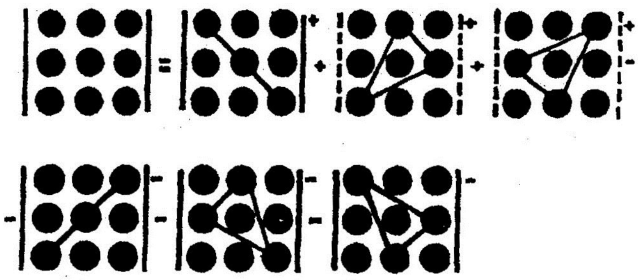
мұндағы a_{ij}, $i = \overline{1, 3}$ $j = \overline{1, 3}$ — анықтауыштың элементтері, i жатық, ал j тік жолдарының нөмірін анықтайды.

Екінші ретті анықтауыштағыдай үшінші ретті анықтауыш үш жатық және үш тік жолдан тұрады. a_{11}, a_{22}, a_{33} — анықтауыштың *негізгі диагоналының*, ал a_{13}, a_{22}, a_{31} — *қосалқы диагоналының* элементтері.

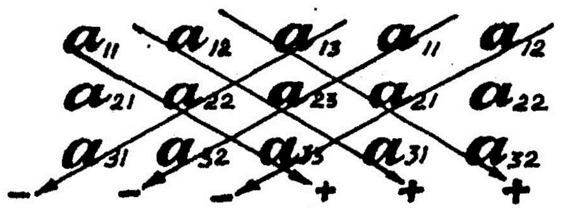
Үшінші ретті анықтауышты есептеу үшін *үшбұрыштар* немесе *Сайрюс* ережесі деп аталатын төмендегі схеманы еске сақтаған тиімді. Үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі плюс таңбасымен алынған бірінші үш қосылғыш «+» схема, ал минус таңбасымен алынған екінші үш қосылғыш «-» схема бойынша есептелінеді:



Үшінші анықтауыштың есептелуін шартты түрде төмендегідей белгіленеді:



Сайрюс ережесінің екінші түріне тоқталып өтейік. (1.2) анықтауышты есептеу үшін оның элементтерінен мына төмендегі кестені қарастырайық:



яғни үшінші ретті анықтауыштың барлық тік жолдарына осы анықтауыштың бірінші және екінші тік жолдарын жалғастырып кесте құраймыз. Үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі әр қосылғыш үш көбейткіштен анықталған. Сондықтан негізгі диагоналдың және оған параллель екі түзудің бойында жатқан элементтердің көбейтінділерінің қосындысы (1.2) формуладағы плюс таңбасымен алынған бірінші үш қосылғышты анықтайды, ал қосалқы диагоналдың және оған параллель екі түзудің бойында жатқан элементтер көбейтінділерінің айырымы (1.2) формуладағы минус таңбасымен алынған екінші үш қосылғышты анықтайды.

Сонымен, үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі әр қосылғыш (алты қосылғыш бар) үш көбейткіштен, әр көбейткіш осы анықтауыштың жатық немесе тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталған.

Төртінші және одан да жоғарғы ретті анықтауыштарды есептеу үшін анықтауыштың қасиеттерін білу қажет. Енді анықтауыштың қасиеттерін қарастыруға көшейік.

§1.2. Алмастыру, инверсия және транспозиция

Бізге n элемент берілсін: $a_1, a_2, \dots a_n$. Осы элементтердің белгілі бір ретпен кез келген орналасуы *алмастыру* деп аталады. Мысалы: 2, 4, 7 сандарынан мына алмастыруларды құруға болады:

247, 274, 427, 472, 742, 724.

Бұл асмастырулардың саны $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$, яғни алтыға тең. Осы сияқты берілген n элементтен $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n = n!$ алмастыру құруға болады (мұнда барлық алмастырудың саны $n!$-ға тең).

Егер екі санды орын алмастырғанда үлкен сан кіші санның алдында тұрса, онда ол *инверсия құрайды,* ал егер кіші сан үлкен санның алдында тұрса, онда ол *инверсия құрамайды* дейміз ab — алмастыруының инверсиясы [ab] — символымен белгіленеді. Барлық инверсиялардың қосындысы берілген алмастырудың *инверсия саны* деп аталады. Берілген алмастырудың инверсия санын табу үшін:

1) берілген алмастырудағы элементтердің орналасу тәртібі бойынша екі-екіден алмастыруларды құрамыз;

2) әр алмастырудағы инверсияны анықтаймыз;

3) барлық инверсияны қосып инверсия санын анықтаймыз.

Мысалы, 487391562 — алмастыруының инверсия санын анықтайық. Ол үшін екі элементтен барлық алмастыруларды құрайық:

42, 46, 45, 41, 49, 43, 47, 48 — инверсия саны 3-ке тең
82, 86, 85, 81, 89, 83, 87 — инверсия саны 6-ға тең,
72, 76, 75, 71, 79, 73 — 5-ке тең,
32, 36, 35, 31, 39 — 2-ге тең,
92, 96, 95, 91 — 4-ке тең,
12, 16, 15 — инверсия құрамайды, яғни 0-ге тең,
52, 56 — 1-ге тең,
62 — 1-ге тең.

Сонымен, берілген 487391562 — алмастыруының инверсия саны [487391562] = 3 + 6 + 5 + 2 + 4 + 0 + 1 + + 1 = 22-ге тең.

Берілген алмастырудың инверсия санын басқа әдіспен анықтайық. Алдымен, берілген алмастырудағы ең кіші сан 1-ді сызайық: 487391562. Сызылған 1-дің алдында 5 сан бар, олар 4, 8, 7, 3, 9, яғни инверсия саны 5-ке тең. Енді қалған сандардың ең кішісі 2-ні сызайық: 487391562. Сызылған 2-нің алдында 7 сан бар, яғни инверсия саны 7-ге тең. Енді 3-ті сызамыз: 487391562, яғни инверсия саны 3-ке тең. Осы сияқты:

487391562 — инверсия саны 0-ге тең, яғни инверсия құрамайды,
487391562 — инверсия саны 3-ке тең,
487391562 — инверсия саны 3-ге тең,
487391562 — инверсия саны 1-ге тең,
487391562 — инверсия құрамайды,
487391562 — инверсия құрамайды.

Сонымен, берілген 487391562 алмастыруының инверсия саны 5 + 7 + 3 + 3 + 3 + 1 = 22-ге тең.

Егер алмастырудың инверсия саны жұп (тақ) болса, онда ол *алмастыру жұп (тақ) алмастыру* деп аталады. Мысалы, жоғарыдағы 487391562 алмастыру — жұп алмастыру.

Берілген алмастырудың кез келген екі элементінің орын алмасуы *транспозиция* деп аталады. Кез келген алмастыруға транспозиция жасау нәтижесінде ол алмастырудан өзге алмастыру аламыз, яғни берілген алмастыру басқа алмастыруға көшеді. Мысалы, 1435 алмастыруына мынадай транспозиция жасайық: 1-ді 5-пен, онан кейін 4-ті 5-пен, онан кейін 5-ті 3-пен. Сонда, берілген алмастыруға үш транспозиция жасау нәтижесінде 1435 алмастыруынан өзге 4351 алмастыруын аламыз.

Енді (1.2) формуладағы қосылғыштарды қарастырайық. Әр қосылғыш анықтауыштың үш элементінің көбейтіндісінен анықталған. Әр қосылғыш элементтерінің жатық жолының индекстері (бірінші индекстері) 123 алмастыруы арқылы жазылған, ал тік жолының индекстері (екінші индекстері) 1, 2, 3 сандарынан анықталған алмастырулар арқылы жазылған. Мысалы, $a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$ — үшінші қосылғыш. Бірінші индекстері 123 — алмастыруын, ал екінші индекстері 312 алмастыруын құрайды. Сонымен, (1,2) анықтауыштың екінші индекстері 1, 2, 3 сандарынан анықталған 3! = 6-ты алмастыруын құрайды, яғни (1.2) анықтауыштың бірінші индекстері барлық қосылғыштарда да өспелі (123), ал екінші индекстері барлық қосылғыштарда мына түрде орналасқан:

$$123,\ 231,\ 312;\ 321,\ 213,\ 132, \qquad (1.3)$$

мұндағы 123 алмастыруын *негізгі алмастыру* дейміз және бастапқы үш алмастыру анықтауыштың есептелуіндегі плюс таңбасымен алынған бірінші үш қосылғыштың индекстері, ал қалған үшеуі минус таңбасымен алынған екінші үш қосылғыштың индекстері.

Алдымен (1.3) формуладағы бастапқы үш алмастырудың инверсия санын есептейік. Бірінші 123 алмастыруының инверсия санын есептеу үшін осы алмастырудың екі-екіден алмастыруларын құрайық:

$$13,\ 12,\ 23.$$

Бұл алмастырулар инверсия құрамайды, себебі олар өсу ретімен орналасқан. Бұл жағдайда инверсия саны 0-ге тең, яғни [123] = 0. Екінші 231 — алмастыруының инверсия санын есептейік:

$$21,\ 23,\ 31.$$

мұндағы екі алмастыру инверсия құрайды, олар 21 мен 31 — алмастырулары. Сондықтан, 231 алмастыруының инверсия саны 2-ге тең, яғни [231] = 2. Осы сияқты, 312 алмастыруының инверсия саны 2-ге тең, яғни [312] = 2. Себебі, 312 алмастыруынан жазылған

$$32,\ 31,\ 12$$

алмастыруларының екеуі (32 мен 31) инверсия құрайды, ал қалған (12) инверсия құрамайды. Сонымен, (1.3) — формуладағы бастапқы үш алмастырудың инверсия саны [123] + [231] + [321] = 0 + 2 + 2 = 4-ке тең, яғни жұп. Олай болса, (1.2)-формуладағы бірінші үш қосылғыштың индекстерінің инверсиясы жұп.

(1.3) формуладағы соңғы үш алмастырудың инверсия санын есептейік. 321 — алмастыруының

$$31,\ 32,\ 21$$

алмастыруларының үшеуі де инверсия құрайды. Сондықтан, оның инверсия саны 3-ке тең, яғни [321] = 3. 213 алмастыруының 23, 21, 13 алмастыруларының екеуі (23 пен

13-өспелі) инверсия құрамайды, ал біреуі (21 өспелі емес) инверсия құрайды, яғни [213] = 1. 132 — алмастыруының

$$12,\ 13,\ 32$$

алмастыруларының екеуі (12 мен 13-өспелі) инверсия құрамайды, ал біреуі (32-өспелі емес, яғни кемімелі) инверсия құрайды. Сондықтан, [132] = 1. Сонымен, (1.2) формуладағы екінші үш қосылғыштың индекстерінің инверсиясы тақ, яғни [321] + [213] + [132] = 3 + 1 + 1 = 5. Осылардан және (1.2) формуладан мынадай қорытындаға келеміз: үшінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі плюс таңбасымен алынған бірінші үш қосылғыштың индекстерінің инверсия саны — жұп, ал минус таңбасымен алынған екінші үш қосылғыштың индекстерінің инверсия саны — тақ.

Осы қорытындыны ескере отырып, үшінші ретті анықтауыштың әр мүшесін ықшымды түрде жазуға болады:

$$(-1)^{[j_1j_2j_3]}\ a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3}$$

мұндағы $j_1j_2j_3$ алмастыруы 1, 2, 3 сандарынан анықталған алмастыру, $[j_1j_2j_3]$ белгісі — 1, 2, 3 сандарынан анықталған инверсия санының белгісі. Егер $[j_1j_2j_3]$ саны жұп болса, онда

$$(-1)^{[j_1j_2j_3]} = +1,$$

ал егер $[j_1j_2j_3]$ — тақ болса, онда

$$(-1)^{[j_1j_2j_3]} = -1.$$

Сондықтан, (1.2) формуланы ықшамды түрде жазамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1j_2j_3]} a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3}, \qquad (1.4)$$

мұндағы $\sum$ қосынды 1, 2, 3 сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлығы алты алмастыру).

1.1-теорема. Кез келген транспозиция жұп алмастыруын тақ алмастыруына, ал тақ алмастыруын жұп алмастыруына өзгертеді.

Д ә л е л д е у і. Алдымен

$$a_1 a_2 \ldots a_n \alpha \beta b_1 b_2 \ldots b_m \qquad (1.5)$$

алмастыруын қарастырайық. Осы алмастырудың көршілес α мен β элементтерінің орнын ауыстырғаннан мынаны аламыз:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \beta \alpha b_1 b_2 \ldots b_m. \tag{1.6}$$

Сонда, қарастырып отырған (1.5) пен (1.6) алмастыруларының бір-бірінен айырмашылығы тек α мен β элементтерінің орналасуында ғана. Олай болса, (1.6) алмаструының инверсия саны (1.5) алмастыруының инверсия санынан 1-ге артық немесе 1-ге кем. Сондықтан, екі алмастырудың біреуінің инверсия саны тақ болса, онда екіншісінің саны жұп болады. Сонымен, алмастырудың көршілес екі элементін ауыстырып теореманы дәлелдедік.

Теореманы жалпы жағдай үшін дәлелдейік. Ол үшін α мен β элементтерінің арасында k-элемент (элемент саны k-ға тең) орналасқан алмастыруды қарастырайық:

$$a_1 a_2 \ldots a_n \alpha c_1 c_2 \ldots c_k \beta b_1 b_2 \ldots b_m, \tag{1.7}$$

мұнда α мен β элементтерінің арасында $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — элементтері орналасқан, α мен β элементтерін транспозиция жасау үшін алдымен олардың біреуін оның көршілес элементтерімен транспозиция жасау керек, мысалы α-ны алдымен c_1 мен, содан c_2 мен, содан соң c_3-пен соңында c_k-мен транспозиция жасап

$$a_1 a_2 \ldots a_n c_1 c_2 \ldots c_k \alpha \beta b_1 b_2 \ldots b_m \tag{1.8}$$

алмастыруды аламыз. Сонда біз (1.7) алмастыруынан (1.8) алмастыруына k транпозиция жасау нәтижесінде келдік. Енді көршеліс α мен β-ның орнын ауыстырып, мына алмастыруды аламыз:

$$a_1 a_2 \ldots a_n c_1 c_2 \ldots c_k \beta \alpha b_1 b_2 \ldots b_m. \tag{1.9}$$

Сонымен, (1.7) алмастыруына k + 1 транспозиция жасау нәтижесінде (1.9) алмастыруын алдық. Осылайша β-ны c_k-мен, содан соң c_{k-1}-мен соңында c_1-мен орын ауыстырып

$$a_1 a_2 \ldots a_n \beta c_1 c_2 \ldots c_k \alpha b_1 b_2 \ldots b_m \tag{1.10}$$

алмастыруын аламыз. Сонда, (1.9) алмастыруына k транспозиция жасап (1.10) алмастыруын алдық, яғни α — элементті β — элемент орнына, ал β — элементті α —

элемент орнына ауысады. Сонымен, әр транспозиция алмастырудың жұптылығын (тақтылығын) өзгертеді және (1.7) алмастыруына $2k + 1$ транспозиция жасау нәтижесінде одан (1.10) алмастыруын алдық. Сондықтан, бір транспозиция алмастырудың жұптылығын (тақтылығын) өзгертеді, яғни тақ алмастыру жұп алмастыруға, ал жұп алмастыру тақ алмастыруға өзгереді. Теорема дәлелденді.

1.2-теорема. Берілген 1 2 3 . . . n санынан $\frac{n!}{2}$-ге тең тақ және сонша жұп алмастыру жасауға болады.

Д ә л е л д е у і. Берілген 1 2 3 . . . n санының саны n-ге тең және одан $n!$ алмастыру құруға болады. Барлық $n!$ алмастырудағы жұп алмастырудың саны p-ге, ал тақ алмастырудың саны q-ге тең болсын дейік. Енді барлық алмастырулардың әрқайсысына бірдей транспозиция жасайық. Онда, 1.1-теорема бойынша жұп алмастыру тақ алмастыруға, ал тақ алмастыру жұп алмастыруға өзгереді және барлық p тақ алмастыру әртүрлі болады. Егер, мысалы, жұп алмастыру саны тақ алмастыру санынан үлкен болсын, онда алмастырудан кейін тақ алмастыру саны жұп алмастыру санынан үлкен болады. Бұл қарама қайшылық тақ алмастыру санының жұп алмастыру санына тең болуы мүмкін еместігін анықтайды. Демек, $p = q$. Олай болса, барлық алмастырудың саны $n!$-ға тең болғандықтан, тақ және жұп алмастырулардың әрқайсысы $\frac{n!}{2}$-ге тең. Теорема дәлелденді.

§ 1.3. n-ретті анықтауыш және оның қасиеттері

Біз жоғарыда екінші және үшіні ретті анықтауыштарды қарастырдық. Біріншіден, олардың есептелуіндегі әр қосылғыштардың, бірінші индекстері (жатық жолының номері) өсу ретімен орналасқан, ал екінші индекстері (тік жолының номері) әртүрлі алмастырулар (барлығы алты алмастыру: 3! = 6) арқылы жазылған. Екінші ретті анықтауыш элементтерінің саны $2^2 = 4$-ке тең (екі тік, екі жатық жол), ал үшінші ретті анықтауыштың элементтерінің саны $3^2 = 9$-ға тең (үш тік, үш жатық жол). Екіншіден, екінші ретті анықтауыш екі қосылғыштан (2! = 2), әр қосылғыш екі көбейткіштен тұрады, ал үшінші ретті анықтауыш алты қосылғыштан (3! = 6), әр қосылғыш үш көбейткіштен тұрады және қосылғыштар санының жартысының таңбасы плюс, ал қалғаны минус. Үшіншіден, олардың қосылғыштарындағы әр көбейткіш осы анықтауыштың жатық және тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталған. Сонымен, екінші, үшінші ретті анықтауыштарға орындалатын заңдылықтар төртінші, бесінші тағы сол сияқты анықтауыштарға да орындалады.

Енді n-ретті анықтауыштың анықтамасын және жалпы анықтауыштарға орындалатын олардың қасиеттерін қарастыралық.

Анықтама. *n-ретті анықтауыш* деп

$$\Delta = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \ldots j_k]} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \ldots \cdot a_{nj_n}$$

қосындыны айтамыз және оны былай белгілейміз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{[j_1 j_2 \ldots j_k]} \cdot a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \ldots \cdot a_{nj_n}, \tag{1.11}$$

мұндағы қосу белгісі 1, 2, 3, . . ., n сандарынан анықталған барлық алмастырулар бойынша алынған (барлық алмастыру саны $n!$-ға тең), $a_{ij}\ (i = \overline{1, n}; j = \overline{1, n})$ — анықтауыштың элементтері және ол i-жатық пен j-тік жолдарының қиылысу нүктесінде орналасқан.

Е с к е р т у. (1.11) формуладағы қосындыда анықтауыш элементтерінің бірінші индекстері өсу ретімен, ал екінші индекстері ретсіз орналасқан. Егер анықтауыш элементтерінің бірінші және екінші индекстері ретсіз орналасса, онда (1.11) формуланы мына түрде жазуға болады:

$$\Delta = \sum (-1)^{\alpha+\beta} \cdot a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \ldots \cdot a_{i_n j_n}, \tag{1.12}$$

мұндағы $\alpha = [i_1\, i_2 \ldots i_n]$ — бүрінші, ал $\beta = [j_1\, j_2 \ldots j_n]$ — екінші индекстерінің инверсиялары.

n-ретті анықтауыш екінші ($n = 2$) мен үшінші ($n = 3$) ретті анықтауыштар сияқты n жатық және n-тік жолдардан тұрады. Бірінші i индексі жатық жолдың, ал екінші j индексі тік жолдың нөмірін көрсетеді және барлық саны n^2-ға тең, ал оның $\frac{n!}{2}$ қосылғышының (мүшесінің) таңбасы плюс, қалғаны минус таңбасымен алынған, яғни плюс пен минус таңбасымен алынған қосылғыштардың саны тең. Әр қосылғыш осы

анықтауыштың n элементтінің көбейтіндісінен анықталады, ал әр көбейткіш анықтауыштың жатық және тік жолдарының тек бір ғана элементінен анықталады.

1-қасиет. Анықтауыштың жатық (тік) жолдары оның сәйкес тік (жатық) жолдарымен орын алмастырсақ, онда оның мәні өзгермейді.

Дәлелдеу үшін $\Delta = \Delta_1$ теңдігін дәлелдесек жеткілікті, мұндағы Δ_1 берілген Δ анықтауышының 1-жатық жолы 1-тік жолымен, 2-жатық жолы 2-тік жолымен және, ең соңында, n-жатық жолы n-тік жолымен орын алмастырылып алынған анықтауыш, яғни:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ол үшін Δ — анықтауышының есептелуіндегі жалпы мүшесін қарастырайық:

$$a_{i_1 j_1} \cdot a_{i_2 j_2} \ldots a_{i_n j_n}. \tag{1.13}$$

(1.13) жалпы мүшесі Δ_1 анықтауышының да мүшесі. Осы сияқты Δ_1 — анықтауышының кез келген мүшесі Δ анықтауышының да мүшесі болады. Егер (1.13) мүше Δ анықтауышының $(-1)^{\alpha+\beta}$, $\alpha + \beta = [i_1 i_2 \ldots i_n] + [j_1 j_2 \ldots j_n]$ таңбасымен алынған мүшесі болса, онда ол $(-1)^{\beta+\alpha}$ таңбасымен алынған Δ_1 анықтауышының да мүшесі болады. Осыдан және $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ болғандықтан, $\Delta = \Delta_1$.

Мысалы, екінші ретті анықтауыштарды қарастыралық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{22},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21},$$

яғни $\Delta = \Delta_1$.

2-қасиет. Анықтауыштың кез келген екі жатық (тік) жолдарының сәйкес элементтерінің орнын алмастырсақ, онда оның таңбасы қарама-қарсы таңбаға өзгереді.

Анықтауыштың анықтамасы бойынша:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^{[i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} \cdot a_{2i_2} \cdot \dots a_{ki_k} \dots a_{li_l} \dots a_{ni_n}, \ k < l.$$

Δ анықтауыштың k және l жатық жолдарының орындарын алмастырып, Δ_1 анықтауышын аламыз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \sum (-1)^{[i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n]} a_{1i_1} \cdot \dots a_{li_l} \cdot \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n}.$$

Бұл анықтауыштардың кез келген мүшелері бір бірімен тең:

$$a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{1i_l} \dots a_{ni_n} = a_{1i_1} \dots a_{li_l} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n}.$$

Екінші индекстерінен құрастырылған Δ және Δ_1 анықтауыштарының кез келген мүшелерінің алмастыруларын қарастырайық:

$$i_1 \dots i_2 \dots i_k \dots i_l \dots i_n; \ i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_n,$$

мұндағы екінші алмастыру бір транспозиция жасау нәтижесінде бірінші алмастырудан алынған. Олай болса, оның жұптылығы қарама-қарсы таңбаға өзгертіледі, яғни $[i_1 \dots i_k \dots i_l \dots i_n]$ және $[i_1 \dots i_l \dots i_k \dots i_n]$ сандарының жұптылығы әртүрлі. Ендеше анықтауыштарының да кез келген мүшелерінің таңбалары бір-бірімен қарама-қарсы. Сондықтан да, $\Delta_1 = -\Delta$.

Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix} = -(a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}) = -\Delta.$$

3-қасиет. Анықтауыштың екі жатық (тік) жолдарының барлық сәйкес элементтері тең болса, онда оның мәні нөлге тең.

Берілген анықтауыштың сәйкес элементтері тең екі жатық жолдарының орнын алмастырсақ, онда анықтауыштың 2-қасиеті бойынша: $\Delta = -\Delta$. Бұдан $2 \cdot \Delta = 0$, яғни $\Delta = 0$.

Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} \\ a_{21} & a_{21} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{21} - a_{11} \cdot a_{21} = 0.$$

4-қасиет. Анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолының барлық элементтерін α санына көбейтсек, онда оның мәні осы санға көбейтіледі.

Берілген Δ анықтауыштың k жатық жолын α санына көбейтіп, Δ_1 анықтауышын аламыз:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} \cdot \alpha & \dots & a_{kn} \cdot \alpha \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Дәлелдеу керек $\Delta_1 = \alpha \Delta$. Анықтауыштың анықтамасы бойынша:

$$\Delta_1 = \sum (-1)^{[i_1 \dots i_k \dots i_n]} a_{1i_1} \dots \alpha \cdot a_{ki_k} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \alpha \sum (-1)^{[i_1 \dots i_k \dots i_n]} a_{1i_1} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n} = \alpha \cdot \Delta.$$

Мысалы,

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha \cdot a_{12} \\ a_{21} & \alpha \cdot a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\,(a_{11}\,a_{22} - a_{21}\,a_{12}) = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \alpha\,\Delta.$$

5-қасиет. Анықтауыштың екі жатық (тік) жолдарының сәйкес элементтері пропорционал болса, онда оның мәні нөлге тең.

Берілген Δ анықтаушының p мен q жатық жолдарының элементтері пропорционал болсын делік, яғни $a_{pj} = c \cdot a_{qj}$, мұндағы көбейткіш c — кез келген тұрақты сан. Олай болса, анықтауыштың 4-қасиеті бойынша ол көбейткішті анықтауыш белгісінің алдына шығарып жазуға болады:

$$\Delta = c \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} -(p \\ \\ -(q \end{matrix} = c \cdot \Delta_1 \ ,$$

Мұндағы Δ_1 анықтауыштың p мен q жатық жолдарының барлық сәйкес элементтері тең, олай болса, 3-қасиет бойынша, $\Delta_1 = 0$. Демек, $\Delta = 0$.

Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & c \cdot a_{11} \\ a_{21} & c \cdot a_{21} \end{vmatrix} = c \cdot (a_{11} a_{21} - a_{11} a_{21}) = 0.$$

6-қасиет. Анықтауыштың k жатық (тік) жолының элементтері екі қосылғыштан тұрса, яғни $a_{kj} = b_{kj} + c_{kj}$, $j = \overline{1, n}$, онда ол анықтауыш екі анықтауыштың қосындысына тең:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta_1 + \Delta_2 \ .$$

Анықтауыштың анықтамасы бойынша:

$$\Delta = \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ki_k} \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} \dots (b_{ki_k} + c_{ki_k}) \dots a_{ni_n} =$$

$$= \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} \dots b_{ki_k} \dots a_{ni_n} +$$

$$+ \sum (-1)^{[i_1 i_2 \dots i_n]} \cdot a_{1i_1} \dots c_{ki_k} \dots a_{ni_k} = \Delta_1 + \Delta_2 \ .$$

Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21}+c_{21} & b_{22}+c_{22} \end{vmatrix} = a_{11}(b_{22} + c_{22}) - a_{12}(b_{21} + c_{21}) =$$

$$= a_{11} b_{22} - a_{12} b_{21} + a_{11} c_{22} - a_{12} c_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{vmatrix}.$$

7-қасиет. Анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолының барлық элементтерін α санына көбейтіп, оны келесі бір жатық (тік) жолының сәйкес элементтеріне қоссақ, онда оның мәні өзгермейді.

Анықтық үшін, Δ — анықтауыштың p жатық жолының барлық элементтерін α санына кебейтіп, оны келесі q жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & a_{q2} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \alpha \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1}+\alpha \cdot a_{p1} & \dots & a_{qn}+\alpha \cdot a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Анықтауыштың 6-қасиеті бойынша, Δ анықтауышын екі анықтауыштың қосындысы ретінде қарастырамыз:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \alpha \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & \dots & a_{pn} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{q1} & \dots & a_{qn} \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ (p \\ , \\ (q \\ \\ \\ \end{matrix}$$

Мұндағы бірінші анықтауыш бастапқы анықтауыштың мәніне тең, ал екінші анықтауыштың p жатық жолының барлық элементтері q жатық жолының сәйкес элементтеріне тең. Ендеше, анықтауыштың 3-ші қасиеті бойынша екінші анықтауыш нөлге тең. Олай болса, бастапқы анықтауыштың мәні өзгерген жоқ.

Мысалы,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \alpha = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21}+\alpha \cdot a_{11} & a_{22}+\alpha \cdot a_{12} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22} + \alpha \cdot a_{12}) - a_{12}(a_{21} + \alpha \cdot a_{11}) =$$

$$= a_{11}a_{22} - a_{12} \cdot a_{21} - \alpha \cdot (a_{11}a_{12} - a_{11}a_{12}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \Delta.$$

§ 1.4. Минорлар және алгебралық толықтауыштар

Анықтама. n-ретті анықтауыштың a_{ij} элементінің M_{ij} *миноры* деп, осы анықтауыштың i жатық, j тік жолдарынсыз алынған (n - 1)-ретті анықтауышты айтамыз, яғни:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Анықтауыштың a_{ij} элементінің A_{ij} *алгебралық толықтауышы* деп, $(-1)^{i+j}$ таңбасымен алынған осы a_{ij} элементтің минорын айтамыз, яғни:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

1.3-теорема. Егер Δ анықтауыштың j-тік (жатық) жолының a_{ij} элементінен өзге барлық элементтері нөлге тең болса: $a_{1j} = 0,\ \dots,\ a_{i-1,j} = 0,\ a_{i+1,j} = 0,\ \dots,\ a_{nj} = 0$, онда Δ анықтауыштың мәні a_{ij} элементімен оның A_{ij} алгебралық толықтауышының көбейтіндісіне тең:

$$\Delta = A_{ij} \cdot a_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot a_{ij}M_{ij}.$$

Дәлелдеуі. Ең алдымен Δ анықтауыштың a_{11} элементінен басқа бірінші тік жолының барлық элементі нөлге тең жағдайды қарастырайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың есептеу формуласының әр қосылғышында бірінші тік жолының бір-бір элементтері бар екенін ескерсек, онда анықтауыштың есептеу формуласындағы a_{11} элементі бар қосылғыштардан басқа қосылғыштар нөлге тең. Ендеше,

$$\Delta = \sum_{j_2,\dots,j_n} (-1)^{[1,j_2,\dots,j_n]} \cdot a_{11} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= a_{11} \sum (-1)^{[1,j_2,\dots,j_n]} \cdot a_{2j_2} \cdot \dots \cdot a_{nj_n},$$

мұндағы $j_2, j_3, \dots j_n$ индекстері 2, 3, . . ., n мәндерін қабылдайды. Егер де бірінші орында тұрған 1 бірде бір инверсия құрмайтынын ескерсек, яғни $[1, j_2, j_3, \dots, j_n] = [j_2, j_3, \dots, j_n]$, онда

$$\Delta = a_{11} \cdot \sum (-1)^{[j_2,\dots,j_n]} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot a_{4j_4} \cdot \dots \cdot a_{nj_n} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot M_{11} = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \cdot M_{11} = a_{11} \cdot A_{11}.$$

Енді j тік жолының a_{ij} элементінен өзге барлық элементтері нөлге тең Δ анықтауышын қарастырайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i1} & \dots & a_{i,j-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{i,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Осы анықтауыштың i жатық жолын i-1 жатық жолымен орын алмастырсақ, одан соң оны i-2 жатық жолымен, және тағы сол сияқты, ең соңында оны бірінші жатық жолымен орын алмастырсақ, анықтауыштың 2-қасиетін ескерсек, онда

$$\Delta = (-1)^{i-1} \cdot \begin{vmatrix} a_{i1} & \dots & a_{ij-1} & a_{ij} & a_{i,j+1} & \dots & a_{in} \\ a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & 0 & a_{1,j+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i-1,1} & \dots & a_{i-1,j-1} & 0 & a_{i-1,j+1} & \dots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \dots & a_{i+1,j-1} & 0 & a_{i+1,j+1} & \dots & a_{i+1,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Соңғы анықтауыштың j-тік жолын j - 1 тік жолымен, одан кейін оны j - 2 тік жолымен т. с. с. ең соңында бірінші тік жолмен орын алмастырсақ және анықтауыштың 2-қасиетін ескерсек, онда

$$\Delta = (-1)^{i+j-2} \cdot \begin{vmatrix} a_{ij} & a_{i1} & \ldots & a_{i,j-1} & a_{i,j+1} & \ldots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot \Delta_1.$$

Δ_1 анықтауыштың есептеу формуласының әр қосылғышында осы анықтауыштың бірінші тік жолының бір-бір элементтері бар. Сондықтан, анықтауыштың есептелу формуласындағы a_{ij} элементі бар қосылғыштардан басқа қосылғыштар нөлге тең екенін ескерсек, онда

$$\Delta_1 = \sum (-1)^{[j j_1 j_2 \ldots j_{i-1} j_{i+1} \ldots j_n]} +$$

$$+ a_{ij} a_{1j_1} a_{2j_2} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n} =$$

$$= a_{ij} \cdot \sum (-1)^{j j_1 j_2 \ldots j_{i-1} j_{i+1} \ldots j_n} \cdot$$

$$\cdot a_{1j_1} \ldots a_{i-1,j_{i-1}} a_{i+1,j_{i+1}} \ldots a_{nj_n} =$$

$$= a_{ij} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} = a_{ij} \cdot M_{ij}.$$

Олай болса,

$$\Delta = (-1)^{i+j} a_{ij} \cdot M_{ij} = a_{ij} \cdot A_{ij}.$$

Теорема дәлелденді.

Мысал. Мына төмендегі төртінші ретті анықтауышты есептеңдер:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 7 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 2 \times 3 \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

Берілген анықтауыштың екінші тік жолының бірінші элементінен басқа элементтерін нөлге айналдырайық. Ол үшін алдымен бірінші жатық жолды 2-ге көбейтіп, оны 2-ші мен 4-жатық жолдарының сәйкес элементтеріне, ал одан соң 3-ке көбейтіп, 3-жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық (бұл жоғарыдағы айтылғандар тілше сызықпен көрсетілген. Мысалы, 2 белгісі бірінші жатық жолының бойында тұр, яғни бірінші жатық жолының барлық элементтері 2-ге көбейтіледі, ал стрелка — ол көбейтінділердің қай жатық жолдың сәйкес элементтеріне қосылатынын көрсетеді). Онда анықтауыштың 7-қасиеті бойынша Δ мәні өзгермейді, яғни:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 11 & 8 \\ 5 & 0 & 7 & 7 \\ 3 & 0 & 5 & 10 \end{vmatrix} = a_{12} A_{12} = -1(-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 11 & 8 \\ 5 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 5 & 11 & 8 \\ 5 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} + \\ \\ \times(-2) \end{array} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -12 \\ 5 & 7 & 7 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} \times 3 \times 5 \\ + \\ + \end{array} =$$

$$= \begin{vmatrix} -1 & 1 & -12 \\ 0 & 12 & -53 \\ 0 & 8 & -26 \end{vmatrix} = (-1)(-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 12 & -53 \\ 8 & -26 \end{vmatrix} =$$

$$= [-12 \cdot 26 + 7 \cdot 53] = -112.$$

§ 1.5. Анықтауыштарды тік немесе жатық жолдарының элементтері бойынша жіктеу

Кез келген n ретті анықтауыштарды есептеу үшін олардың тік немесе жатық элементтері бойынша жіктеу арқылы есептеуге болады. Енді осы әдіске тоқталайық. Бұл әдістің мақсаты — анықтауыштардың ретін төмендету.

1.4-теорема. Анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолдарының элементтерімен оның алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы осы анықтауыштың мәніне тең, яғни

$$\Delta=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ i=\overline{1,n}\quad \left(\Delta=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ j=\overline{1,n}\right).$$

Дәлелдеуі. Берілген Δ анықтауыштың оның i жатық жолының элементтері бойынша жіктелуін дәлелдейік. Ол үшін Δ анықтауышты мына түрде жазайық:

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+0+\dots+0 & a_{i2}+0+\dots+0 & \dots & a_{in}+0+\dots+0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

мұнда i жатық жолдарының элементтері n қосындыдан тұрады, оның n - 1 қосындысы нөлге тең. Анықтауыштың 6-қасиеті бойынша анықтауышы n анықтауыштың қосындысы деп қарастырамыз:

$$\Delta=\Delta_1+\Delta_2+\dots+\Delta_n\ ,$$

мұндағы

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & a_{i2} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ \dots,$$

$$\Delta_n=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Егер 4 параграфтағы теореманы ескерсек, онда

$$\Delta_1=a_{i1}\cdot A_{i1},\ \Delta_2=a_{i2}\cdot A_{i1},\ \dots,\ \Delta_n=a_{in}\cdot A_{in}.$$

Демек,

$$\Delta=a_{i1}\cdot A_{i1}+a_{i2}\cdot A_{i2}+\dots a_{in}\cdot A_{in}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ij}.$$

Теорема дәлелденді.

1.5-теорема. Анықтауыштың кез келген жатық (тік) жолдарының элементтері мен осы элементтерге сәйкес келесі жатық (тік) жолдарының элементерінің алгебралық толықтауыштары көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{kj}=0,\ i\neq k\quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\cdot A_{ik}=0\,,j\neq k\right).$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін Δ_1 анықтауышын:

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nk} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},\ j<k$$

және осы анықтауыштың j тік жолының элементтері k тік жолының элементтерімен тең болатын Δ_2 анықтауышын қарастырайық:

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Анықтауыштың 3-қасиеті бойынша $\Delta_2=0$. Енді осы Δ_2 анықтауышын k тік жолының элементтері бойынша жіктейік, онда:

$$\Delta_2=a_{1j}\cdot A_{1k}+a_{2j}\cdot A_{2k}+\dots+a_{nj}\cdot A_{nk},\ j\neq k.$$

мұндағы A_{ik} анықтауыштың a_{ik} элементінің алгебралық толықтауышы. Қарастырып отырған Δ_2 анықтауышы Δ_1 анықтауышынан айырмашылығы — оның k тік жолының элементтерінде. Сондықтан, Δ_2 анықтаушының k тік жолы элементтерінің алгебралық толықтауышы Δ_1 анықтауышының k тік жолы элементтерінің алгебралық толықтауышы да болады. Демек, $\Delta_2=0$ болғандықтан:

$$a_{1j}\cdot A_{1k}+a_{2j}\cdot A_{2k}+\dots+a_{nj}\cdot A_{nk}=0,$$

мұндағы $k\neq j$. Теорема дәлелденді.

1-мысал. Төмендегі төртінші ретті анықтауышты есептеңдер:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың үшінші тік жолының элементтері бойынша жіктеп есептейік:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 4 & -3 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$a_{14} \cdot A_{14} + a_{24} \cdot A_{24} + a_{34} \cdot A_{34} + a_{44} \cdot A_{44} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{4+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix}.$$

Үшінші ретті анықтауыштарды да осы сияқты жіктеп есептейік. Оларды бірінші жатық жолының элементтері бойынша жіктейік (екінші анықтауыш нөлге тең):

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 4 & -3 & 2 \\ 3 & 1 & -4 \end{vmatrix} =$$

$$= -4 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - (-3) \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} +$$

$$+ 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot 2 (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 2 \cdot 1 (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} -$$

$$- 2 \cdot 2 (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -4(1+8) - 3(3+4) - 2(6-1) + 2(-3-4) -$$

$$- (4-2) + 2(8+3) - 4(12-2) + 2(-16-6) -$$

$$- 4(4+9) - 217, \quad \Delta = 217.$$

2-мысал. Бірінші мысалдағы анықтауыштың үшінші тік жолының элементтері мен осы элементтерге сәйкес бірінші тік жолы элементтерінің алгебралық толықтауыштарының көбейтінділерінің қосындысы нөлге тең болатынын тексеріңдер:

$$a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31} + a_{43} A_{41} = 0,$$

мұндағы $a_{13} = -1$, $a_{23} = 0$, $a_{33} = 1$, $a_{43} = 2$, ал A_{i1} — анықтауыштарының мәнін есептеу үшін олардың ретін төмендету әдісімен есептейік:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} -2 = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = -27.$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} -1 \;\; -2 =$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & 4 & -3 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -6 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -18.$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} 2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -23.$$

$$A_{41} = (-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} 1 = -\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-1) \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} = -2.$$

Сонымен:

$$a_{13} A_{11} + a_{23} A_{21} + a_{33} A_{31} + a_{43} A_{41} =$$

$$= -1(-27) + 0(-18) + 1(-23) + 2(-2) = 27 - 23 - 4 = 0.$$

3-мысал. Төмендегі өрнектер бесінші ретті анықтауыштың есептеу формуласындағы қосылғыштар бола алатынын және олардың таңбасын анықтандар:

а) $a_{41} \cdot a_{32} \cdot a_{14} \cdot a_{53} \cdot a_{45}$; б) $a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{44} \cdot a_{55}$;
в) $a_{31} \cdot a_{51} \cdot a_{35} \cdot a_{24} \cdot a_{33}$; г) $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{34} \cdot a_{55}$;
д) $a_{15} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \cdot a_{53}$;

а) Бұл өрнек бесінші ретті анықтауыштың есептелуіндегі қосылғыш бола алмайды, себебі 4-жатық жолының екі элементі (a_{41} мен a_{45}) осы өрнектің көбейткіші.

б) $a_{12} \cdot a_{31} \cdot a_{23} \cdot a_{44} \cdot a_{55}$ — өрнегі анықтауыштың есептелуіндегі қосылғыштардың бірі болады, себебі бұл өрнектің әрбір көбейткіші анықтауыштың тік және жатық жолдарының тек бір ғана элементі. Енді осы қосылғыштың таңбасын анықтайық

$$\alpha = [1\ 3\ 2\ 4\ 5] = 1, \qquad \beta = [2\ 1\ 3\ 4\ 5] = 1.$$

Сонымен, $\alpha + \beta = 2$, яғни берілген қосылғыштың таңбасы оң болады.

ә) $a_{31} \cdot a_{51} \cdot a_{35} \cdot a_{24} \cdot a_{33}$ — өрнегі анықтауыштың есептелуіндегі қосылғыштардың бірі бола алмайды, себебі мұнда анықтауыштың үшінші жатық жолының a_{31}, a_{35}, a_{33} элементтері және де бірінші тік жолының a_{31} мен a_{51} элементтері бар.

б) $a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot a_{34} \cdot a_{55}$ өрнегі қосылғыш бола алмайды, себебі a_{33}, a_{34} — үшінші жатық жолдың элементтері.

в) $a_{15} \cdot a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{44} \cdot a_{53}$ өрнегі — анықтауыштың қосылғышы және

$$\alpha = [1\ 2\ 3\ 4\ 5] = 0, \ \beta = [5\ 1\ 2\ 4\ 3] = 5.$$

Демек, $\alpha + \beta = 5$, яғни оның таңбасы теріс болады.

4-мысал. *Үшбұрышты анықтауыш* деп аталатын мына өрнекті есептеңдер:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Үшбұрышты анықтауышты есептеу үшін оны бірінші жатық жолының элементтері бойынша жіктейік, сонда

$$\Delta = (-1)^{1+1} \cdot a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{32} & a_{33} & 0 & \dots & 0 \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n2} & a_{n3} & a_{n4} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot \Delta_{n-1},$$

мұндағы Δ_{n-1} — үшбұрышты n - 1-ретті анықтауыш. Енді Δ_{n-1} анықтауышын бірінші жатық жолының элементтері бойынша жіктеп, мына анықтауышты аламыз:

$$\Delta = a_{11} \cdot \Delta_{n-1} = a_{11} (-1)^{1+1} a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{43} & a_{44} & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n3} & a_{n4} & a_{n5} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} \cdot \Delta_{n-2},$$

мұндағы Δ_{n-2} — үшбұрышты n - 2-ретті анықтауыш.

Осылайша, $\Delta_{n-2}, \Delta_{n-3}, \ldots, \Delta_2$ анықтауыштарды бірінші жатық жолдарының элементтері бойынша жіктеп берілгін анықтауыштың мәнін табамыз:

$$\Delta = \ldots = \ldots = a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{33} \cdot \ldots \cdot a_{n-2n-2} \cdot$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{nn-1} & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{23} \ldots a_{n-1,n-1} \cdot a_{nn}$$

Сонымен, кез келген үшбұрышты анықтауыштың мәні оның негізгі (қосалқы) диагонал элементтерінің көбейтіндісіне тең.

5-мысал. Төмендегі n ретті анықтауышты есептеңдер:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 4 & 1 & \ldots & 1 \\ 1 & 1 & 4 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 4 \end{vmatrix}.$$

Берілген анықтауыштың бірінші тік жолының элементтеріне екінші тік жолының сәйкес элементтерін, содан соң үшінші тік жолының сәйкес элементтерін т. с. с. ең соңында n-тік жолының сәйкес элементтерін қосып, осы анықтауыштың мәніне тең мына анықтауышты аламыз (7-қасиет):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4+(n-1) & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 4+(n-1) & 4 & 1 & \ldots & 1 \\ 4+(n-1) & 1 & 4 & \ldots & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 4+(n-1) & 1 & 1 & \ldots & 4 \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың бірінші жатық жолын — 1-ге көбейтіп, оны екінші, үшінші, т. с. с. n-жатық жолдарының сәйкес элементтеріне қосайық. Сонда, үшбұрышты анықтауышты аламыз (4-мысалды қараңдар):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4+(n-1) & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 3 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 3 \end{vmatrix}.$$

Ал бұл матрицаның мәні негізгі диагонал элементтерінің көбейтіндісіне тең, яғни

$$\Delta = [4 + (n - 1)]\, 3^{n-1} = (3 + n)\, 3^{n-}$$

6-мысал. Төмендегі n-ретті анықтауышты есептеңдер:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

Берілген анықтауыштың бірінші тік жолының элементтеріне екінші, үшінші, т. с. с. ең соңында n-тік жолдарының сәйкес элементтерін қосайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+(n-1) & b & b & b & \ldots & b \\ a+(n-1) & b & a & b & \ldots & b \\ a+(n-1) & b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a+(n-1) & b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

Енді бірінші жатық жолының элементтерін — 1-ге көбейтіп, оларды екінші, үшінші, т. с. с. ең соңында n-жатық жолдарының сәйкес элементтеріне қосайық:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a+(n-1)b & b & b & \ldots & b \\ 0 & a-b & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a-b \end{vmatrix}$$

Соңғы үшбұрышты анықтауыш, ал оның мәні негізгі диагонал элементтерінің көбейтіндісіне тең (4-мысалды қараңдар). Демек,

$$\Delta = [a + (n - 1)\, b] \cdot (a - b)^{n-1}$$

7-мысал. *Вандермонд анықтауышы* деп аталатын мына анықтауышты есептеңдер:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Берілген анықтауыштың бірінші жатық жолының бірінші элементінен өзге элементтерін нөлге айналдырайық. Ол үшін анықтауыштың бірінші тік жолын $-a_1$-ге көбейтіп, екінші тік жолының сәйкес элементтеріне қосайық, ал екінші тік жолын a_1-ге көбейтіп, үшінші тік жолының сәйкес элементтеріне қосайық, т.с.с., ең соңында $n-1$-тік жолын — a_1-ге көбейтіп, n-тік жолының сәйкес элементтеріне қосып, мына анықтауышты аламыз:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & a_2-a_1 & a_2^2-a_1a_2 & \dots & a_2^{n-1}-a_1a_2^{n-2} \\ 1 & a_3-a_1 & a_3^2-a_1a_3 & \dots & a_3^{n-1}-a_1a_3^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n-a_1 & a_n^2-a_1a_n & \dots & a_n^{n-1}-a_1a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Соңғы анықтауышты есептеу үшін оны бірінші жатық жолының элементтері бойынша жіктейік:

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} a_2-a_1 & a_2(a_2-a_1) & \dots & a_2^{n-2}(a_2-a_1) \\ a_3-a_1 & a_3(a_3-a_1) & \dots & a_3^{n-2}(a_3-a_1) \\ a_4-a_1 & a_4(a_4-a_1) & \dots & a_4^{n-2}(a_4-a_1) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n-a_1 & a_n(a_n-a_1) & \dots & a_n^{n-2}(a_n-a_1) \end{vmatrix}.$$

Анықтауыштың жатық жолдарындағы элементтердің ортақ көбейткіштерін анықтауыш таңбасының алдына шығарайық:

$$\Delta_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot$$

$$\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_2^2 & \dots & a_2^{n-2} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \dots & a_3^{n-2} \\ 1 & a_4 & a_4^2 & \dots & a_4^{n-2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \dots & a_n^{n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots(a_n-a_1)\cdot\Delta_{n-1},$$

мұндағы Δ_{n-1} — $n-1$-ретті — Вандермонд анықтауышы.

Енді Δ_n — Вандермонд анықтауышына қолданған амалдарды Δ_{n-1}-ге қолданайық. Сонда

$$\Delta_{n-2} = (a_3-a_2)(a_4-a_2)\dots(a_n-a_2)\cdot\Delta_{n-2},$$

мұндағы Δ_{n-2} — $n-1$-ретті Вандермонд анықтауышы. Осылайша анықтауыштардың ретін төмендетіп, мына анықтау- ыштарды есептейміз:

$$\Delta_{n-2} = (a_4-a_3)(a_5-a_3)\dots(a_n-a_3)\cdot\Delta_{n-3},$$
$$\Delta_{n-3} = (a_5-a_4)(a_6-a_4)\dots(a_n-a_4)\cdot\Delta_{n-4},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\Delta_1 = a_n - a_{n-1}\ .$$

Демек,

$$\Delta_n = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\dots\cdot(a_n-a_1)\cdot(a_3-a_2)\cdot$$
$$\cdot(a_4-a_2)\cdot\dots\cdot(a_n-a_2)\dots(a_n-a_2)\dots(a_n-a_{n-1}).$$

§1.6. Матрица

Анықтама. $m\times n$ — *ретті матрица* деп, m-жатықжәне n-тік жолдардан анықталған тік бұрышты таблицаны айтамыз, ол мына түрде белгіленеді:

$$A = \left\|\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{matrix}\right\|,\quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{A} = (a_{ij}),\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$$

мұндағы a_{ij} — *матрицаның элементтері* деп аталады, бірінші индекс i матрицаның жатық жолының, ал екінші индекс j-тік жолының нөмірін анықтайды.

Егер матрицаның жатық жолының саны тік жолының санына тең болса, яғни $m=n$, онда ол матрица *квадратты (квадрат) матрица* деп аталады, яғни

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Бұл жағдайда, A матрица n-ретті матрица деп те аталады.

Квадратты матрицаның $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ элементтері оның *негізгі диагоналы*, ал $a_{1n}, a_{2n-1}, \dots, a_{n1}$ элементтері *қосалқы диагоналы* деп аталады. Матрицаның негізгі және қосалқы диагоналдары тек квадратты матрицаларға ғана тән.

Кез келген бір санды бір жатық және бір тік жолдан анықталған квадратты матрица деп қарастыруға болады және оның реті 1×1 болады.

Егер матрицаның барлық элементтері нөлге тең болса, онда ол матрица *нөл матрица* деп аталады және ол 0 символымен белгіленеді:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Егер матрицаның негізгі диагоналының элементтерінен өзге элементтері нөлге тең болса: $a_{ij} = 0, i \neq j$, $a_{ij} \neq 0, i = j$ онда ол матрица *диагоналды матрица* деп аталады және ол мына түрде белгіленеді:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Егер диагоналды матрицаның барлық элементтері бірге тең болса: $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = 1$, онда ол *бірлік матрица* деп аталады және ол

$$E = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

символымен белгіленеді. Егер $a_{ij} = a_{ji}, i = \overline{1, n}, j = \overline{1, n}$, теңдігі орындалса, онда кез келген

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица *симметриялы* деп аталады.

Егер негізгі диагоналдан төмен орналасқан немесе жоғары орналасқан элементтері нөлге тең болса, онда квадратты

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \text{ немесе } A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

матрица *үшбұрышты матрица* деп аталады.

Егер матрица бір тік (жатық) жолдан анықталса, онда ол матрица *тік (жатық) жолды матрица* деп аталады және ол

$$A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_n \end{pmatrix}, \quad A = (a_1, a_2, \dots, a_n)$$

символымен белгіленеді.

Бірдей ретті A мен B матрицалар *тең* деп аталады, егер олардың сәйкес элементтері тең болса, яғни

$$a_{ij} = b_{ij}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n},$$

мұндағы a_{ij} мен b_{ij} берілген A мен B матрицаларының элементтері.

Ескерту. Матрицалардың теңдігі жайлы тек қана бірдей ретті матрицаларға ғана сөз қозғауға болады.

Берілген квадрат *A матрицаның анықтауышы* немесе *детерминанты* мына түрде белгіленеді

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ немесе } \det A = |A|.$$

Бірлік E матрицасының анықтауышы 1-ге тең, яғни $|E| = 1$.

Бізге кез келген A матрица берілсін. Берілген A матрицаны оның жатық және тік жолдары бойымен жеке тік бұрышты тор көздерге бөлейік. Осы тор көз A матрицаның *блогы* деп аталады.

Берілген A матрицаны $A = (A_{kl})$ — блокты матрица түрінде қарастырамыз, мұндағы A_{kl} — берілген Aматрицаның блоктары, яғни блокты матрицаның элементтері — матрица, k — блокты матрицаның жатық, ал l-тік жолдарының нөмірін анықтайды. Мысалы,

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{cc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ \hline a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{61} & a_{62} & a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{array}\right)$$

матрицаны *тор көзді блокты матрица* деп қарастырамыз:

$$\mathrm{A} = \left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right),$$

мұндағы

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{43} & a_{44} & a_{45} \end{pmatrix},$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{51} & a_{52} \\ a_{61} & a_{62} \end{pmatrix}, \quad A_{22} = \begin{pmatrix} a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{63} & a_{64} & a_{65} \end{pmatrix}$$

тор көзді блокты матрицаның блоктары.

Матрицаны тор көздерге қалауымызша бөлеміз.

§1.7. Матрицаларға амалдар қолдану

Матрицаларға қосу, алу, көбейту және санды матрицаға көбейту амалдары орындалады. Бірақ осы аталған амалдар кез келген матрицаларға орындалмайды.

1. Матрицаларды қосу. Бірдей ретті $A = (a_{ij})$ мен $B = (b_{ij})$ *матрицаларының алгебралық қосындысы* деп сол ретті $C = (c_{ij})$ матрицасын айтамыз:

$$C = A \pm B$$

және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = a_{ij} \pm b_{ij}, \ i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \qquad (1.14)$$

Мысалы, $m \times n$-ретті A мен B матрицаларының алгебралық қосындысын қарастырайық:

$$\mathrm{C} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \pm \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \dots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \dots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \dots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{pmatrix}.$$

Демек, матрицалардың алгебралық қосындысының (1.14) формуласынан мынадай қорытындыға келеміз. Бірдей ретті матрицалардың алгебралық қосындысына нақты сандарға орындалатын ауыстырымдылық пен терімділік қасиеттер орындалады:

1) ауыстырымдылық қасиет: $A + B = B + A$;
2) терімділік қасиет: $(A + B) + C = A + (B + C)$;
3) $A + 0 = A$;
4) $A + (-A) = 0$, мұндағы 0 — матрица.

2. Матрицаларды санға көбейту. Кез келген A *матрицаны* α *санына көбейту* деп C матрицаны айтамыз:

$$C = \alpha \cdot A \text{ немесе } C = A \cdot \alpha$$

және оның кез келген элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = \alpha \cdot a_{ij}, \qquad i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}. \qquad (1.15)$$

Мысалы, $m \times n$-ретті A матрицаны α нақты санына (1.15) формула бойынша көбейтейік:

$$C = \alpha \cdot A = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot a_{11} & \alpha \cdot a_{12} & \ldots & \alpha \cdot a_{1n} \\ \alpha \cdot a_{21} & \alpha \cdot a_{22} & \ldots & \alpha \cdot a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha \cdot a_{m1} & \alpha \cdot a_{m2} & \ldots & \alpha \cdot a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Сонымен, берілген A матрицаны α санынаң көбейту үшін осы матрицаның барлық элементтерін α санына көбейту қажет.

Демек, (1.15) формуладан мынадай қорытындыға келеміз. Матрицаны санға көбейткенде мына қасиеттер орындалады:

1) сандар көбейткіштеріне терімділік қасиет:

$$(\alpha \cdot \beta)\, A = \alpha\, (\beta\, A);$$

2) матрицалардың қосындыларына үлестірімділік қасиет:

$$\alpha\, (A + B) = \alpha\, A + \alpha\, B;$$

3) сандардың қосындысына үлестірімділік қасиет:

$$(\alpha + \beta)\, A = \alpha\, A + \beta\, A.$$

3. Матрицаны матрицаға көбейту. Берілген $m \times n$-ретті A *матрицаның* $n \times k$*-ретті* B *матрицаға көбейтіндісі* деп, $m \times k$-ретті C матрицаны айтамыз:

$$C = A \cdot B.$$

Ал оның кез келген элементтері c_{ij} мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot b_{kj}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, k}. \qquad (1.16)$$

Осы анықтамадан A матрицаны B матрицаға көбейтуге болады, егер A матрицаның тік жолының саны B матрицасының жатық жолының санына тең болса, бұл жағдайда $C = A \cdot B$ матрицаның жатық жолының саны A матрицаның жатық жолының санына тең, ал оның тік жолының саны B матрицаның тік жолының санына тең.

Мысалы, үшінші ретті A мен B квадрат матрицаларының $A \cdot B$ көбейтіндісін қарастырайық:

$$C = A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{pmatrix}.$$

Берілген A мен B матрицаларын көбейткенде AB мен BA матрицалары бар болу үшін A матрицаның тік жолының саны B матрицасының жатық жолының санына, ал A матрицаның жатық жолының саны B матрицаның тік жолының санына тең болуы керек. Бұл жағдайда AB мен BA матрицалары квадратты матрица болады және олардың реті әртүрлі, ал олардың реті тең болуы үшін A мен B матрицалары бірдей ретті квадрат матрица болуы қажетті әрі жеткілікті.

Мысал.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Бұл мысалда A матрицаны B матрицаға көбейтуге болады, себебі A матрицаның тік жолының саны B матрицаның жатық жолына тең $(3 = 3)$:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \\ 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 4 & 3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 & 3 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 & -1 & 5 \\ b & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

Ал B матрицаны A матрицаға көбейтуге болмайды, себебі B матрицаның тік жолының саны A матрицасының жатық жолының санына тең емес $3 \neq 2$.

Енді екінші ретті A мен B квадрат матрицаларының көбейтінділерін қарастырайық, мысалы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 14 \\ 18 & -22 \end{pmatrix},$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 13 \\ 7 & -29 \end{pmatrix}.$$

Демек, егер AB мен BA көбейтінділері бар болғанмен де олар өзара тең емес, яғни $AB \neq BA$. Жалпы жағдайда матрицалар көбейтінділеріне ауыстырымдылық қасиет орындалмайды. Сонымен, (1.16) формуладан матрицалардың көбейтінділеріне мына қасиеттер орындалады (егер көбейтінділер бар болса):

1) терімділік қасиет: $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;

2) үлестірімділік қасиет: $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$.

Тікелей көбейту арқылы

$$A \cdot E = E \cdot A = A$$

теңдігі орындалатындығына оңай көз жеткіземіз.

Блокты матрицаларға да жоғарыдағы амалдардың орындалатындығын қарастырайық.

Егер $A = (a_{ij})$ — блокты матрица, ал $A_{\alpha\beta}$ — оның блокты элементтері болса, онда $\lambda \cdot A = (\lambda \cdot a_{ij})$ — блокты матрицаға $\lambda \cdot A_{\alpha\beta}$ — блокты элементтері сәйкес келеді.

Егер A мен B бірдей ретті матрицалар болса әрі бірдей ретті блоктарға бөлінсе, онда олардың алгебралық қосындысына $C = A \pm B$ — блокты матрица сәйкес келеді және оның блокты элементтері мына формуладан анықталады

$$C_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} \pm B_{\alpha\beta},$$

мұндағы $A_{\alpha\beta}$ мен $B_{\alpha\beta}$ берілген A мен B блокты матрицаларының блокты элементтері.

Көп жағдайда блокты-диагонал матрицаларға амалдар қолдануға тура келеді. Мысалы, егер

$$A = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \boxed{A_{kk}} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} \boxed{B_{11}} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \boxed{B_{kk}} \end{pmatrix},$$

болса, онда

$$A \pm B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} \pm B_{11}} & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & \ldots & \boxed{A_{kk} \pm B_{kk}} \end{pmatrix},$$

$$\alpha \cdot A = \begin{pmatrix} \boxed{\alpha \cdot A_{11}} & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \boxed{\alpha \cdot A_{kk}} \end{pmatrix},$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} \boxed{A_{11} \cdot B_{11}} & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & \boxed{A_{kk} \cdot B_{kk}} \end{pmatrix},$$

болады.

Мысалдар. 1. Төмендегі амалдарды орындаңдар.

1) $A - 2B$, 2) $AB - BA$, 3) CA, 4) CD,

мұндағы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \; C = (401), \; D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1)

$$2B = 2 \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix},$$

$$A - 2B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 8 & 0 & 4 \\ 2 & 6 & 2 \\ 0 & 4 & 6 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3-8 & 2-0 & 1-4 \\ 1-2 & 0-6 & 2-2 \\ 1-0 & -1-4 & 1-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 2 & -3 \\ -1 & -6 & 0 \\ 1 & -5 & -5 \end{pmatrix}.$$

2)

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 3 \cdot 0 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 3 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 & 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 + 2 \cdot 2 & 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \\ 1 \cdot 4 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 1 \cdot 0 - 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 & 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 8 & 11 \\ 4 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix},$$

$$-B \cdot A = -\begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\begin{pmatrix} 12+0+2 & 8+0-2 & 4+0+2 \\ 3+3+1 & 2+0-1 & 1+6+1 \\ 0+2+3 & 0+0-3 & 0+4+3 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 6 & 6 \\ 7 & 1 & 8 \\ 5 & -3 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & -6 & -6 \\ -7 & -1 & -8 \\ -3 & 5 & -7 \end{pmatrix},$$

$$AB - BA = \begin{pmatrix} 14 & 8 & 11 \\ 4 & 4 & 8 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14 & -6 & -6 \\ -7 & -1 & -8 \\ -5 & 3 & -7 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 & 5 \\ -3 & 3 & 0 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

3)

$$C \cdot A = (401) \cdot \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$=(4 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \quad 4 \cdot 2 + 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 \quad 4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1)=(13 \ 7 \ 5).$$

4)

$$C \cdot D = (4\,0\,1) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = (4 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 3) = (7).$$

2. Берілген n-ретті диагоналды матрицалардың көбейтіндісі мен қосындысын анықтаңдар:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = B \cdot A,$$

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}+b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Демек, бірдей ретті диагоналды матрицалардың көбейтіндісі де қосындысы да диагоналды матрица.

§1.8. Матрицаны транспонирлеу

Біз кез келген $m \times n$-ретті

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})$$

матрицасын қарастырайық.

Анықтама. $A' = (a'_{ij})$ матрица $m \times n$ ретті A матрицасының *транспонирленген* матрицасы деп аталады, егер $a'_{ij} = a_{ij}$ теңдігі орындалса, ол былай белгіленеді:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{m2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; i = \overline{1, m}, \; j = \overline{1, n}.$$

Осы анықтамадан, A — матрицаның жатық жолдарының элементтерін оның сәйкес тік жолдарының сәйкес элементтерімен орын алмастыру нәтижесінде берілген A матрицасының транспонирленген матрица $n \times m$-ретті матрица екендігі шығады.

Бірлік матрицаның транспонирленген матрицасы осы матрицаның өзіне тең, яғни $E = E'$.

Егер A мен B матрицаларының көбейтіндісі анықталса, онда олардың көбейтіндісін транспонирлеу үшін төмендегі формуланы қолданамыз:

$$(A \cdot B)' = B' \cdot A'.$$

Бұл формуланы дәлелдәу үшін A мен B матрицаларын квардатты матрица деп қарастырайық. Сонда

$$(A \cdot B)' = \begin{pmatrix} \sum a_{1k} \cdot b_{k1} & \sum a_{2k} \cdot b_{k1} & \dots \sum a_{nk} \cdot b_{k1} \\ \sum a_{1k} \cdot b_{k2} & \sum a_{2k} \cdot b_{k2} & \dots \sum a_{nk} \cdot b_{k2} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum a_{1k} \cdot b_{kn} & \sum a_{2k} \cdot b_{kn} & \dots \sum a_{nk} \cdot b_{kn} \end{pmatrix}$$

$$B' \cdot A' = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{21} & \dots & b_{n1} \\ b_{12} & b_{22} & \dots & b_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{1n} & b_{2n} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum b_{k1} \cdot a_{1k} & \sum b_{k1} \cdot a_{2k} & \dots \sum b_{k1} \cdot a_{nk} \\ \sum b_{k2} \cdot a_{1k} & \sum b_{k2} \cdot a_{2k} & \dots \sum b_{k2} \cdot a_{nk} \\ \dots & \dots & \dots \\ \sum b_{kn} \cdot a_{1k} & \sum b_{kn} \cdot a_{2k} & \dots \sum b_{kn} \cdot a_{nk} \end{pmatrix},$$

мұндағы қосындылар k индекс бойынша алынады, $k = \overline{1, n}$. Көбейтінділерді салыстырып, дәлелдеу керек формуламызды аламыз.

Егер $C = A \pm B$ — қосындысы анықталса, онда

$$C' = A' \pm B'$$

теңдігі орындалады.

Шынында да

$$c'_{ij} = c_{ji} = a_{ji} + b_{ji} = a'_{ij} + b'_{ij}.$$

Симметриялы матрицаның анықтамасын транспонирленген матрица арқылы берейік.

Анықтама. Егер $A = A'$ теңдігі орындалса, онда квадрат A — матрица *симметриялы* деп аталады.

1.6-теорема. Кез келген n-ретті квадрат A матрицаның анықтауышы осы матрицаның транспонирленген матрицасының анықтауышына тең:

$$|A| = |A'|,$$

яғни транспонирлеу нәтижесінде анықтауыштың мәні өзгермейді.

Дәлелдеуі. Теореманы математикалық индукция әдісі бойынша дәлелдейік. Екінші ретті ($n = 2$) квадрат матрица

үшін $|A| = |A'|$ теңдігінің орындалатынына тікелей есептеу арқылы көз жеткіземіз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}, \ |A| = |A'|.$$

Енді n - 1-ретті квадрат матрица үшін теорема дәлелденді деп ұйғарып, n-ретті матрица үшін теореманы дәлелдейік. Ол үшін A — квадрат матрицаның анықтауышын бірінші жатық жолының элементтері бойынша, ал A' — транспонирленген матрицаның анықтауышын бірінші тік жолының элементтері бойынша жіктеп есептейік:

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{1j} = \sum (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{1j}, \qquad (1.17)$$

$$|A'| = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \cdot A_{j1} = \sum (-1)^{1+j} a_{1j} \cdot M_{j1}, \qquad (1.18)$$

мұндағы

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$M_{1j} = \begin{vmatrix} a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$|A'| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ M_{j1} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{31} & \dots & a_{n1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2,j-1} & a_{3,j-1} & \dots & a_{n,j-1} \\ a_{2,j+1} & a_{3,j+1} & \dots & a_{n,j+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{2n} & a_{3n} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Ұйғаруымыз бойынша n - 1-ретті анықтауыштар тең, яғни n - 1-ретті M_{1j} мен M_{j1} — анықтауыштары математикалық индукция бойынша өзара тең: $M_{1j} = M_{j1}$. Олай болса, (1.17) пен (1.18) теңдіктерінен дәлелдеу керек $|A| = |A'|$ теңдікті аламыз. Теорема дәлелденді.

§1.9. Матрица көбейтінділерінің анықтауышы

Жартылай жіктелген блокты матрица деп аталатын мына төмендегі $n+m$-ретті матрицаны қарастыралық:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline C & B \end{array}\right),$$

мұндағы $A=(a_{ij})_{n\times n}$, $B=(b_{ij})_{m\times m}$ квадрат n, m-ретті оның диагонал матрицалары.

1.7-теорема. Жартылай жіктелген блокты D матрица анықтауышы оның диагонал матрицалары анықтауыштарының көбейтіндісіне тең, яғни

$$|D| = |A|\cdot|B|.$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін математикалық индукция әдісін пайдаланамыз. Егер де D екі ретті матрица болса:

$$D = \left(\begin{array}{c|c} d_{11} & 0 \\ \hline d_{21} & d_{22}\end{array}\right), \quad d_{11}=a_{11},\ d_{21}=c_{21},\ d_{22}=b_{22},$$

онда $|D|=d_{11}d_{22}$. Енді $n+m-1$-ретті жартылай блокты D матрицаға теорема дәлелденді деп, оны $(n+m)$-ретті матрицаға дәлелдейік.

1.5-параграфтағы 1.4-теорема бойынша $|D|$ анықтауышын бірінші жатық жолының элементтерімен жіктейік:

$$|D| = a_{11}D_{11}+a_{12}D_{12}+\dots a_{1n}D_{1n}, \qquad (1.19)$$

мұндағы $D_{1j}-d_{1j}$ элементтің алгебралық толықтауышы:

$$D_{1j} = \left|\begin{array}{cccccc|c} a_{21} & \dots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \dots & a_{2n} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \\ a_{n1} & \dots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \dots & a_{nn} & \\ \hline & & & & & & B\end{array}\right| =$$

$$= \left|\begin{array}{c|c} A_{1j} & 0 \\ \hline & B\end{array}\right|, \quad j=\overline{1,n},$$

ал $A_{ij}-A$ матрицасының a_{ij} элементінің алгебралық толықтауышы. $Д_{1j}$ анықтауышының реттері немесе $Д_{1j}$

анықтауыштарының реті: $m+n-1$. Онда математикалық индукция тұжырымы бойынша:

$$D_{1j}=A_{1j}\,|B|,$$

(1.19) теңдік мына түрде жазылады:

$$|D| = a_{11}\,|A_{1j}|\,|B| + a_{12}|A_{2j}|\,|B| + \dots + a_{1n}\,|A_{nj}|\cdot|B| =$$

$$= (a_{11}A_{1j}+a_{12}A_{2j}+\dots+a_{1n}A_{nj})\cdot|B|.$$

Егер де 1.5-параграфтағы 1.4-теореманы ескерсек, онда $|D|=|A|\,|B|$. Теорема дәлелденді.

1.8-теорема. Егер A мен B квадратты матрица болса, онда матрицалар көбейтінділерінің анықтауышы олардың анықтауыштарының көбейтінділеріне тең, яғни

$$|A\cdot B| = |A|\cdot|B|.$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін n-ретті A мен B және E матрицаларын:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{pmatrix},$$

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1\end{pmatrix}$$

және осы матрицалардан анықталған

$$D=\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B\end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn}\end{array}\right) \qquad (1.20)$$

блокты матрицаны қарастырайық. Теореманы бірнеше қадамға бөліп дәлелдейік.

1-қадам. Бірінші қадамның мақсаты $|D|$ — блокты анықтауыштағы A матрицаның бірінші жатық жолының элементтерін нөлге айналдыру. Ол үшін $|D|$ — анықтауштың

$n+1$ — жатық жолының элементтерін a_{11}-ге көбейтіп,
$n+2$ — жатық жолының элементтерін a_{12}-ге көбейтіп,
. . . .
$n+n=2n$ — жатық жолының элементтерін a_{1n}-ге көбейтіп, бірінші жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық, сонда

$$D=\left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right| =$$

$$=\left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right|,$$

мұндағы $c_{1j}=\sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{kj},\ j=\overline{1,n}$.

2-қадам. Екінші қадымның мақсаты $|D|$ анықтауышындағы A матрицаның екінші жатық жолының элементтерін нөлге айналдыру. Ол үшін $|D|$ — анықтауштың

$n+1$ — жатық жолының элементтерін a_{21}-ге көбейтіп,
$n+2$ — жатық жолының элементтерін a_{22}-ге көбейтіп,
. . . .
$n+n=2n$ — жатық жолының элементтерін a_{2n}-ге көбейтіп, екінші жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық, сонда

$$|D|=\left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{34} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right|,$$

мұндағы $c_{2j}=\sum_{k=1}^{n} a_{2k}b_{kj},\ j=\overline{1,n}$.

Осы әдісті n-қадамға дейін жалғастырайық.

n-қадам. n-қадамның мақсаты $|D|$-анықтауышындағы A матрицаның n — жатық жолындағы элементтерін нөлге айналдыру. Ол үшін $|D|$ — анықтауышының

$n+1$ — жатық жолының элементтерін a_{n1}-ге көбейтіп,
$n+2$ — жатық жолының элементтерін a_{n2}-ге көбейтіп,
. . . .
$2n$-жатық жолының сәйкес элементтерін a_{nn}-ге көбейтіп, n-жатық жолының сәйкес элементтеріне қосайық, сонда

$$|D|=\left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & \dots & 0 & c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \\ \hline -1 & 0 & \dots & 0 & b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ 0 & -1 & \dots & 0 & b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & -1 & b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{array}\right|, \quad (1.21)$$

мұндағы $c_{nj}=\sum_{k=1}^{n} a_{nk}b_{kj},\ j=\overline{1,n}$.

Сонымен,

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj},\ i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,n}\ .$$

Олай болса, (1.21) мен матрицаны матрицаға көбейту амалынан ((1.16 формуланы қара):

$$|D| = \left|\begin{array}{c|c} 0 & A \cdot B \\ \hline -E & B \end{array}\right|$$

анықтауышын аламыз. Осыдан және (1.20)-ден 1.7 — теореманы пайдаланып дәлелдеу керегімізді табамыз:

$$|D| = |A \cdot B| \cdot |E| = |AB|, \; |D| = \left|\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline -E & B \end{array}\right| =$$

$$= |A| \cdot |B|,$$

яғни $|A \cdot B| = |A|\,|B|$. Теорема дәлелденді.

§1.10. Кері матрица

1. Кері матрицаның бар және біреу болуы.

Бізге n-ретті A мен B матрицалары берілсін.

Анықтама. Егер A матрицаның анықтауышы нөлге тең болмаса, яғни $|A| \neq 0$, онда A матрица *ерекше емес матрица* деп аталады, ал егер $|A| = 0$ болса, онда ол *ерекше матрица* деп аталады.

B матрица A матрицасының *кері матрицасы* деп аталады, егер

$$A \cdot B = B \cdot A = E$$

теңдігі орындалса, мұндағы E – n-ретті бірлік матрица.

Егер B матрица A матрицаның кері матрицасы болса, онда A матрицаның кері матрицасы A^{-1} символымен белгіленеді, яғни

$$B = A^{-1}.$$

Кез келген квадрат матрицаның кері матрицасы болмайды, ал кері матрицасы бар болуы үшін ол матрица белгілі бір шартты қанағаттандыруы керек. Енді сол шартты қарастырайық. Ол үшін ерекше емес квадратты A матрица элементтерінің алгебралық толықтауыштарынан анықталған *біріктірілген матрица* деп аталатын квадратты матрицаны қарастырайық:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

мұндағы A_{ij}, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, n}$ берілген A матрицаның a_{ij} элементтерінің алгебралық толықтауыштары.

1.9-теорема (кері матрицаның бар болуы). Кез келген квадратты A матрицаның кері A^{-1} матрицасы бар болу үшін, ол матрица ерекше емес $|A| \neq 0$ матрица болуы қажетті әрі жеткілікті және ол мына төмендегі

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A^* \tag{1.22}$$

формуламен анықталады.

Қажеттілігін дәлелдеу. Берілген A матрицасының кері матрицасы A^{-1} бар деп ұйғарып, оның ерекше емес матрица болатындығын дәлелдейік. Ұйғаруымыз бойынша A матрицаның A^{-1} кері матрицасы бар, әрі

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

теңдігі орындалады және 1.8-теорема бойынша:

$$|A \cdot A^{-1}| = |A|\,|A^{-1}| = |E| = 1,$$

$$|A^{-1} \cdot A| = |A^{-1}|\,|A| = |E| = 1$$

теңдіктері орындалады. Олай болса $|A| \neq 0$.

Жеткіліктігін дәлелдеу. Берілген квадрат A матрица ерекше емес матрица деп ұйғарып: $|A| \neq 0$, мына $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ теңдігі орындалатынын дәлелдейік. Ол үшін мына матрицаны қарастырайық:

$$B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} = \frac{A^*}{|A|},$$

мұндағы A_{ij} берілген A матрицасының элементтерінің алгебралық толықтауыштары.

Енді A мен B матрицаларының көбейтіндісін табайық:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{|A|} & \frac{A_{21}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n1}}{|A|} \\ \frac{A_{12}}{|A|} & \frac{A_{22}}{|A|} & \dots & \frac{A_{n2}}{|A|} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{A_{1n}}{|A|} & \frac{A_{2n}}{|A|} & \dots & \frac{A_{nn}}{|A|} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} = (c_{ij}),\ i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}\ ,$$

мұндағы $c_{ij} = (a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn})$.

Егер $i = j$ болса, онда 1.4-теорема бойынша

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = |A|$$

теңдігі, ал $i \neq j$ болса, онда 1.5-теорема бойынша

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = 0$$

теңдігі орындалады. Демек,

$$a_{i1} \cdot A_{j1} + a_{i2} \cdot A_{j2} + \dots + a_{in} \cdot A_{jn} = \begin{cases} |A|, \text{ егер } i = j, \\ 0, \quad \text{егер } i \neq j \end{cases}$$

немесе

$$c_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ егер } i = j, \\ 0, \text{ егер } i \neq j \end{cases}$$

Сонымен, $A \cdot B = E$ теңдігі орындалады. Осы сияқты, $B \cdot A = E$ теңдігінің дәлелдеуін оқырмандардың өзіне ұсынамыз. Демек, $B = A^{-1}$, яғни қарастырып отырған B матрицамыз A матрицасының кері матрицасы. Теорема дәлелденді.

Ерекше емес кез келген квадрат A матрицасының A^{-1} кері матрицасы тек біреу ғана болады. Шынында да, A матрицаның A^{-1} матрицасына тең емес басқа кері

матрицасы бар деп кері жориық және ол C болсын (C — квадрат матрица), яғни

$$A \cdot C = C \cdot A = E \text{ және } A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$$

теңдіктері орындалады. Онда

$$C \cdot A \cdot A^{-1} = C \cdot (A \cdot A^{-1}) = C \cdot E = C,$$

$$C \cdot A \cdot A^{-1} = (C \cdot A) \cdot A^{-1} = E \cdot A^{-1} = A^{-1}.$$

Осыдан, $C = A^{-1}$ теңдігі орындалады. Демек, A матрицасының кері матрицасы тек біреу ғана және ол (1.22) формуладан анықталады.

1.10-теорема. Ерекше емес кез келген квадратты матрицалар үшін мына төмендегі формулалар орындалады:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1},\ (A')^{-1} = (A^{-1})'$$

$$(A^{-1})^{-1} = A,\ |A^{-1}| = |A|^{-1}.$$

Дәлелдеуі. Алдымен бірінші формуланың дәлелдеуін келтірейік. Ол үшін матрицалардың көбейтінділеріне орындалатын қасиеттерді еске алайық, сонда

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = E.$$

Осыдан $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$ болады.

Екінші формуланы дәлелдейік. Ол үшін 1.8-параграфтағы $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$ формуланы қолданайық:

$$A' (A^{-1})' = (A^{-1} \cdot A)' = E' = \text{E}.$$

Осыдан $(A^{-1})' = (A')^{-1}$ болады.

Теореманың қалған тұжырымдарын жаттығу ретінде оқырмандарға ұсынамыз. Теорема дәлелденді.

2. Кері матрицаны элементар түрлендірулер әдісін пайдаланып табу. *Элементар түрлендірулер әдісі* деп мына түрлендірулерді айтамыз:

1) Екі тік (жатық) жолдарының орын алмастыру;
2) Кез келген тік (жатық) жолының элементтерін $\alpha \neq 0$ санына көбейту;
3) Кез келген тік (жатық) жолының элементтерін α санына көбейтіп келесі бір тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне қосу.

Кез келген ерекше емес квадратты A матрицаның тек қана тік (жатық) жолдарына элементар түрлендірулер әдісін пайдаланып оның кері матрицасын табуға болады. Ол үшін A мен E матрицалары қатар жазып, олардың арасын тік бір сызықпен бөлеміз және элементар түрлендіруді екі матрицаға бірден жасаған тиімді. Элементар түрлендіру кезінде арифметикалық амалдардан қате жібермеу үшін әр жатық (тік) жолдың элементтерін қосып, ол қосындыны ең соңғы тік (жатық) жолдың жанына жазамыз және оны параллель екі тік сызықпен бөлеміз. Бұл тік жол *тексеру тік жолы* деп аталады. Элементар түрлендірулерді тексеру тік жолына да жасау қажет. Бұл айтылған тұжырымды қолдану үшін мына төмендегі блокты матрицаларды қарастырайық:

$$\mathrm{I} = (A|E||b),\quad \mathrm{II} = \begin{pmatrix} A \\ \hline E \\ \hline \overline{b} \end{pmatrix},\quad |A| \neq 0,$$

мұндағы $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)'$, $b_k = 1 + a_{k1} + a_{k2} + \ldots + a_{kn}$, $k = \overline{1, n}$. Енді бірінші матрицаның жатық жолдарына элементар түрлендіру әдісін қолданып, төмендегі блокты матрицаны жазамыз:

$$(A|E||b|) \sim (E||A^{-1}||C),$$

мұндағы $C = (c_1, c_2, \ldots, c_n)'$,
$c_k = 1 + (A_{1k} + A_{2k} + \ldots + A_{nk})/|A|$, $k = \overline{1, n}$.

Осы сияқты, екінші матрицаның тік жолдарына элементар түрлендіру әдісін қолдансақ, онда мынадай блокты матрица шығады:

$$\begin{pmatrix} A \\ \hline E \\ \hline \overline{b'} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} E \\ \hline A^{-1} \\ \hline \overline{c'} \end{pmatrix}.$$

1-мысал. Берілген матрицаның кері матрицасын және $A^{-1}A$ мен AA^{-1} матрицаларын анықтаңдар:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Алдымен берілген матрицаның кері матрицасының бар болуын зерттейік (1.9-теорема). Ол үшін матрицаның анықтауышын есептейміз:

$$|A| = {\scriptstyle (+2)\times}\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)A_{32} = (-1)\cdot(-1)^{3+2}M_{32} = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0.$$

Демек, берілген матрицаның кері матрицасы бар және оны (1.22) формуладан анықтаймыз. Енді матрица элементтерінің алгебралық толықтауыштарын есептейік:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2,\quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -5,\quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

Сонда, (1.22) формуладан іздестіріп отырған кері матрицаны және $A^{-1}\cdot A$ мен $A\cdot A^{-1}$ матрицаларын табамыз

$$A^{-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -5 \\ -1 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} & \frac{4}{7} \\ \frac{1}{7} & \frac{2}{7} & -\frac{5}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{5}{7} & -\frac{2}{7} \end{pmatrix},$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}2&-3&4\\1&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},$$

$$A\cdot A^{-1}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}3&2&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3&-3&4\\1&2&-5\\-1&5&-2\end{pmatrix}=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}7&0&0\\0&7&0\\0&0&7\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

2-мысал. Бірінші мысалдағы матрицаның кері матрицасын элементар түрлендірулер арқылы анықтаңдар.

Берілген матрицаның кері матрицасын табу үшін осы тақырыпта айтылғандай A мен E матрицаларының арасын тік сызықпен бөліп жазып алып, тексеру тік жолын тұрғызайық:

$$(A|E||b)=\left(\underbrace{\begin{array}{ccc}3&2&1\\1&0&2\\1&-1&1\end{array}}_{A}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}}_{E}\right|\left|\begin{array}{c}7\\4\\2\end{array}\right.\right),$$

мұндағы 7 бірінші, 4 екінші, ал 2 үшінші жатық жолдарының элементтерінің қосындысы.

Элементар түрлендірудегі мақсат A матрицаны элементар түрлендірулер көмегімен оны бірлік матрицаға түрлендіру

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}3&2&1&1&0&0&7\\1&0&2&0&1&0&4\\1&-1&1&0&0&1&2\end{array}\right)\Rightarrow \;-3\;\;-1\;\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1&-1&1&0&0&1&2\\1&0&2&0&1&0&4\\3&2&1&1&0&0&7\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1\;\;-5\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1&-1&1&0&0&1&2\\0&1&1&0&1&-1&2\\0&5&-2&1&0&-3&1\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2/7\;\;1/7\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1&0&2&0&1&0&4\\0&1&1&0&1&-1&2\\0&0&-7&1&-5&2&-9\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc|c}1&0&0&\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}&\frac{10}{7}\\0&1&0&\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{5}{7}&\frac{5}{7}\\0&0&-7&1&-5&2&-9\end{array}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(\underbrace{\begin{array}{ccc}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{array}}_{E}\left|\underbrace{\begin{array}{ccc}\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{5}{7}\\-\frac{1}{7}&+\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\end{array}}_{A^{-1}}\right|\left|\begin{array}{c}\frac{10}{7}\\\frac{5}{7}\\+\frac{9}{7}\end{array}\right.\right)$$

Сонымен

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{2}{7}&-\frac{3}{7}&\frac{4}{7}\\\frac{1}{7}&\frac{2}{7}&-\frac{5}{7}\\-\frac{1}{7}&+\frac{5}{7}&-\frac{2}{7}\end{pmatrix}.$$

3-мысал. Негізгі диагоналдың төменгі (жоғарғы) элементтері нөлге тең үшбұрышты ерекше емес матрицаның кері матрицасы да негізгі диагоналының төменгі (жоғарғы) элементтері нөлге тең үшбұрышты матрица болатынын дәлелдеңдер.

Ол үшін үшінші ретті үшбұрышты матрицаны қарастырайық:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\0&a_{22}&a_{23}\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}.$$

Іздестіріп отырған A матрицасының кері матрицасын мына түрде іздестірейік

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\alpha_{13}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\alpha_{23}\\\alpha_{31}&\alpha_{32}&\alpha_{33}\end{pmatrix}$$

және ол A матрицасының кері матрицасы болсын деп ұйғарайық. Онда мына теңдік орындалады:

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ 0 & a_{22} & a_{23}\\ 0 & 0 & a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Осыдан

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11}a_{11} & \alpha_{11}a_{12}+\alpha_{12}a_{22} & \alpha_{11}a_{13}+\alpha_{12}a_{23}+\alpha_{13}a_{33}\\ \alpha_{21}a_{11} & \alpha_{21}a_{12}+\alpha_{22}a_{22} & \alpha_{21}a_{13}+\alpha_{22}a_{23}+\alpha_{23}a_{33}\\ \alpha_{31}a_{11} & \alpha_{31}a_{12}+\alpha_{32}a_{22} & \alpha_{31}a_{13}+\alpha_{32}a_{23}+\alpha_{33}a_{33}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Соңғы теңдіктен матрицалардың теңдігінің анықтамасын пайдаланып мына теңдіктерді аламыз:

$$\begin{array}{lll}\alpha_{11}a_{11}=1, & \alpha_{11}a_{12}+\alpha_{12}a_{21}=0, & \alpha_{11}a_{13}+\alpha_{12}a_{23}+\alpha_{13}a_{33}=0,\\ \alpha_{21}a_{11}=0, & \alpha_{21}a_{12}+\alpha_{22}a_{22}=1, & \alpha_{21}a_{13}+\alpha_{22}a_{23}+\alpha_{23}a_{33}=0,\\ \alpha_{31}a_{11}=0, & \alpha_{31}a_{12}+\alpha_{32}a_{22}=0, & \alpha_{31}a_{13}+\alpha_{32}a_{23}+\alpha_{33}a_{33}=1.\end{array}$$

Осы теңдіктерден берілген A матрицаның кері матрицасының элементтерін анықтаймыз:

$$\alpha_{11}=\frac{1}{a_{11}},\ \alpha_{21}=0,\ \alpha_{31}=0, \qquad \alpha_{12}=-\frac{a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22}},$$

$$\alpha_{22}=\frac{1}{a_{22}},\ \alpha_{32}=0,\ \alpha_{13}=\frac{1}{a_{33}\cdot[a_{13}(a_{11}-a_{12}\cdot a_{23})\,a_{11}\cdot a_{22}]},$$

$$\alpha_{23}=-\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}}, \qquad \alpha_{33}=\frac{1}{a_{33}}.$$

Сонда

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{a_{11}} & \frac{a_{12}}{a_{11}\cdot a_{22}} & \frac{[a_{13}\cdot(a_{11}-a_{12}a_{23}]\,a_{11}\cdot a_{22})}{(-a_{33})}\\ 0 & -\frac{1}{a_{22}} & -\frac{a_{23}}{a_{22}a_{33}}\\ 0 & 0 & \frac{1}{a_{13}}\end{pmatrix}$$

Сонымен, негізгі диагоналдың төменгі (жоғарғы) элементтері нөлге тең үшбұрышты матрицаның кері матрицасы да негізгі диагоналының төменгі (жоғарғы) элементтері нөлге тең үшбұрышты матрица болады.

§ 1.11. Матрицаның жатық немесе тік жолдарының сызықты тәуелділігі

Берілген A матрицаның жатық жолдарын $a_1, a_2, \dots, a_m$ әріптерімен белгілейік, яғни:

$$a_1=(a_{11}; a_{12}; \dots; a_{1m}),\ a_2=(a_{21}; a_{22}; \dots; a_{2m}),$$

$$a_m=(a_{m1}; a_{m2}; \dots; a_{mm})$$

Анықтама. Егер $c_2, c_3, \dots, c_m$ — сандары табылып, мына теңдік

$$a_1=c_2\cdot a_2+c_3\cdot a_3+\dots+c_m\cdot a_m \qquad (1.23)$$

немесе

$$a_k=c_1\cdot a_1+\dots+c_{k-1}\cdot a_{k-1}+c_{k+1}\cdot a_{k+1}+\dots+c_m\cdot a_m$$

орындалса, онда матрицаның a_1 жатық жолы оның қалған $a_2, a_3, \dots, a_m$ жатық жолдарының *сызықты комбинациясы* деп аталады.

Негізінде сызықты кеңістік теориясында ерекше орын алатын элементтердің сызықты тәуелділігінің анықтамасын берейік.

Анықтама. Егер барлығы бірдей нөлге тең емес $c_1, c_2, \dots, c_m$ сандары табылып, төмендегі

$$c_1\cdot a_1+c_2\cdot a_2+\dots+c_m\cdot a_m=0 \qquad (1.24)$$

тепе-теңдігі орындалса (мұндағы 0 — элементтері нөлге тең жатық жол: $0=(0, 0, \dots, 0)$, онда матрицаның $a_1, a_2, \dots, a_m$ жатық жолдары *сызықты тәуелді* деп аталады.

Егер (1.24) теңдігі тек қана $c_i=0,\ i=\overline{1, n}$ сандары үшін орындалса, онда $a_1, a_2, \dots, a_n$ жатық жолдары *сызықты тәуелсіз* деп аталады.

Мысалы.

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 2 & 1 & 4\\ 4 & 5 & 3 & -2 & 5\\ 5 & -4 & -1 & -9 & -7\end{pmatrix}$$

матрицасының жатық жолдарын $a_1=\{1;\ 3;\ -1;\ 2;\ 0\}$, $a_2=\{-1;\ 1;\ 2;\ 1;\ 4\}$, $a_3=\{4;\ 5;\ 3;\ -2;\ 5\}$,

$a_4 = \{5;\ -4;\ -1;\ -9;\ -7\}$ деп белгілейік. Сонда, берілген матрицаның жатық жолдары үшін

$$a_3 = 2a_1 + 3a_2 + a_4$$

теңдігі орындалады, яғни матрицаның a_3 жатық жолы оның қалған жатық жодарының комбинациясы. Осыдан

$$2a_1 + 3a_2 - a_3 + a_4 = 0,$$

мұндағы теңдіктің оң жағындағы нөл элементтері нөлге тең жатық жолды анықтайды. Демек, матрицаның жатық жодары сызықты тәуелді. Ал кез келген екі жатық жолы сызықты тәуелсіз болады. Шынында да, мысалы, a мен b жатық жолдары сызықты тәуелді делік. Демек,

$$\alpha_1 a + \alpha_2 b = 0$$

теңдігі орындалады, мұндағы α_1 мен α_2 сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең емес. Анықтық үшін $\alpha \neq 0$ болсын. Онда

$$a = -\alpha_2 b/\alpha_1 = \alpha b,$$

мұндағы $\alpha = -\alpha_2/\alpha_1$. Осыдан, $a = \{1;\ 3;\ -1;\ 2;\ 0\}$ мен $b = \{-1;\ 1;\ 2;\ 4\}$ жатық жолдары пропорционал болған болар еді, бірақ олар пропорционал емес. Олай болса, a мен b сызықты тәуелсіз.

1.11-теорема (сызықты тәуелділік). Матрицаның $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — жатық жолдары сызықты тәуелді болу үшін жатық жолдарының бірі қалған жолдарының сызықты комбинациясы болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Матрицаның $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — жатық жолдары сызықты тәуелді деп ұйғарып, олардың бірі қалған жолдарының сызықты комбинациясы болатынын дәлелдейік. Ұйғаруымыз бойынша (1.24) тепе-теңдігі орындалады және $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — сандарының кем дегенде біреуі нөлге тең емес. Анықтық үшін $c_1 \neq 0$ болсын, онда

$$a_1 = -c_2 \cdot a_2/c_1 - c_3 \cdot a_3/c_1 - \ldots - c_m \cdot a_m/c_1 \qquad (1.25)$$

теңдігін аламыз. Ал бұл теңдік матрицаның a_1 жатық жолы басқа жатық жолдарының сызықты комбинациясы болатынын көрсетеді.

Жеткіліктігі. Матрицаның a_1 жатық жолы қалған жатық жолдарының сызықты комбинациясы деп ұйғарып, $a_1, a_2, \ldots, a_m$ жатық жолдары сызықты тәуелді болатынын

дәлелдейік. Ұйғаруымыз бойынша (1.25) теңдігі орындалады, осы теңдіктен

$$c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 + \ldots + c_m \cdot a_m = 0, \qquad (1.26)$$

мұндағы $0 = (0, 0, \ldots, 0)$ және $c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m$ — коэффициенттерінің бірі нөлге тең емес. Олай болса, (1.26) теңдігі $a_1, a_2, \ldots, a_m$ жатық жолдарының сызықты тәуелді болатынын көрсетеді. Теорема дәлелденді.

Ескерту. Осы тақырыпта матрицаның жатық жолдарына қарастырылған анықтамалар мен тұжырым оның тік жолдарына да орындалады.

§1.12 Матрицаның рангісі

Біз $m \times n$-ретті A матрицасын қарастырайық:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Берілген $m \times n$-ретті матрицадан k-ретті $C_m^k \cdot C_n^k$ — минор құруға болады, мұндағы $k \leq n, k \leq m$ ($C_n^m = n!/m!(n-m!)$). Мысалы, 4×3-ретті

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

матрицадан бірінші ретті ($k = 1$) $C_4^1 \cdot C_3^1 = 12$ — минор құруға болады. Ол минорлар берілген матрицаның элементтері. Ал екінші ретті ($k = 2$) $C_4^2 \cdot C_3^2 = 18$ — минор құруға болады:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & -4 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Үшінші ретті ($k = 3$) $C_4^3 \cdot C_3^3 = 4$ — минор құруға болады:

$$\begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 4 & 4 & 6 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & -4 \end{vmatrix}.$$

Анықтама. A матрицаның нөлге тең емес минорының ең жоғарғы реті *оның рангісі* деп аталады және ол rang A деп белгіленеді. Жоғарғы мысалда, матрицаның рангісі 3-ке тең, себебі үшінші ретті минорлардың біреуінің мәні нөлге тең емес, сондықтан rang $A = 3$. Сонымен, анықтамадан мынадай қорытындыға келеміз: егер матрицаның рангісі r-ге тең болса, онда барлық r-ретті минорлардың кем дегенде біреуінің мәні нөлге тең емес, ал r-ден жоғарғы ретті минорлардың барлығының мәні нөлге тең. Берілген матрицаның рангісін табу үшін жоғарыдағыдай барлық минорларды есептемей табу әдістеріне тоқталайық. Матрицаның рангісін табу үшін элементар түрлендірулер, көмкерілген минорлар әдістерін қолданамыз.

I. Элементар түрлендірулер деп мына түрлендірулерді айтамыз:

1) Транспонирлеу-матрицаның барлық тік жолдарын сәйкес жатық жолдарымен орын ауыстыру;

2) Екі тік (жатық) жолын орын ауыстыру;

3) Кез келген тік (жатық) элементтерін $c \neq 0$ санына көбейту;

4) Кез келген тік (жатық) жолының элементтерін $c \neq 0$ санына көбейтіп келесі кез келген тік (жатық) жолының сәйкес элементтеріне қосу.

1.12.-теорема. Элементар түрлендірулер матрицаның рангісін өзгертпейді.

Д ә л е л д е у і. Теормеманы дәлелдеу үшін жоғарыдағы әр түрлендіруді жеке-жеке қарастырайық.

1) 1.6-теорема бойынша транспонирленген A' матрицаның әр миноры берілген матрицаның минорларының біріне тең және керісінше, яғни $rang\, A' = rang\, A$.

2) Берілген A-матрицаның екі тік (жатық) жолын орын алмастырып, жаңа B матрица аламыз. B матрицаның әр миноры A матрицаның минорларының біріне немесе оның минорынан айырмашылығы тек таңбасында, яғни $rang\, A = rang\, B$.

3) A матрицаның тік (жатық) жолының элементтерін c-санына көбейткенде жаңа B матрица аламыз. B матрицаның кейбір минорлары өзгермейді, ал қалғандары c — санына көбейтіледі. Мұндағы $c \neq 0$ болғандықтан,

нөлге тең емес минордың ең жоғарғы ретіде өзгермейді. Олай болса, $rang\, A = rang\, B$.

4) Берілген A матрицаның k тік жолын c санына көбейтіп, оны i тік жолының сәйкес элементтеріне қосайық. Сонда, біз A матрицадан өзге B матрица аламыз:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1i} + ca_{1k} & \dots & a_{1k} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2i} + ca_{2k} & \dots & a_{2k} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mi} + ca_{mk} & \dots & a_{mk} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

және $rang\, A = p$ болсын. Алдымен B матрицаның рангісі p-ден үлкен болмайтынын дәлелдейік. Ол үшін реті p-дан үлкен B матрицасының барлық әр минорлары нөлге тең болатынын дәлелдесек жеткілікті. Мысалы, реті p-дан үлкен B матрицасының миноры D болсын. Егер D минорында B матрицасының i-тік жолы болмаса, онда ол A матрицасының i-тік жолы жоқ минорына тең, яғни D миноры нөлге тең. Себебі, біріншіден A матрицасының рангісі p-ге тең, екіншіден D миноры нөлге тең емес p-ретті минордан құралған.

Егер D минорында B матрицасының i мен k-тік жолдары бар болса, онда анықтауыштың 4-қасиеті бойынша ол A матрицасының i-мен k-тік жолдары бар минорға тең, яғни D миноры нөлге тең.

Егер D минорында B матрицасының i-тік жолы бар болса, ал k-тік жолы болмаса, онда анықтауыштың 6-қасиеті бойынша D минорын екі анықтауыштың қосындысы түрінде қарастыруға болады: $D = D_1 + D_2$, мұндағы D_1 мен D_2 — минорларының бірі осылардың біріне сәйкес келетін A матрицадағы минорға тең, ал екіншісі A матрицасының кейбір минорларынан айырмашылығы $\pm c$ көбейткішінде. Мысалы,

$$D = \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} + ca_{35} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} + ca_{55} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} + ca_{65} & a_{64} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{51} & a_{52} & a_{54} \\ a_{61} & a_{62} & a_{64} \end{vmatrix} + c \cdot \begin{vmatrix} a_{31} & a_{35} & a_{34} \\ a_{51} & a_{55} & a_{54} \\ a_{61} & a_{65} & a_{64} \end{vmatrix} = D_1 + D_2 .$$

Сондықтан, D_1 мен D_2 — анықтауыштары нөлге тең, олай болса $D = 0$. Демек, B матрицасының p-дан үлкен ретті минорлары нөлге тең. Сондықтан $rang\, B \le rang\, A$. B матрицасына 4) — элементар түрлендіру арқылы A матрицасын аламыз, яғни B матрицасының k-тік жолын c-ға көбейтіп, оны i-тік жолының сәйкес элементтеріне қоссақ A матрицасы алынады. Бұл жағдайда, жоғарыдағы дәлелдеу бойынша $rang\, A \le rang\, B$. Сонымен, $rang\, A = rang\, B$. Теорема дәлелденді.

Е с к е р т у. Егер элементар түрлендірулер нәтижесінде қарастырып отырған матрицаның кейбір тік (жатық) жолының барлық элементтері нөл болса, онда ол тік (жатық) жолды алып тастау керек және нөл тік (жатық) жолды алып тасталынған матрицаның рангісі өзгермейді.

Анықтама. Егер біреуі екіншісінен элементар түрлендіру арқылы алынса, екі матрица *эквивалентті* деп аталады, ол матрицалардың арасына $\sim$ таңбасын қолданамыз, яғни $A \sim B$.

Жалпы жағдайда, эквивалентті матрицалар тең емес, олардың рангісі ғана тең.

Элементар түрлендірулер әдісімен матрицаның рангісін табу үшін берілген матрицаны үшбұрышты матрицаға келтіріп анықтаған тиімді.

2. Көмкерген* минорлар әдісі.

Матрица рангісінің анықтамасын мына түрде берейік (олар эквивалентті анықтамалар).

Анықтама. Матрицаның сызықты тәуелсіз жатық (тік) жолдарының ең үлкен саны *матрицаның рангісі* деп аталады.

1.13-теорема (матрицаның рангісі). Егер кез келген A матрицасының r-ретті миноры нөлге тең болмаса, және осы минорды көмкерген барлық $(r+1)$-ретті минорлар нөлге тең болса, онда матрицаның рангісі r-ге тең, яғни $rang\, A = r$.

* K-ретті минорды көмкерген $(K + 1)$ — ретті минор деген сөзді мына мағынада түсіну керек: k-ретті минор $(k + 1)$-ретті минордың ішінде орналасқан.

Д ә л е л д е у і. Анықтық үшін, нөлге тең емес r-ретті минор A матрицасының жоғары сол жағында орналассын және ол минорды Δ — әрпімен белгілейік:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1,r+1} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{r,r+1} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mr} & a_{m,r+1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Теореманы екі қадамға бөліп дәлеледейік.

1 - қ а д а м. Берілген матрицаның кез келген i-жатық, j-тік жолдарын алайық $(i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n})$ және Δ анықтауышты көмкерген $r+1$-ретті анықтауышты қарастырайық:

$$\Delta_{ij} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{rr} & a_{rj} \\ a_{i1} & \dots & a_{ir} & a_{ij} \end{pmatrix},$$

Осылайша алынған (көмкерген) кез келген Δ_{ij} — анықтауыштарының мәні нөлге тең болатынын дәлелдейік. Шынында да:

1) егер $i \le r$ (яғни $i = \overline{1, r}$) болса, онда Δ_{ij} — анықтауышының соңғы жатық жолы оның қалған жатық жолдарының біреуімен бірдей (сәйкес элементтері тең). Сондықтан, анықтауыштың 5-қасиеті бойынша $\Delta_{ij} = 0$.
2) егер $j \le r$ (яғни $j = \overline{1, r}$) болса, онда Δ_{ij} — анықтаушының соңғы тік жолы оның қалған тік жолдарының біреуімен бірдей. Сондықтан, 5-қасиет бойынша бұл жағдайда да $\Delta_{ij} = 0$,
3) егер $i > r, j > r$ болса, онда теореманың шарты бойынша $\Delta \neq 0$. Сондықтан, $\Delta_{ij} = 0$.

2 - қ а д а м. Δ_{ij} — анықтауышын соңғы жатық жолының элементтері бойынша жіктейік:

$$0 = \Delta_{ij} = a_{i1}\cdot A_{i1} + a_{i2}\cdot A_{i2} + \dots + a_{ir}\cdot A_{ir} + (-1)^{2(1+r)}\, a_{ij}\cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1r}\\ \dots & \dots & \dots\\ a_{r1} & \dots & a_{rr}\end{vmatrix},$$

мұндағы

$$A_{ij} = (-1)^{(1+r)+j} \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \dots & a_{1r} & a_{1j} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & \dots & a_{r,j-1} & a_{r,j+1} & \dots & a_{rr} & a_{rj}\end{vmatrix} \equiv \overline{A}_j$$

алгебралық толықтауыш. Δ — анықтауыш нөлге тең емес, сондықтан соңғы теңдіктен

$$a_{ij} = -a_{i1}\cdot \overline{A}_1/\Delta - a_{i2}\cdot \overline{A}_2/\Delta - \dots - a_{ir}\cdot \overline{A}/\Delta,$$

$$i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n}.$$

Осыдан, A матрицаның j-тік жолын мына түрде жазуға болады:

$$\begin{pmatrix} a_{1j}\\ a_{2j}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{mj}\end{pmatrix} = \frac{-\overline{A}_1}{\Delta}\cdot \begin{pmatrix} a_{11}\\ a_{21}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{m1}\end{pmatrix} - \dots - \frac{\overline{A}_r}{\Delta}\cdot \begin{pmatrix} a_{1r}\\ a_{2r}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{mr}\end{pmatrix}.$$

Соңғы теңдіктен, A матрицаның j-тік (матрицаның кез келген тік жолы, $j = r+1, r+2, \dots, n$) жолы оның алғашқы r тік жолдары арқылы өрнектелінеді, мұндағы A_{ij}/Δ коэффициенттер, $i = \overline{1,r}$.

Сондықтан, A матрицасының тік жолдары сызықты тәуелсіз r-тік жолдардан тұрады, олай болса $rang\,A = r$. Теорема дәлелденді.

Сонымен, 1.13-теоремадан мындай қорытындағы келеміз. Берілген A матрицаның рангісін көмкерген минорлар әдісімен табу үшін алдымен нөлге тең емес бірінші ретті кез келген минорды аламыз. Содан соң осы минорды көмкерген екінші ретті минорларды ғана есептейміз. Егер мұндай екінші ретті минорлардың бірі нөлге тең болмаса, онда осы минорды көмкерген үшінші ретті минорларды ғана есептейміз. Егер мұндай үшінші ретті минорлардың бірі нөлге тең болмаса, онда осы минорды көмкерген келесі минорды есептеуге көшеміз. Осылайша нөлге тең

емес көмкерген минорларды есептей келе нөлге тең емес r-ретті минорды анықтаймыз. Содан соң r-ретті минорды көмкерген $r+1$-ретті минорларды ғана есептейміз. Егер r-ретті минорды көмкерген $r+1$-ретті минорлардың барлығы нөлге тең болса, онда берілген матрицаның рангісі r-ге тең ($r+1$-ден жоғары ретті минорларды есептеудің қажеті жоқ).

М ы с а л. Матрицаның рангісін элементар түрлендірулер және көмкерген минорлар әдістерімен анықтаңдар:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & \boxed{2} & 1 & 3\\ 1 & 3 & 1 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 0 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix}.$$

Элементар түрлендіру әдісі. Берілген матрицаның бірінші мен екінші жатық жолдарының сәйкес элементтерін орын асмастырайық, ал қалған түрлендірулер стрелкамен көрсетілген:

$$A \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2\\ 6 & 8 & 2 & 1 & 3\\ 4 & 2 & 0 & 3 & -1\\ -3 & 1 & 1 & -4 & 3\end{pmatrix} \begin{matrix} -6 & -4 & +3 \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{matrix} 1 & -1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -10 & -4 & 7 & -9\\ 0 & -10 & -4 & 7 & -9\\ 0 & 10 & 4 & -7 & 9\end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & -1 & 2\\ 0 & -10 & -4 & 7 & -9\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix} = B.$$

Сонымен, $rang\,B = 2$, олай болса, 1.13-теорема бойынша $rang\,A = 2$ болады.

Көмкерілген минорлар әдісі. Алдымен нөлге тең емес кез келген бірінші ретті минор аламыз. Ондай 19 минор бар (нөлге тең емес элементтер саны). Біз бірінші ретті минор ретінде 2-ні алайық. Осы минорды көмкерген бірнеше минор бар. Нөлге тең емес

$$\begin{vmatrix} 8 & 2\\ 3 & 1\end{vmatrix} = 2 \neq 0$$

екінші ретті минорды қарастырайық. Енді осы минорды көмкерген үшінші ретті минорларды ғана есептейік:

$$\begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 6 & 8 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0.$$

Демек, нөлге тең емес екінші ретті минорды көмкерген үшінші ретті барлық минорлардың мәні нөлге тең. Олай болса, $rang\, A = 2$ болады.

§1.13. Базистік минор

Біз $m \times n$-ретті A матрицаны қарастырайық.

Анықтама. A матрицаның *k-ретті миноры* деп элементтері матрицаның кез келген k тік және k жатық жолдарының қиылысуында орналасқан k-ретті анықтауышты айтамыз, мұндағы $k < m$, $k < n$.

Анықтама. Егер $r+1$-ретті минорлардың бәрі нөлге тең болса, A матрицаның нөлге тең емес r-ретті миноры *базистік минор* деп аталады.

Берілген A матрицасының нөлге тең емес r-ретті анықтауышы бірнешеу болуы мүмкін. Осы анықтамадағы r-саны берілген матрицаның *рангісі* деп аталады, яғни $rang\, A = r$.

Анықтама. Базистік минор орналасқан тік және жатық жолдар *базистік тік* және *базистік жатық жолдар* деп аталады.

1.14-теорема (базистік минор). A матрицаның базистік жатық (тік) жолдары сызықты тәуелсіз және оның кез келген жатық (тік) жолы базистік жатық (тік) жолдарының сызықты комбинациясы болады.

Д ә л е л д е у і . Теореманы матрицаның жатық жолы үшін дәлелдейік. Берілген

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & \dots & a_{rn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mr} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

матрицасының рангісі r-ге тең болсын және оның базистік минорын M_r — әрпімен белгілейік:

$$M_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Осы матрицаның базистік жатық жолдары сызықты тәуелді болсан деп ұйғарайық, онда 1.11-теорема бойынша оның жатық жолдарының бірі, мысалы, a_r, қалған базистік жатық жолдарының сызықты комбинациясы болады, яғни

$$a_r = \alpha_1 \cdot a_1 + \alpha_2 \cdot a_2 + \dots + \alpha_{r-1} \cdot a_{r-1}$$

теңдігі орындалады.

A матрицаның бірінші жатық жолын α_1-ге, екінші жатық жолын α_2-ге т. с. с., $r-1$ жатық жолын α_{r-1}-ге көбейтіп, осыларды r жатық жолының сәйкес элементтерінен алайық. Онда матрицаның r жатық жолы тек қана нөлдік элементтерден анықталады, яғни M_r минорының мәні нөлге тең (§1.3,3-қасиет).

Ал бұл тұжырым 1.13-теорема бойынша M_r минорының мәні нөлге тең болмауы керек еді. Бірақ біздің ұйғарымымыз бойынша M_r минорының мәні нөлге тең болады. Сонымен, бұл қайшылық теореманың бірінші тұжырымын дәлелдейді.

Теореманың екінші тұжырымын дәлелдейік, яғни матрицаның кез келген жатық жолы оның базистік жатық жолдарының сызықты комбинациясы болатынын, ол үшін $r+1$-ретті

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rk} \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} & a_{ik} \end{vmatrix}, \quad i = \overline{1, m}, \ k = \overline{1, n}$$

анықтауыштың нөлге тең болатынын дәлелдейік.

Егер $i \le r, k \le r$ болса, онда анықтауыштың мәні нөлге тең, себебі бұл жағдайда анықтауыштың не екі жатық не екі тік жолдарының сәйкес элементтері тең (§1.3,3-қасиет).

Егер $i > r, k > r$ болса, онда Δ анықтауышы A матрицасының $r+1$-ретті миноры болады, ал мұндай минорлар базистік минордың анықтамасы бойынша нөлге тең. Сонымен, Δ анықтауыштың мәні барлық $i = \overline{1, m}$ мен $k = \overline{1, n}$ үшін нөлге тең.

Δ анықтауышын $r+1$ тік жолы бойынша жіктейік (теорема 1.4):

$$\Delta = a_{1k} \cdot A_{1k} + a_{2k} \cdot A_{2k} + \dots + a_{rk} \cdot A_{rk} + a_{ik} \cdot A_{i,r+1} = 0, \tag{1.27}$$

мұндағы $A_{1k}, A_{2k}, \dots, A_{rk}, A_{i,r+1}$ — алгебралық толықтауыштар i индексіне тәуелді, ал олар k индексіне тәуелсіз, себебі Δ анықтауышын $r+1$ тік жолы бойынша жіктегенде ол тік жол сызылады. Сондықтан, Δ анықтауышының $r+1$ тік жолы элементтерінің алгебралық толықтауыштарын $A_1, A_2, \dots, A_r, A_{r+1}$ әріптерімен белгілейік. Сонда (1.27) теңдігі мына түрге түрленеді

$$\Delta = a_{1k} \cdot A_1 + a_{2k} \cdot A_2 + \dots + a_{rk} \cdot A_r + a_{ik} \cdot A_{r+1} = 0, \tag{1.28}$$

мұндағы A_{r+1} алгебралық толықтауыш M_r базистік минорға тең және $M_r \neq 0$. Олай болса, (1.28) теңдігін M_r-ге бөлейік:

$$\frac{A_1 \cdot a_{rk}}{M_r} + \frac{A_2 \cdot a_{k2}}{M_r} + \dots + \frac{A_1 \cdot a_{rk}}{M_r} + a_{ik} = 0$$

немесе

$$a_{ik} = \alpha_1 \cdot a_{1k} + \alpha_2 \cdot a_{2k} + \dots + \alpha_r \cdot a_{rk}, \tag{1.29}$$

мұндағы

$$\alpha_j = -\frac{A_j}{M_r}, \ j = \overline{1, r}.$$

$k = 1, 2, \dots n$ мәндерін (1.29) формулаға қойып, мына теңдіктерді аламыз:

$$\begin{aligned} a_{i1} &= \alpha_1 \cdot a_{11} + \alpha_2 \cdot a_{21} + \dots + \alpha_r \cdot a_{r1}, \\ a_{i2} &= \alpha_1 \cdot a_{12} + \alpha_2 \cdot a_{22} + \dots + \alpha_r \cdot a_{r2}, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{in} &= \alpha_1 \cdot a_{1n} + \alpha_2 \cdot a_{2n} + \dots + \alpha_r \cdot a_{rn}. \end{aligned}$$

Бұл теңдіктер, матрицаның i жатық жолы оның r базистік жатық жолдарының сызықты комбинацисы болатынын көрсетеді. Теорема толық дәлелденді.

Осы теоремадан мынандай салдар аламыз.

Салдар. Кез келген n ретті анықтауыштың мәні нөлге тең болу үшін анықтауыштың жатық (тік) жолдары сызықты тәуелді болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. Салдарды анықтауыштың жатық жолдары үшін дәлелдейік. Анықтауыштың мәні нөлге тең деп ұйғарып, оның жатық жолдарының сызықты тәуелділігін дәлелдеік. Егер n-ретті анықтауыштың мәні нөлге тең болса, онда ол анықтауыштың матрицасының базистік минорының реті n-нен кіші. Онда кем дегенде оның бір жатық жолы базис бола алмайды. Осы сызықты комбинацияға қалған жатық жолдарының алдына нөл қосып жазамыз. Сонда бір жатық жол қалған жатық жолдардың сызықты комбинациясы болады. Сондықтан 1.11 теорема бойынша анықтауыштың жатық жолдары сызықты тәуелді.

Жеткіліктігі. Δ анықтауыштың жатық жолдары сызықты тәуелді деп ұйғарып, оның мәнінің нөлге тең болатынын дәлелдейік. Егер анықтауыштың жатық жолдары сызықты тәуелді болса, онда 1.11-теорема бойынша оның бір жатық жолы қалған жатық жолдардың сызықты комбинациясы болады. Анықтауыштың мәнін өзгертпей, осы жатық жолдан сызықты комбинацияны азайтсақ, онда барлық элементтері нөлге тең жатық жол аламыз. Демек, анықтауыштың мәні нөлге тең. Салдар дәлелденді.

1.15-теорема. Квадратты матрицаның жатық (тік) жолдары сызықты тәуелсіз болу үшін матрицаның анықтауышы нөлге тең болмауы қажетті және жеткілікті.

§1.14. Матрица көбейтінділерінің рангісі

Мына матрицаларды қарастырайық:

$$A = (a_{ij}), i = \overline{1, m}, \ j = \overline{1, n}, \ B = (b_{ij}), i = \overline{1, n}, \ j = \overline{1, k},$$

мұндағы A матрица m жатық n тік жолдардан, ал B матрица n жатық k тік жолдардан анықталған. Сондықтан, A матрицаны B матрицаға көбейтсек, яғни

$$C = A \cdot B, \ C = (c_{mk}),$$

мұндағы C матрицаның c_{ij} элементтері мына формуладан анықталады:

$$c_{ij} = (a_{i1}a_{i2}a_{i3}\dots a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_{nj} \end{pmatrix} = \sum_{p=1}^{n} a_{ip} \cdot b_{pj} \quad i = \overline{1, n}, j = \overline{1, k}. \tag{1.30}$$

1.16-теорема. A мен B матрица көбейтінділерінің рангісі әрбір көбейткіштердің рангісінен үлкен емес, яғни

$$rang\, C = rang\,(A \cdot B) \le rang\, A,$$

$$rang\, C = rang\,(A \cdot B) \le rang\, B.$$

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін A мен C матрицаларының барлық тік жолдарынан анықталған D матрицаны қарастырайық:

$$D = (A \mid A \cdot B) = (d_{ij}), \; i = \overline{1, m}, j = \overline{1, n+k}$$

және A, C мен D матрицаларының рангісіне мына теңсіздіктер орындалады:

$$0 < rang\, A \min < (m, n,), \; 0 < rang\, C < \min\,(m, k),$$

$$0 < rang\, D < \min\,(m, n+k),$$

сондықтан

$$rang\,(AB) \le rang\, D. \tag{1.31}$$

(1.30) теңдікті пайдаланып, D матрицаны толық жазайық:

$$D = \left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \dots & a_{1n} & c_{11} & \dots & c_{1k} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & c_{21} & \dots & c_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & c_{m1} & \dots & c_{mk} \end{array}\right) =$$

$$= \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & \dots & a_{1n} & a_{11} \cdot b_{11} + \dots + a_{1n} \cdot b_{n1} \dots a_{11} b_{1k} + \dots + a_{1n} b_{nk} \\ a_{21} & \dots & a_{2n} & a_{21} \cdot b_{11} + \dots + a_{2n} \cdot b_{n1} \dots a_{21} b_{1k} + \dots + a_{2n} b_{nk} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & a_{m1} \cdot b_{11} + \dots + a_{mn} \cdot b_{n1} \dots a_{m1} b_{1k} + \dots + a_{mn} b_{nk} \end{array}\right).$$

D матрицаға элементар түрлендірулерді қолданайық. Осы матрицадағы A матрицаның 1-тік жолын — b_{11}-ге, 2-тік жолын — b_{21}-ге, осы сияқты жалғастырып, n-тік жолын — b_{n1}-ге көбейтейік те $n+1$-тік жолына ($C = A \cdot B$-матрицаның 1-тік жолына) қосайық, т. с. с. ең соңында А матрицаның 1-тік жолын — b_{1k}-ға, 2-тік жолын — b_{2k}-ға, осы сияқты жалғастырып, n-тік жолын — b_{nk}-ға көбейтіп, $n+k$-тік жолына ($C = A \cdot B$-матрицаның k-тік жолына) қосайық. Сонда D матрицаға эквивалентті матрицаның $n+1$-тік жолдарынан $n+k$-тік жолдарына дейінгі барлық тік жолдарының элементтері нөлге тең, ал алғышқы бірінші тік жолдары A матрицаның алғашқы тік жолдары, яғни $D \sim (A \mid 0)$, мұндағы 0-нөлдік матрица. Осыдан $rang\, D = rang\, A$. Олай болса, (1.31) теңсіздіктен $rang\,(AB) \le rang\, A$.

B мен $A \cdot B$ — матрицаларының барлық жатық жолдарынан анықталған

$$\widetilde{D} = \left(\frac{B}{AB}\right) = (\widetilde{d}_{ij}), \; i = \overline{1, n+m}, \; j = \overline{1, k}.$$

матрицаны қарастырайық және $0 < rang\, \widetilde{D} < min\,(n+m, k)$, $0 < rang\,(AB) \le min\,(m, k)$. Олай болса

$$rang\,(AB) \le rang\, \widetilde{D}. \tag{1.32}$$

Жоғарыда D матрицаға қолданған түрлендіруді қарастырып отырған $\widetilde{D}$ *матрицаға қолданып,* $\widetilde{D} \sim \left(\frac{B}{0}\right)$ — *матрицаны аламыз. Осыдан* $rang\, \widetilde{D} = rang\, B$ *болады, онда (1.32) теңсіздіктен* $rang\,(AB) \le rang\, B$ *теңсіздігін аламыз. Теорема дәлелденді.*

Салдар. Егер $A_1 A_2 \dots A_p$ көбейтіндісі анықталса, онда

$$0 < rang\,(A_1 A_2 \dots A_p) \le rang\, A_k, \; k = \overline{1, p}.$$

1.17-теорема. Егер AB көбейтіндісі анықталса, онда A матрицаның ерекше емес B ($|B| \ne 0$) матрицаға көбейтіндісінің рангісі A матрицаның рангісіне тең, яғни $rang\,(AB) = rang\, A$.

Дәлелдеуі. $C = AB$ болсын, онда 1.16-теоремадан:

$$rang\,(AB) \le rang\, A. \tag{1.33}$$

Теореманың шарты бойынша B матрицаның B^{-1} кері матрицасы бар және $CB^{-1} = A$ теңдігі орындалады ($CB^{-1} = ABB^{-1} = A$). Осыдан және жоғарыдағы теоремадан

$$rang\, A = rang\,(CB^{-1}) \le rang\, C = rang\,(AB).$$

Соңғы мен (1.33) теңсіздіктерді салыстырып, дәлелдеу керек теңдікті аламыз.

§1.15. Ұқсас матрицалар

Анықтама. Егер ерекше емес S матрица табылып,

$$A = S^{-1}BS \text{ немесе } A = SBS^{-1}$$

теңдігі орындалса, онда A матрица B матрицаға *ұқсас* деп аталады.

Ұқсас матрицалардың қасиеттерін қарастырайық.

1. Егер A матрица B матрицаға ұқсас болса, онда B матрицада A матрицаға ұқсас.

A матрица B матрицаға ұқсас болсын, яғни

$$A = S^{-1}BS$$

теңдігі орындалады. Соңғы теңдіктің екі жағын да алдымен солдан оңға қарай S матрицасына, содан соң солға қарай S^{-1} *матрицасына көбейтейік:*

$$S \cdot A = S \cdot S^{-1}B \cdot S, \; S \cdot A \cdot S^{-1} = S \cdot S^{-1} \cdot B \cdot S \cdot S^{-1},$$

мұндағы $S \cdot S^{-1} = S^{-1} \cdot S = E$. Осыдан $S \cdot A \cdot S^{-1} = B$ теңдігін аламыз, яғни B матрица A матрицаға ұқсас болады.

2. Егер A мен B және B мен C матрицалары ұқсас болса, онда A мен C матрицалары ұқсас.

Шынында да, қасиеттің шарты бойынша

$$A = S^{-1} \cdot B \cdot S, \quad B = S_1^{-1} \cdot C \cdot S_1$$

теңдіктері орындалады. Екінші теңдікті бірінші теңдікке қойсақ:

$$A = S^{-1} \cdot S_1^{-1} \cdot C \cdot S_1 \cdot S = (S_1S)^{-1} \cdot C \cdot S_1 \cdot S = S_2^{-1} \cdot C \cdot S_2,$$

мұндағы $S_2 = S_1 \cdot S$. Осыдан A матрицаның C матрицаға ұқсастығы шығады.

3. Мына теңдіктер орындалады:

$$S^{-1}(A_1 + \ldots + A_m)S = S^{-1}A_1S + S^{-1}A_2S + \ldots S^{-1}A_mS,$$
$$S^{-1}A_1A_2\ldots A_mS = S^{-1}A_1S \cdot S^{-1}A_2S \ldots S^{-1}A_mS$$
$$S^{-1}A^rS = (S^{-1}AS)^r, \; r \text{ — кез келген сан,}$$
$$f(S^{-1}AS) = S^{-1}f(A)S, \; f \text{ — функция.}$$

Үшінші теңдікті дәлелдейік.

Егер $0 < r = 1, 2, \ldots$ болса, онда екінші формуланы пайдаланып теңдікті мына түрде жазамыз:

$$S^{-1}A^rS = S^{-1} \cdot \underbrace{A A \ldots A}_{r} \cdot S =$$

$$= \underbrace{S^{-1} \cdot A \cdot S \cdot S^{-1} \cdot A \cdot S \ldots S^{-1} \cdot A \cdot S}_{r} = (S^{-1}AS)^r$$

Егер $r < 0$, анықтық үшін $q = -r > 0$ болса, онда:

$$S^{-1}A^rS = S^{-1}(A^{-1})^qS = \underbrace{S^{-1}A^{-1}S \cdot \ldots \cdot S^{-1}A^{-1}S}_{q} = (S^{-1}A^{-1}S)^q =$$

$$= (S^{-1}AS)^{-q} = (S^{-1}AS)^r.$$

Қалған теңдіктердің дәлелдеуін жаттығу ретінде оқырмандардың өздеріне ұсынамыз.

Анықтама. A мен B матрицалары *эквивалентті* деп аталады, егер ерекше емес S және R матрицалары табылып

$$A = S \cdot B \cdot R$$

теңдігі орындалатын болса.

Анықтама. A матрицаның *сипаттамалық матрицасы* деп мына матрицаны айтамыз

$$A - \lambda \cdot E = \begin{pmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{pmatrix}, \tag{1.34}$$

ал оның анықтауышы:

$$\Delta_A(\lambda) \equiv |A - \lambda \cdot E| = \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} \tag{1.35}$$

A матрицаның көпмүшелігі деп аталады.

Егер квадрат A матрица n-ретті болса, онда анықтама бойынша $\Delta_A(\lambda)$ — көпмүшелігі λ-ға тәуелді n-дәрежелі көпмүшелік болады. Сондықтан, $\Delta_A(\lambda)$ көпмүшелігін λ-ға тәуелді n-дәрежелі көпмүшелік түрінде жазуға болады:

$$\Delta_A(\lambda) = a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n, \quad (1.36)$$

мұндағы a_i, $i = \overline{0, n}$ коэффиценттері A матрицаның элементтері арқылы анықталады.

1.18-теорема. Егер A мен B квадрат матрицалары ұқсас болса, онда олардың сипаттамалық көпмүшеліктері тең болады.

Дәлелдеуі. Теореманы дәлелдеу үшін

$$|A - \lambda \cdot E| = |B - \lambda \cdot E|$$

теңдігі орындалатынын дәлелдесек жеткілікті. Теореманың шарты бойынша A мен B матрицалары ұқсас, яғни $A = S^{-1} B S$ теңдігі орындалады. Енді A матрицасының көпмүшелігін қарастырайық:

$$|A - \lambda \cdot E| = |S^{-1} B \cdot S - \lambda \cdot E| =$$

$$= |S^{-1}(B - \lambda \cdot E)S| = |S^{-1}| \cdot |B - \lambda \cdot E| \cdot |S| =$$

$$= |S^{-1}| \cdot |S| \cdot |B - \lambda \cdot E| = |S^{-1}S| \cdot |B - \lambda \cdot E| =$$

$$= |B - \lambda \cdot E|.$$

Теорема дәлелденді.

1.19-теорема. A мен B квадрат матрицалары ұқсас болу үшін олардың $A - \lambda \cdot E$ мен $B - \lambda \cdot E$ сипаттамалық матрицалары эквивалентті болуы қажетті әрі жеткілікті.

Қажеттілігі. A мен B квадрат матрицалары ұқсас болсын, яғни $A = S^{-1} BS$ теңдігі орындалсын. Онда

$$A - \lambda \cdot E = S^{-1} \cdot BS - \lambda \cdot E =$$

$$= S^{-1}(BS - \lambda \cdot S) = S^{-1}(B - \lambda E)\, S$$

теңдігі орындалады. Демек, $A - \lambda \cdot E$ мен $B - \lambda \cdot E$ — матрицалары эквивалентті.

Жеткіліктілігі. $A - \lambda \cdot E$ мен $B - \lambda \cdot E$ матрицалары эквивалентті болсын, яғни

$$A - \lambda \cdot E = R\,(B - \lambda \cdot E)\, S\,. \quad (1.37)$$

теңдігі орындалсын, мұндағы $|R| \neq 0$, $|S| \neq 0$. Енді (1.37) формуладағы λ-ның бірдей дәрежесінің коэффициенттерін теңестірейік:

$$A = RBS,$$

$$E = RS.$$

Осыдан $R = S^{-1}$ болады. Онда $A = RBS = S^{-1}BS$. Теорема дәлелденді.

Анықтама. $\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot E|$ — характеристикалық көпмүшелігінің түбірлері A матрицасының *сипатамалық түбірлері* немесе *меншікті мәндері* деп аталады.

(1.36) — көпмүшелігінің a_0, a_1 және a_n — коэффициенттерін анықтайық. λ-ның n мен $n - 1$ үлкен дәрежелері $A - \lambda \cdot E$ сипаттамалық матрицасындағы диагонал элементтерінің көбейтіндісінде ғана бар:

$$(a_{11} - \lambda)\,(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda) =$$

$$= (-1)^n \cdot \lambda^n + (-1)^{n+1} \cdot (a_{11} + \ldots + a_{nn}) \cdot \lambda^{n-1} + \ldots$$

Сондықтан

$$a_0 = (-1)^n, \; a_1 = (-1)^{n+1} \cdot (a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}),$$

мұндағы $a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$ — диагонал элементтерінің қосындысы A **матрицасының ізі деп аталады және ол** rtA немесе SpA таңбаларының бірімен белгіленеді:

$$SpA = a_{11} + a_{12} + \ldots + a_{in} = trA.$$

Виета теоремасы бойынша сипаттамалық көпмүшеліктің түбірлерінің көбейтіндісі бос мүшеге тең:

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 \ldots \cdot \lambda_n = |A|.$$

Осыдан мынадай тұжырымға келеміз: A матрицасының кем дегенде бір меншікті мәні болу үшін A матрицаның ерекше болуы ($|A| = 0$) қажетті әрі жеткілікті.

Егер $\lambda = 0$ болса, онда (1.35) пен (1.36) теңдіктерінен мына теңдікті аламыз:

$$a_n = \Delta_A(0) = (-1)^{n+n}\, |A| = |A|.$$

Олай болса (1.35) формуладан

$$\Delta_A(\lambda) = |A - \lambda \cdot E| =$$
$$= (-1)^n \cdot [\lambda^n - p_1 \cdot \lambda^{n-1} + p_2 \cdot \lambda^{n-2} + \ldots + (-1)^n \cdot p_n],$$

мұндағы

$$p_1 = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = SpA, \ p_n = |A|.$$

Анықтама. Егер $\Psi(A) = 0$ болса, онда A матрица $\Psi(\lambda)$ *көпмүшелігінің түбірі* деп аталады.

1.20-теорема (Гамильтон-Кэли). A квадратты матрица өзінің сипаттамалық көпмүшелегінің түбірі болады, яғни

$$\Delta_A(A) = 0$$

теңдігі орындалады.

Дәлелдеуі. Алдымен A матрицаның сипаттамалық матрицасының кері матрицасын анықтайық. Кері матрицаның (1.29) — формуласы бойынша:

$$(A - \lambda \cdot E)^{-1} = C(\lambda)/\Delta_A(\lambda), \ C(\lambda) = (A_{ij}(\lambda)), \quad (1.38)$$

мұндағы $A_{ij}(\lambda)$ — сипаттамалық $A - \lambda \cdot E$ матрицасының элементтерінің $n-1$-ретті алгебралық толықтауышы. Демек, $A_{ij}(\lambda)$ алгебралық толықтауышы λ-ға тәуелді $n-1$-ретті көпмүшелік, яғни

$$A_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)} \cdot \lambda + \ldots + \alpha_{ij}^{(n-1)} \cdot \lambda^{n-1},$$

мұндағы $\alpha_{ij}^{(k)}, k = \overline{0, n-1}$ — нақты сандар. Сондықтан, $C(\lambda)$ матрица мына түрде жазылады:

$$C(\lambda) = C_0 + C_1 \cdot \lambda + \ldots + C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1}, \quad (1.39)$$

мұндағы C_k матрица $\alpha_{ij}^{(k)}$ — сандарынан анықталған. Енді (1.39) формуланы (1.38) формулаға қойып, оны оңнан солға қарай $A - \lambda \cdot E$ матрицаға көбейтейік. Сонда:

$$\Delta_A(\lambda)E = (C_0 + C_1 f \cdot \lambda + \ldots + C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1})(A - \lambda \cdot E) \quad (1.40)$$

теңдігін аламыз. (1.36) теңдікті (1.40) формулаға қояйық:

$$(a_0 \cdot \lambda^n + a_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \cdot \lambda + a_n) E =$$
$$= (C_0 + C_1 \cdot \lambda + \ldots + C_{n-1} \cdot \lambda^{n-1})(A - \lambda \cdot E).$$

Соңғы теңдіктегі λ-ның бірдей дәрежесінің коэффициенттерін теңестірейік:

$$\begin{array}{l|l}
\lambda^n & a_0 E = -C_{n-1} \\
\lambda^{n-1} & a_1 E = -C_{n-2} + C_{n-1} A \\
\lambda^{n-2} & a_2 E = -C_{n-3} + C_{n-2} A \\
\ldots & \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \\
\lambda^2 & a_{n-2} E = -C_1 + C_2 A \\
\lambda & a_{n-1} E = -C_0 + C_1 A \\
\lambda^0 & a_n E = C_0 A.
\end{array}$$

Оңнан солға қарай бірінші теңдікті A^n-ге, екінші теңдікті A^{n-1}-ге, үшінші теңдікті A^{n-2}-ге т. с. с., ең соңғы теңдікті E-ге көбейтіп қосайық. Сонда

$$a_0 A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_{n-2} A^2 + a_{n-1} A + a_n E = 0,$$

яғни нөлдік матрица аламыз. Осыдан

$$\Delta_A(A) = 0.$$

Сонымен, A матрица — өзінің сипаттамалық көпмүшелігінің түбірі. Теорема дәлелденді.